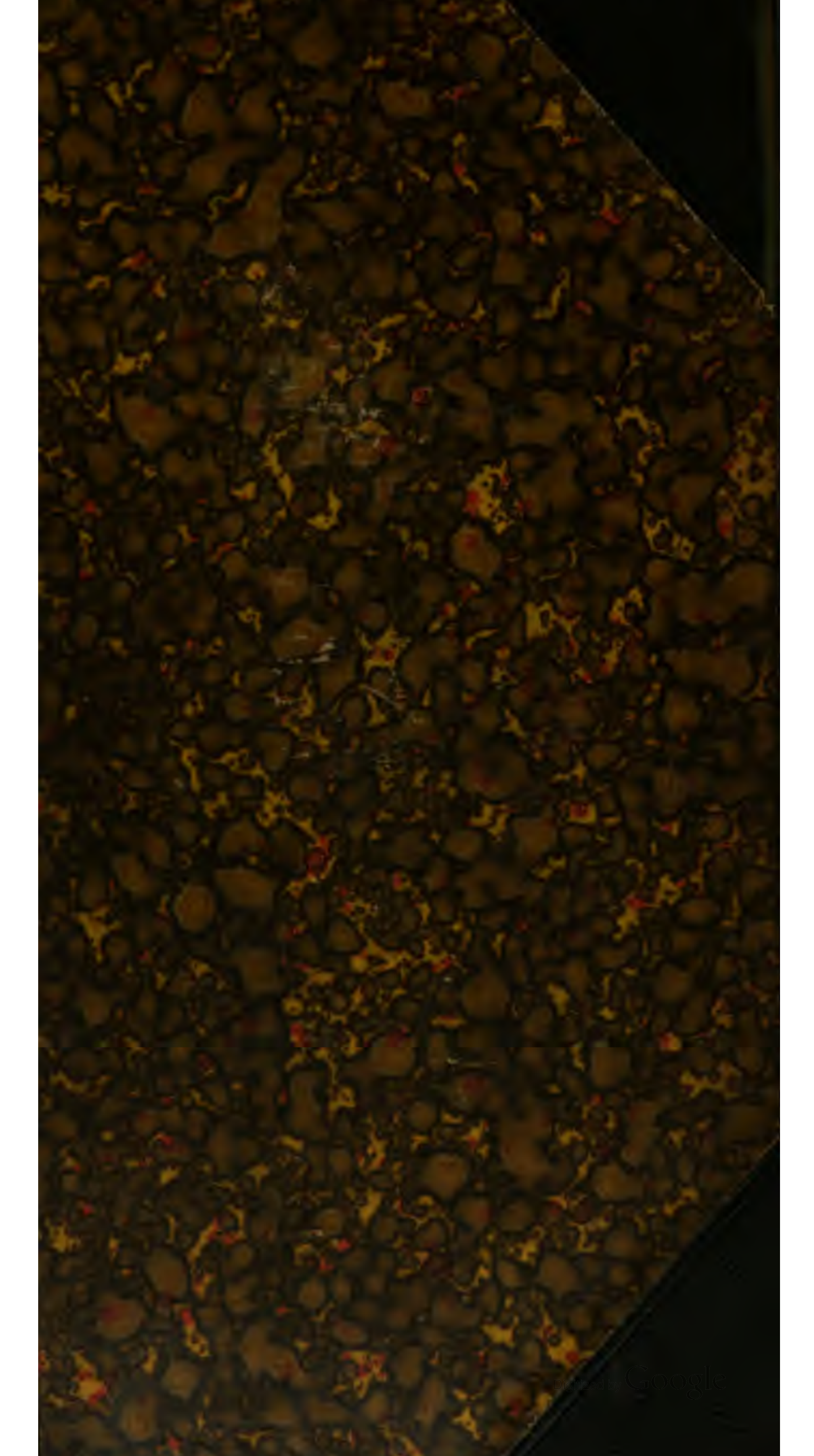
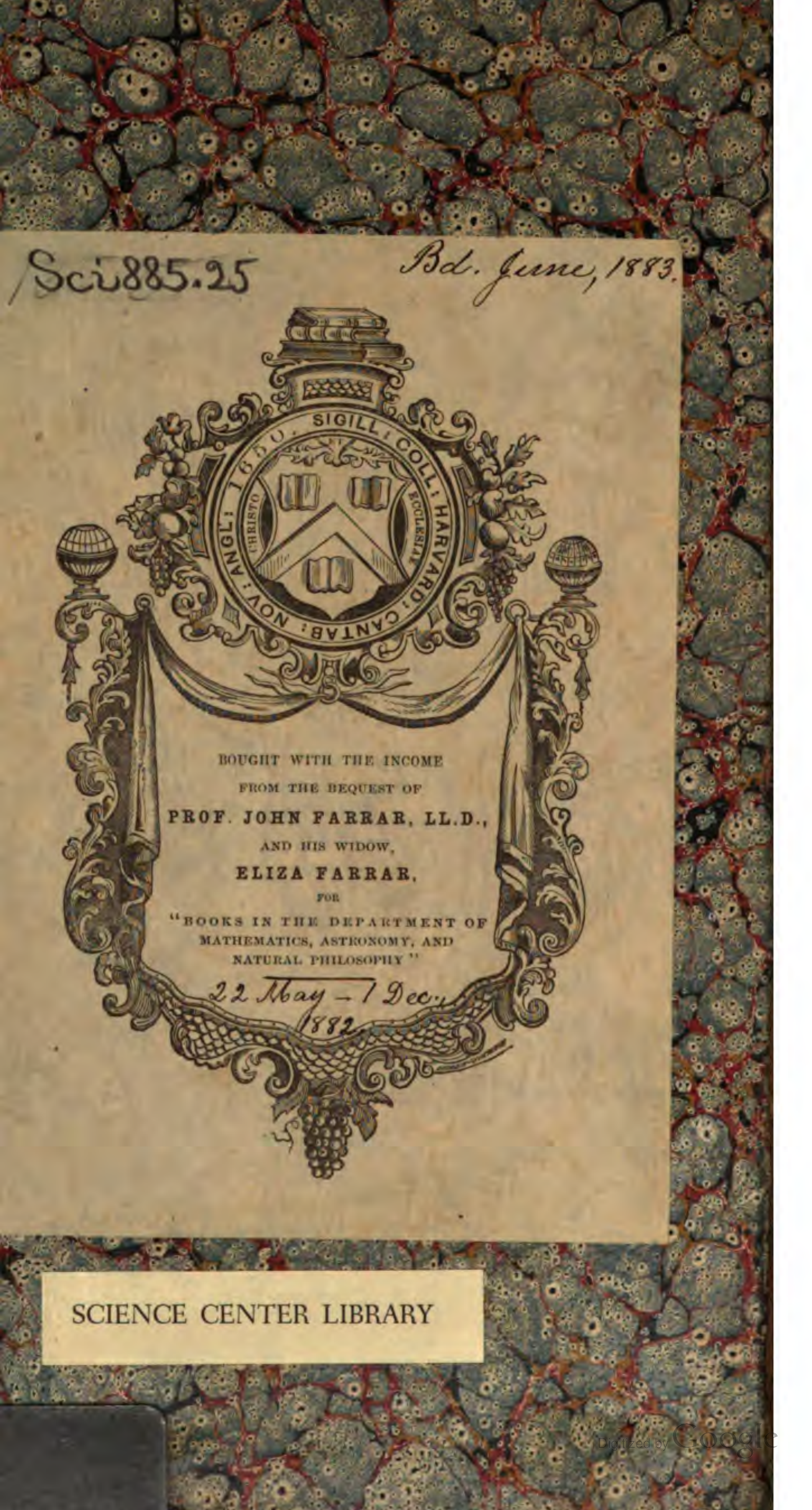
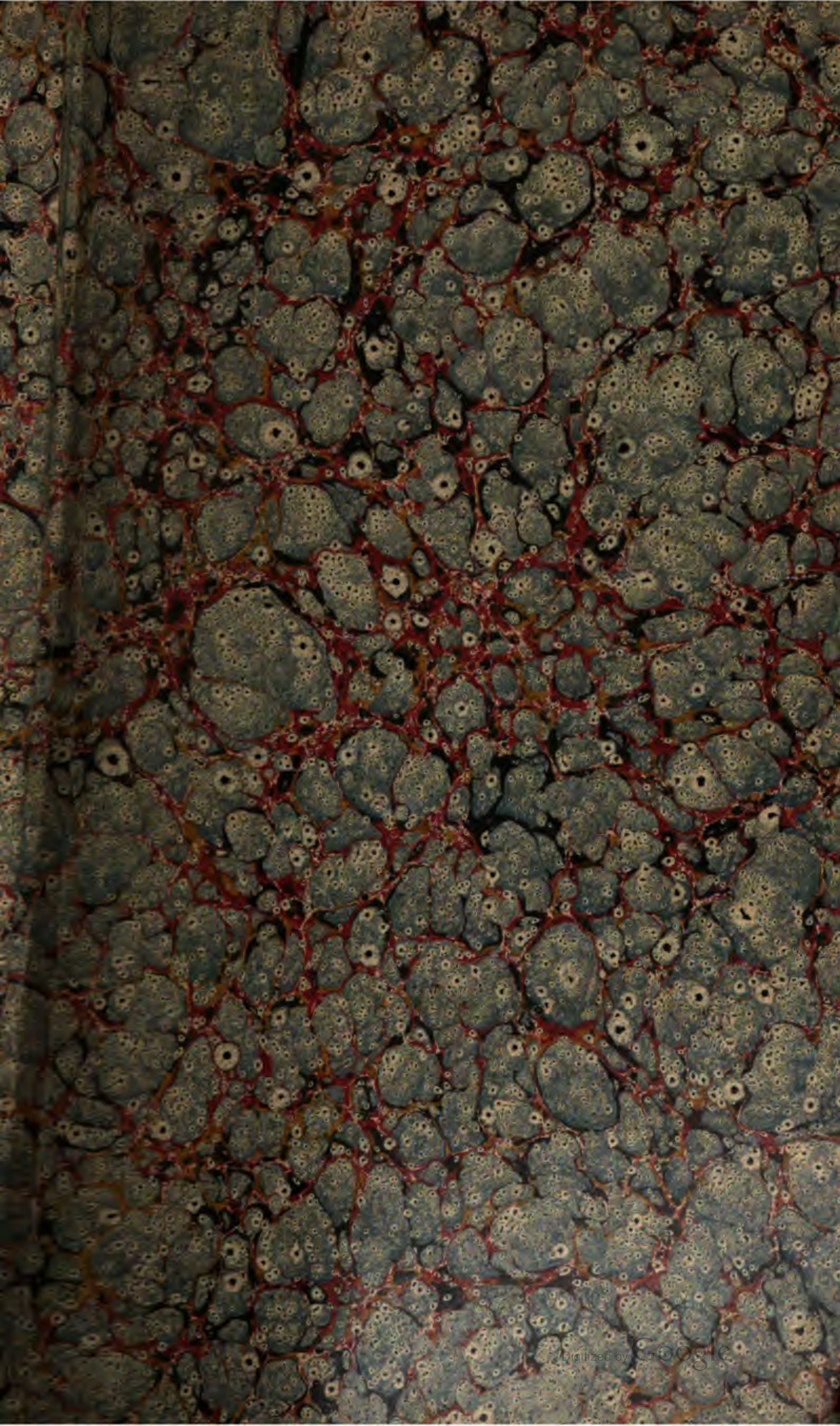






ARCHIV

der

MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Gegründet von

J. A. Grunert,

fortgesetzt von

R. Hoppe.

Achtundsechzigster Teil.

Leipzig.
C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,
J. Sengbusch.

1882.

1882, May 22 – Dec. 1.

[illegible]

Inhalts-Verzeichniss

des achtundsechszigsten Teils.

Integralrechnung.

Geometrie der Ebene.

Litterarische Berichte.

Berichtigungen

in T. LXVII.

S. 228. fehlt beim 2. Absatze die Bezugnahme auf Fig. 6.
„ 231. bei §. 8. 1) auf Fig. 10.
„ 232. bei 3^g) auf Fig. 11.
„ 233. bei 3^c auf Fig. 12.

S.	Z.		statt	setze
„ 282.	Z. 7	v. ob.	CF	BF
„ 334.	9		HJK	CJK
„ 337.	10	v. unt. füge hinzu: $[\gamma_1] = \gamma_1$; $[\gamma_1\gamma_2] = \gamma_1\gamma_2 + 1$		
„ 354.	6	v. ob.	a	d
	11 „ „ / 8. 7. 6	v. unt.	i	1
	3.	unt.	$-\int$	$-\frac{1}{a^2}\int$
„ 356.	5.	v. ob.	$=\int$	$=\frac{1}{a}\int$
	7		$-\int$	$\frac{1}{a}\int$
	7	v. unt.	$-\int$	$-\frac{1}{a^2}\int$
	5		k^3	k^2
„ 357.	8 9.	v. ob.	$\mathrm{dn}\,x$	$a\,\mathrm{dn}\,x$
	8	v. unt.	$r+2$	$r-2$
„ 358.	7	v.. ob.	$p-4$	$p-1$
	8	v. unt.	$=\frac{1}{a}$	$-\frac{1}{a}$
„ 359.	4		k^3	k^2
„ 362.	8	v. ob.	$2kb$	ikb
„ 363.	4		$\mathrm{on}\,xb^2$	$\mathrm{cn}\,x+b^2$
	13		dx	$\mathrm{dn}\,x$
„ 364.	7		$\sqrt{}$	$k_1\sqrt{}$

Seite	Zeile	statt	setze
S. 365.	Z. 2. 3 v. ob.	statt c''	setze c'''
„ 366.	7	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$
	1 v. unt.	c_2	$\frac{1}{2}c_2$
„ 367	3 v. ob.	c_3	$\frac{1}{2}c_3$
	3 v. unt.	n''	n'''
	2	n''	n_3
„ 368.	4 v. ob.	i	$i;$
„ 369.	8 v. unt.	$\frac{k}{k_1}$	$\frac{k_1}{k}$
„ 370.	13 v. ob.	m''	m'''
„ 373.	13	vorderen	anderen
„ 374.	4 v. unt.	$\mathrm{dn}\, x$	$\mathrm{sn}\, x$
„ 376.	3 v. ob. vor Axensystem fehlt rechtwinkliges		
	18 v. ob.	statt r^λ	setze s^λ
„ 377.	11. 12	ϱ^r	ϱ^p
„ 379.	16 v. unt.	wenn	worin
	13	K	$K_{(90)}$
„ 381.	2 v. ob.	$<\ >$	$\angle\ \angle$
„ 382.	4. 9.	und von	nur von
	13	$\varphi(\vartheta)$	$\overset{<}{\varphi(\vartheta)}$
„ 384.	15	mit	a_s mit
„ 385.	14	$\overset{<}{\sin w_m}$	$\overset{<}{\sin w_m}$
„ 386.	7 v. unt.	wenn	von
„ 388.	11 v. ob.	ungefähr	ungünstiger
	13	fehlt	$\varrho_1 = 3$
	6 v. unt.	statt $\overset{<}{w_m}$	setze $\overset{>}{w_m}$
„ 390.	8 v. ob.	$\varphi''(\vartheta) > 0$	$\varphi''(\vartheta) < 0$
	13 v. unt.	ϱ_1 und ϱ_2	$\varrho_1 : \varrho_2$
„ 393.	12 v. ob.	$\overset{\gtrless}{\cos}$ (2 mal)	$\overset{\lessgtr}{\cos}$
	9 v. unt.	B_m	B_m'
„ 394.	5. 7 v. ob.	a_m	$a_m\, \varrho^{n+p-m}$
	6	$\cos$	$\overset{<}{\cos}$

			statt	setze
S. 395.	Z. 5 v. ob.	statt	$\lessgtr$	setze $\gtrless$
„ 397.	2	unter	H_+	$<$
	10 v. unt.	statt	ϱ_1	ϱ_0
	6		L, M	$\overset{<}{L}, \overset{<}{M}$
„ 398.	13		$\pm$	$+$
	4		$\lesseqgtr$	$\gtrless$
	2		$\gtrless$	$\lessgtr$
„ 399.	6 o. ob.		E	C
			bzhw.	bezeichnet
„ 400.	7		Q	Q_+
„ 401.	6 v. unt.		$\overset{>}{Q}$	$\overset{<}{Q_+}$
	5		10,824	10,829
„ 403.	11. 13 v. ob.		ϱ_r	ϱ^r
„ 404.	5		C_1	C_r
	10		φ_r	S_r
„ 405.	9		$\overset{<}{E_1}$	E_1
„ 406.	10 v. unt.		H'	H_e'
„ 408.	2		41^0	71^0
„ 410.	6 v. ob.		r	ϱ
„ 411.	8 v. unt.		$1'$	$15'$
	5		0,37015	0,37010

Litt. Ber. 265.

S. 11. Z. 7. v. ob. statt D, E, F setze E, F, G.

in T. LXVIII.

S. 54. Z. 13 v. ob. vor Proportionaldreiecke fehlt gleichschenklige

„ 16. 17 tilge gleichseitige

21 zu $ADC > R$ füge sowie α u. $\beta < R$

			statt	setze
„ 55.	13	statt	Ag	setze Ax
„	17		Bx	Ax
„	4		$\gtrless$	$\gtreqless$

S. 56.	Z. 7 v. unt.	$DE = \pm \frac{\cdots}{\cdots}$	setze $DE = \frac{\pm \cdots}{\cdots}$
„ 57.	2. 3. 4 v. ob.	$m_1 = \mp \frac{\cdots}{\cdots}$	$m_1 = \frac{\pm \cdots}{\cdots}$ etc.
	10 v. unt.	$\frac{1}{p_m}$	$\frac{1}{p_m} =$
„ 59.	8	2R	$2R - \gamma$
„ 60.	4	$\gtrless$	$\gtreqless$
„ 61.	2 v. ob.	tilge entweder, oder $b = \frac{a}{2}$	
„ 62.		statt $s - n$	setze $s - a$
„ 63.	16 v. unt.	a	n
	13	at	$2t$
	7	a^2(im Nenner)	a
„ 64.	9 v. ob.	BC^2	AC^2
	15 v. unt.	c^2(im N.)	a^2
	5	tilge t_1	
„ 67.	8 v. ob.	$t,$	f_1
„ 68.	16	AD	BD
	18	c^2(im N.)	c
„ 69.	1 v. unt.	BO_2	BO_1
„ 70.	15 v. ob.	BI	BJ
„ 71.	2	OO_1O_2	$O_1O_2O_3$
	1 v. unt.	C	H
„ 223.	13 v. ob.	b_p	b^p
„ 224.	1	$\binom{n-q}{q-1}$	$\binom{n-q-1}{q-1}$



ARCHIV

der

MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Gegründet von

J. A. Grunert,

fortgesetzt von

R. Hoppe.

Achtundsechzigster Teil. Erstes Heft.

(Mit 2 lithographirten Tafeln.)

Leipzig.
C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,
J. Sengbusch.

1882.

Litterarischer Bericht
CCLXIX.

Lehrbücher, Sammlungen und Tabellen.

Lehrbuch der elementaren Mathematik. Von Victor Schlegel, Oberlehrer am Gymnasium in Waren. Zweiter Theil. Geometrie. 1879. — Dritter Theil. Trigonometrie. (Mit einer vierstelligen Logarithmentafel.) 1880. — Vierter Theil. Stereometrie und sphärische Trigonometrie. 1880. Wolfenbüttel. Julius Zwissler. 222 + 116 + 192 S.

Dies Lehrbuch gehört zu denjenigen, welche die eigenartigen Grundsätze des Verfassers auf selbstgewähltem Wege zu verwirklichen suchen. Die Grundsätze werden in der Vorrede ziemlich einseitig dargelegt, so dass der Leser, um ihren Sinn in den Hauptfragen zu finden, sich an den Ausfall der Bearbeitung halten muss. Der Verfasser erklärt die Euklidische Form nur für ein, der Bequemlichkeit dienendes äusserliches Merkmal der Methode, welches jedoch dem eigentlichen Zwecke des Unterrichts hinderlich sei. Hier fragt es sich sogleich, ob er bei Beseitigung der sogenannten Form den Zweck der Euklidischen Anordnung der Sätze nach ihrem Deductionsnexus, den Grund alles erworbenen Wissens im Bewusstsein zu erhalten, den Schüler solange in der intuitiven und logischen Betrachtung des Einfachen, Speciellen, Ruhenden verweilen zu lassen, dass er an keiner Beziehung achtlos vorbeigehen kann — aufrecht halten will oder überhaupt nicht kennt und mit der Form zugleich wegwirft. In der Vorrede spricht er nur von der Einteilung des Lehrstoffs in Lehrsätze, Voraussetzungen, Behauptungen, Beweise und dem Voranstellen des Lehrsatzes vor den Beweis, und zwar in dem Sinne, als ob dies bloss für gedächtnissmässige Aneignung des Stoffes besonders vorteilhaft sei; dass hingegen diese Anordnung zur Concentration der Gedanken auf eine eng begrenzte Aufgabe dienen soll, die der Schüler

vorher kennen muss um zu wissen, worauf er zu achten hat, dass dadurch der Fortschritt der Fähigkeit, die Erweiterung des Gebietes des begründeten Wissens gemessen wird, davon erwähnt er nichts. Sieht man nun die Ausführung an, so bestätigt sich mehr und mehr die Vermutung, dass der genannte Zweck für ihn gar nicht vorhanden ist. Von der Bewegung wird gleich anfangs ein sehr ausgedehnter Gebrauch gemacht. Offenbar enthält ein bewegtes Gebilde eine grössere Mannichfaltigkeit als ein festes; es ist daher genügender pädagogischer Grund in den Anfängen der Geometrie bei den festen Gebilden zu verweilen, wofern man aber bald auch bewegte Gebilde in Betracht zu ziehen für gut findet, darauf Bedacht zu nehmen, dass die Bewegung einfach genug ist um die Reihe der Zustände übersehen zu lassen. Jede Bewegung lässt sich in gewisse Elementarbewegungen zerlegen; der analytische Weg, welcher diese Zerlegung vollzieht, ist für Anfänger ungeeignet, weil der allgemeine Begriff seinem ganzen Inhalte nach nicht sogleich aufgefasst werden kann, so dass dadurch der Schüler zu vager Betrachtung gezwungen wird. Das allein zulässige Verfahren würde also das synthetische sein, demgemäss die Elementarbewegungen zuerst, wo nicht ausschliesslich, gelehrt werden. Das Lehrbuch dagegen beginnt erstens mit dem allgemeinen Begriff, anstatt aber die Elementarbewegungen herzuleiten, ignorirt es zweitens alle andern und benennt jene bloss, benennt sie überdies drittens unklar und widerspruchsvoll. Es heisst z. B. bei der Bewegung der Geraden in der Ebene: „Eine Gerade hat die Merkmale der Lage und Richtung. Eine Gerade, die sich bewegt, kann hiernach entweder ihre Lage oder ihre Richtung ändern. Zwei Geraden können sich entweder durch ihre Lage oder durch ihre Richtung unterscheiden." Eine Drehung ist, wie man hiernach vielleicht noch zu bezweifeln versuchen möchte, wie es aber die nachherige Erörterung unzweideutig ausspricht, eine Veränderung der Richtung bei unveränderter Lage. Ob das irgend einen Sinn haben kann, lassen wir dahin gestellt. Was aber der Verfasser unter Lage auch verstanden wissen will, so ergiebt es einen eclatanten Widerspruch; denn, wenn zwei Drehungen eine Parallelverrückung zur Folge haben, so sind hiernach zwei Nichtveränderungen gleich einer Veränderung. Diese Stelle, die sich gleich in den Anfangsgründen producirt, also bestimmend für das Ganze wirkt, mag als Beleg dienen, wenn wir sagen, dass der Verfasser die bewährte Methode verworfen hat, ehe er im Stande war eine bessere zu schaffen. Für Ausbildung in mathematischer Logik ist nicht nur nichts getan, sondern im Gegenteil der natürliche Verstand der Schüler in solchen principiellen Punkten vexirt, wo sie sich schwerlich selbst zu orientiren vermögen. Die zwei Abteilungen der Geometrie sind überschrieben: Geometrie der bewegten, der ruhenden Gebilde. Letztere besteht in einem Vortrage der neuern

Geometrie, keineswegs elementar bearbeitet, einer gelehrten Abhandlung ähnlicher als einem Schulbuch. Als Anhang folgt die Theorie der Curven 2. Ordnung, welche als Oerter für constante Summe und Differenz der 2 Radien dargestellt werden; dann Uebungssätze und Aufgaben mit vorausgehender Zusammenstellung der Lösungsmethoden; dann die Uebersicht der Fundamental-Aufgaben.

Die Trigonometrie ist gleichfalls nach selbstgewählter Methode bearbeitet, die zwar nicht selbst erfunden ist, sondern sich auf fremden Vorgang beruft, doch von der gewöhnlichen in manchen hervortretenden Punkten abweicht. Die Gründe für die Wahl sind in der Vorrede verständlich dargelegt, man kann ihnen, wenn man sie auch nicht für entscheidend hält, doch Berechtigung zuerkennen. Die Erklärung des allgemeinen Functionsbegriffs nebst hierher gehöriger Anwendung überschreitet nicht den elementaren Standpunkt und findet sich bald ebenso, bald weniger klar in manchen andern Lehrbüchern. Statt der gleichzeitigen Einführung der 6 oder 4 Functionen wird nur der Cosinus als Transcendente definirt, die übrigen, nachdem die Theorie, Berechnung und eine dreistellige Tafel für den spitzen Winkel aufgestellt ist, darauf zurückgeführt. Alsdann wird der Cosinus, nachher die übrigen Functionen über die Grenzen des Winkels innerhalb eines Rechten erweitert, dann in imaginärer Exponential- und Reihenform dargestellt. Die Behandlung der Trigonometrie unterscheidet sich durch Zuziehung des Um- und Inkreises. Dann folgt die trigonometrische Auflösung der Gleichungen 2. und 3. Grades, dann die Uebersicht der Formeln und Regeln, dann Uebungssätze und Aufgaben, dann die Theorie und eine Tafel der rationalen Dreiecke, dann eine vierstellige Tafel der Logarithmen, die der Zahlen ausgeführt bis 2000.

In der Stereometrie kehrt dieselbe Unklarheit, wie sie in der Planimetrie auftrat, erweitert und vervielfältigt wieder, indem die Lage mit der Richtung und nun mit einem dritten Element „Seite" genannt als coordinirte Attribute betrachtet wird. Dies verstösst nicht bloss gegen den gewöhnlichen Wortgebrauch, sondern enthält einen Widerspruch in sich selbst. Bei der Drehung einer Geraden in der Ebene ist nämlich unbeachtet gelassen, dass der Drehpunkt ein verschiedener sein, mithin die Drehung auf unendlich verschiedene Arten statthaben kann, was hier nochmals direct geleugnet wird. Eine analoge Behandlung erfährt die bewegte Ebene oder die Ebene in ihrer Verschiedenheit. Die Lage derselben soll durch 2 Punkte bestimmt sein. Dann würden alle Ebenen gleiche Lage haben; aber so dass nur jede mit einer nächst folgenden, diese mit einer dritten, nicht jedoch die erste mit der dritten gleiche Lage hätte. Die Sätze der Stereometrie werden in untadelhaft correcter Form ausgesprochen;

was ihnen aber an Stelle einer Herleitung vorausgeht, ist ganz unverständlich und bewegt sich in teils mangelhaft bestimmten, teils unvereinbaren Begriffen. Unter solchen Umständen würde es nutzlos sein über die im einzelnen befolgte Methode etwas zu sagen.

Die sphärische Trigonometrie wird auf gewöhnliche Weise geometrisch hergeleitet; dann folgt eine Beschreibung der einzelnen Formen der Flächen 2. Grades; dann reichlich Aufgaben über alles vorhergehende.

H.

Sammlung von arithmetischen Aufgaben in systematischer Ordnung. Ein Uebungsbuch für Latein- und Realschulen. Von F. A. Steck und Dr. J. Vielmayr. Sechste, verbesserte Auflage. Kempten 1881. Jos. Kösel. 135 S.

Die Aufgaben sind geeignet zur Uebung des numerischen Rechnens in und ausser der Schule, ohne Unterscheidung ob im Kopfe oder schriftlich. Sie werden in Buchstaben gestellt mit nachfolgender Reihe von Werten der Buchstaben. Resultate stehen nicht im Buche. Sie sind nach den Rechnungsarten geordnet in die Abteilungen: Unbenannte und einfach benannte, dann mehrfach benannte Zahlen; Teilbarkeit; gemeine, Decimalbrüche; Regeldetri; arithmetische, geometrische Proportionen, Anwendung; Kettenbrüche; kaufmännische Rechnungsarten. Es ist jedesmal zuerst eine Reihe direct angesetzter, dann aus den Fällen des Lebens entnommener Aufgaben mit zu suchendem Ansatz aufgestellt. Die 6. Auflage ist der 5ten gleich.

H.

Sammlung von stereometrischen Aufgaben in systematischer Ordnung. Ein Uebungsbuch für Gymnasien und Realschulen. Von F. A. Steck, königl. Gymnasialprofessor. Kempten 1881. Jos. Kösel. 127 S.

Die Aufgaben beziehen sich auf die Relationen zwischen Inhalt, Oberfläche und Linearabmessungen von Prisma, Pyramide, Cylinder, Kegel, Kugel, deren Stücken und aus ihnen zusammengesetzten Figuren, Relationen die teils durch bekannte Formel gegeben, teils geometrisch zu suchen sind. Sie fordern die numerische Berechnung aus numerischen Daten. Die Resultate stehen hinter jedem Abschnitt.

H.

Uebungsbuch für den Unterricht in der Arithmetik und Algebra. Nach der Aufgabensammlung von Heis für höhere Bürgerschulen, Gewerbeschulen, Progymnasien und Realschulen II. Ordnung bearbeitet von Dr. Ludwig Matthiessen, o. ö. Professor der Physik an der Universität zu Rostock und Oberlehrer der Mathematik und Physik am Königl. Preuss. Gymnasium in Husum. Köln 1882. M. Du Mont-Schauberg. 252 S.

Von der Heis'schen Aufgabensammlung, welche auch den Gebrauch an Gymnasien und Realschulen I. Ordnung berücksichtigt, ausgehend sind die schwierigern Aufgaben weggelassen, die leichteren vermehrt worden. In 5 Abschnitten enthält das Gegenwärtige Erklärung und Aufgaben über Summen und Differenzen; Producte und Quotienten, Teilbarkeit, abgekürzte Decimalrechnung; Potenzen, Wurzeln (mit Berücksichtigung der Imaginären) und Logarithmen; Gleichungen ersten, zweiten Grades mit einer, mit mehrern Unbekannten (zugleich die Proportionen vertretend); Progressionen arithmetische, geometrische. Die Aufgaben sind weniger auf Erwerbung von Fertigkeit im Rechnen, am wenigsten im numerischen Rechnen, vielmehr auf Verständniss und allseitige Orientirung in den mannichfachen algebraischen Beziehungen berechnet. Sie nehmen das Selbstdenken der Schüler durchweg in Anspruch. Resultate sollen besonders ausgegeben werden.

H.

Aufgaben aus der Arithmetik und Algebra. Methodisch geordnete Sammlung von mehr als 12500 Aufgaben nebst Auflösungen. Von Theodor Sinram, Lehrer der mathematischen Wissenschaften. Dritter Teil. Hamburg 1881. Otto Meissner. 255 S.

Die Aufgaben, welche dieser Teil enthält, betreffen folgende Gegenstände des höheren Schulunterrichts: Arithmetische, geometrische Reihen 1. Ordnung, zusammengesetzte Reihen, Zinseszins- und Rentenrechnung, Permutationen und Variationen, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Binomialcoefficienten, Convergenz und Divergenz von Reihen, Anwendung des Summenzeichens, die Reihen höherer Ordnung und figurirten Zahlen, Kettenbrüche, Congruenz der Zahlen, Determinanten, complexe Zahlen in trigonometrischer Form, Verwandlung von Functionen in Reihen, imaginäre Logarithmen, Gleichungen höheren, dritten, vierten Grades, transcendente Gleichungen. Die Aufgaben sind teils algebraisch, teils numerisch, teils mit gegebenem, teils gesuchtem Ansatz. Angehängt ist ein „Antwortenheft". Giebt es Unterrichtsanstalten, welche die genannten Zweige der Mathematik, und zwar gerade diese betreiben, so möchte sich schwerlich eine Sammlung

finden, die zur Einübung so reichlichen und angemessenen Stoff auf alle verteilt, wie die gegenwärtige.

H.

Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- und Selbstgebrauch mit Angabe der benutzten Sätze, Formeln, Regeln, erläutert durch viele Zinkographien, Holzschnitte und lithograph. Tafeln, aus allen Zweigen der Rechenkunst, der niedern und höhern Mathematik, der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie; des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- und Hochbaus; der Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- und Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen etc. für Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc. zum einzig richtigen und erfolgreichen Studium, zur Forthülfe bei Schularbeiten und zur rationellen Verwertung der exacten Wissenschaften, herausgegeben von Dr. Adolph Kleyer, Ingenieur und Lehrer, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse in Frankfurt a. M. unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte. Stuttgart 1881. Julius Maier.

Die Sammlung erscheint in Heften zu 1 Bogen, jedes folgende einem neuen Zweige zugehörig, so dass vermutlich die Fortsetzung eines jeden Zweiges erst nach dem Erscheinen des Anfangs aller Zweige zu erwarten ist. Es werden zuerst Erklärungen, geteilt in wolgesetzte Frage und Antwort, nach Art militärischer Instruction, gegeben. Dann folgen Aufgaben teils mit Andeutung zur Lösung, teils vollständig durchgeführt. Die Durchführung kommt allen Erfordernissen in bester Form nach: Analysis, Auflösung, Construction und Determination sind sorgfältig ausgearbeitet. Die Figuren stehen neben dem Text. Obgleich die abschreckend vielen Worte des Titels keinen günstigen Eindruck machen mögen, so zeigt der vorliegende kleine Anfang wenigstens, dass Fleiss darauf verwandt ist, die ausgedehnten Versprechungen nach Möglichkeit zu erfüllen.

H.

Kopfrechenschule. Eine Sammlung von methodisch geordneten Kopfrechenaufgaben bearbeitet von A. P. L. Claussen, Lehrer am Königl. Seminar in Eckernförde. I. Teil. Für die mittleren, II. Teil. Für die Oberklassen der Volks- und Mittelschulen, für Präparandenanstalten und Seminarien. Schleswig 1881. Julius Bergas. 72 + 183 S.

Beide Teile enthalten bis auf weniges Uebungen derselben Rechnungsarten. Als verschiedene Rechnuugsarten werden hier auch die Anwendungen der Rechnung auf verschiedene Gegenstände, geometrische, physikalische u. s. w. betrachtet. An Vielseitigkeit der Uebung lässt die Sammlung nichts vermissen; ebenso ist der Fortschritt vom leichtern zum schwerern überall wol bemessen. Das Resultat steht bei jeder Aufgabe.

H.

Neues logarithmisch-trigonometrisches Handbuch auf sieben Decimalen bearbeitet von Dr. C. Bruhns, K. S. Geheimer Hofrath, Director der Sternwarte und Professor der Astronomie in Leipzig. Zweite Stereotypausgabe. Leipzig 1881. Bernhard Tauchnitz.

Die Einrichtung dieser Tafeln ist mit geringen Unterschieden dieselbe wie bei denen von Bremiker (s. litt. Ber. 239. S. 35). Das Format ist ein wenig grösser. Bei den Logarithmen der Zahlen steht über der letzten Ziffer, wenn sie 5 ist, ein Strich, welcher den negativen Rest anzeigt. Die trigonometrische Tafel ist für die 6 (bei Bremiker nur 5) ersten Grade durch alle Secunden ausgeführt. Ausserdem sind auch hier die Differenzen angegeben. Ferner sind in diesem Umfange nur die 4 letzten Ziffern für jede Secunde aufgestellt, die 3 ersten über jede Columne von 10 Secunden übergeschrieben. Die Gauss'schen Tafeln für Logarithmen der Summen und Differenzen werden besonders ausgegeben.

H.

Logarithmisch - trigonometrische Tafeln mit 6 Decimalstellen. Mit besonderer Rücksicht auf den Schulgebrauch bearbeitet von Dr. C. Bremiker. Achte Stereotyp-Ausgabe. Berlin 1881. Nicolai. 542 S.

Die 4. Ausgabe ist im 235. litt. Bericht S. 29 besprochen. Seitdem sind 2 Vermehrungen eingetreten — von welcher Ausgabe sie beginnen, ist aus dem datumlosen Vorwort nicht zu erkennen. Erstlich ist die Tafel der sechsstelligen Additions- und Subtractions-Logarithmen aufgenommen worden. Sie folgt der Anordnung von Wittstein, ist jedoch durch eine besondere von $B = 0,4$ beginnende Subtractionstafel vermehrt, durch welche der Vorteil gewonnen wird, dass die Differenzen 62 nicht übersteigen. Ferner ist in dem trigonometrischen Teile von 0 bis 5 Grad die Verwandlung von Sinus in Bogen hinzugefügt. Dass die Einführung sechsstelliger Tafeln in Schulen ganz unzweckmässig ist, dass, wo der bisherige Gebrauch siebenstelliger als ein nutzloser Aufwand erkannt wird, der Ueber-

gang zu fünfstelligen allein die Veränderung lohnen kann, sei hier nochmals ausgesprochen. Doch auch, wenn man nur die Anwendung für die Praxis der Rechner im Auge hat, bedarf die in der Vorrede enthaltene Empfehlung der sechsstelligen Tafel der Berichtigung. Sie stützt sich nämlich auf die durchaus unrichtige Behauptung, der durch Weglassung der 7ten Stelle entstehende Fehler könne nie erheblich grösser werden als der aus der Ungenauigkeit der Data resultirende. Letzterer hat stets seine durch die Natur der Functionen bestimmten festen Grenzen; ersterer hingegen, und zwar nicht bloss der mögliche, sondern auch der wahrscheinliche Fehler wächst mit der Länge der Rechnung über alle Grenzen hinaus. Zur Vermeidung desselben wendet man stets eine angemessene Anzahl überschüssiger Stellen an. Wem es um die Sicherung des Resultats zu tun ist, dem wird, auch wo er sonst nur 6 Stellen nötig hat, sehr oft die Kenntniss der 7ten willkommen sein. Um also für Entfernung der 7ten Stelle aus den Tafeln, mit der sonst keine Reduction der Arbeit verbunden ist, einen Zweck zu finden, so kann sie sich nur etwa für folgenden Fall eignen. Sollen die in Arbeit genommenen Rechner eines Faches von aller Abschätzung des Restes befreit und an eine gleichmässige Vorschrift über die Stellenzahl des Rechnens gebunden werden, so kann sich gerade die Zahl 6 als die genügende erweisen. Ebenso leicht hingesprochen wie obige Behauptung ist wol auch die weitere über die bereits ausschliessliche Anwendung sechsstelliger Tafeln von Seiten aller Astronomen und Physiker.

H.

Mechanik.

Einführung in die Mechanik. Von Hermann Undeutsch, Professor an der königl. sächsischen Bergakademie zu Freiberg. Zum Gebrauch bei Vorlesungen sowie zum Selbststudium. Mit 333 in den Text eingedruckten Holzschnitten. Freiberg 1881. Craz und Gerlach. 447 S.

Laut Vorrede bietet das Buch weder ausführlich die Gebiete der analytischen noch die der sogen. technischen Mechanik, „sondern nur in einfacher, aber allgemeiner Form diejenigen Unterlagen, auf welche sich die Vorträge oder private Studien auf dem Gebiete der Mechanik stützen“. Letztere, affirmative Angabe enthält offenbar kein besonderes Merkmal, denn sie passt auf jedes Lehrbuch. Was dann ausser dem analytischen und technischen Gebiete noch den Inhalt bilden soll, bleibt hiernach rätselhaft. Sieht man die Ausführung an, so

handelt das Buch zwar von keinen technischen Gegenständen, doch deutet das Verfahren vorwiegend auf Bestimmung für Techniker hin, denen es zur allgemein theoretischen Ausbildung dienen soll. Das analytische Gebiet hingegen, und zwar in hinreichend ausführlicher Bearbeitung, umfasst es bis zu den höheren Theoremen, so dass die anfängliche Ablehnung desselben in keiner Weise zutrifft. Was daran fehlt, ist gerade die „Einführung“ in die analytische Behandlung der Probleme der Mechanik, ohne welche die Kenntniss jener Theoreme wenig Nutzen verspricht. Dass der Vortrag mit den einfachsten Specialfällen beginnt, ist bei Herleitung der analytischen Principien oft ganz zweckmässig, wofern nämlich erstere die Elemente bilden, woraus sich letztere aufbauen. Doch von einem solchen Ziele ist hier nichts zu merken; die allgemeineren Sätze folgen auf speciellere, jeder für sich hergeleitet, ohne Hinweis darauf, was jeder für das Ganze leistet, ohne Ansatz der Bedingungen einer zu untersuchenden Bewegung.

Die Einleitung entfaltet und erklärt die zur Mechanik gehörigen Begriffe. Hier findet man manche berichtigende Belehrung gegenüber ungenügender vulgärer Auffassung zwar irgendwo ausgesprochen, doch hinter dem mit viel mehr Worten bedachten Mangelhaften gar zu sehr in den Schatten gestellt und nur einseitig angewandt. Dass die Ruhe der Bewegung nicht coordinirt, sondern ein Specialfall derselben ist, dass die Mechanik es mit absoluter Ruhe und Bewegung in dem Sinne gewählter Betrachtung zu tun hat, ist freilich nicht verschwiegen, doch vermisst man schon in Betreff der letztern Aeusserung die bestimmte Aussage, dass ein anderer Sinn nicht existirt, da ein ruhender Punkt im Weltraum undefinirbar ist. In Betreff der erstern ist allerdings die Aufstellung auch fernerhin zur Richtschnur genommen, aber nicht ihre Analoga. Es werden im weitern Fortgang gerad- und krummlinige, gleichmässige und ungleichmässige Bewegung als coordinirt betrachtet, mit dem Speciellen wird begonnen, das Allgemeine aber nirgends oder nur gelegentlich vorübergehend zum Ausdruck gebracht, obgleich viele Sätze auf allgemeine Basis gestellt sind.

Unter den Theoremen, auf welche sich der Vortrag erstreckt, sind besonders zu nennen: das Princip der lebendigen Kräfte, der Flächen, der Erhaltung des Schwerpunkts, das Alembert'sche Princip u. s. w. Die Herleitung scheint unbeschränkte Voraussetzungen über die mathematische Befähigung der Hörer zu machen. Die stets daneben stehenden Figuren kommen dem Verständniss sogut als möglich zu Hülfe. Der Statik ist kein besonderer Platz im Buche eingeräumt; die Sätze derselben kommen nur einzeln vor.

H.

Grundriss der Mechanik. Von Dr. Jakob Lüroth, o. Professor der k. technischen Hochschule München. München 1881. Theodor Ackermann. 80 S.

Der Anfang des Buches zeichnet sich dadurch aus, dass er das Wesen unserer Raumbestimmungen in unverhüllter Weise, frei von der vulgären Befangenheit, obwol nur von denjenigen Seiten, wo es für die Mechanik Bedeutung hat, darlegt. Dies geschieht selten, weil die meisten Schriftsteller sich um der Popularität willen glauben an die gemeinen Vorurteile anschliessen zu müssen. Dass der Verfasser die 5 Systeme nur in historische Verbindung bringt, lässt sich als rein stylistische Auskunft betrachten; Jeder weiss, dass wir alle 5 Systeme, namentlich das skopocentrische, zu keiner Zeit entbehren können, und aus der rationalen Entwickelung ist deutlich, wie uns jedes andere zur Disposition steht — ein Standpunkt den schon Copernicus erklärtermassen einnimmt. Nun ist aber der Verfasser auch in einem andern Punkte, in weniger glücklicher Richtung, vom Gewöhnlichen abgegangen, indem er die hier sogenannte Streckenrechnung und die Anfänge der Quaternionenlehre für die Entwickelungsform der Mechanik verwendet. Er hat also das mit dieser vorgeblich neuen Methode getriebene Gaukelspiel nicht durchschaut; es ist ihm entgangen, dass sie unter fremden Namen nur dasselbe repräsentirt, wie die gewöhnliche Coordinatenmethode, sofern diese die 3 Axen durch eine willkürliche Axe ersetzt, und dass letztere den Vorteil bietet, wo es durch Eintreten unsymmetrischer Data nötig wird, ohne Formwechsel mit dreifacher Bestimmung fortfahren zu können. Die Verschiedenheit des Namens ist es aber, was den Leser in hohem Grade vexirt; er befindet sich in ähnlichem Falle, wie wenn ihm zugemutet wird, zum Verständniss eines abwechselnd deutsch und ungarisch geschriebenen Artikels sich erst mit dem Ungarischen vertraut zu machen, oder wenn im Laufe einer Rechnung die Bezeichnungen gewechselt sind. Näheres über den Lehrgang zu berichten würde wegen des genannten Umstands zwecklos sein. Die Hauptteile des Buchs sind: Die Bewegung an sich. Mechanik des materiellen Punktes. Mechanik eines beliebigen Körpers. Mechanik des festen Körpers. Mechanik eines Systems von festen Körpern. Im Anhang sind noch 2 Fragen behandelt.

H.

Vermischte Schriften.

Nieuw Archief voor Wiskunde. Deel VIII. Amsterdam 1882. Petit en Sikken.

Der Inhalt des Bandes ist folgender.

P. van Geer: Ueber die Bewegung an Bedingungen, die von der Zeit abhangen, gebundener Systeme.

P. J. Hollmann: Einige Anwendungen der Theorie der singularen Integrale auf Differentialgleichungen 2. Ordnung.

G. J. Michaelis: Ueber Bewegungen von Flüssigkeiten unter dem Einfluss der Reibung.

G. J. Legebeke: Eine Eigenschaft der Wurzeln einer abgeleiteten Gleichung.

G. J. D. Mounier: Eine besondere Eigenschaft der Quaternionen.

Ch. M. Schols: Studien über Kartenprojectionen.

Register über einige mathematische Zeitschriften, nach Gegenständen alphabetisch geordnet.

H.

Druckfehler in T. LXVII.

Seite	Zeile		statt		setze
Seite 354	Zeile 6 v. ob.	statt	a	setze	d
	11 - - / 8.7.6 v. unt.	-	i	-	1
	3 v. unt.	-	$-\int$	-	$-\frac{1}{a^2}\int$
356 -	5 v. ob.	-	$=\int$	-	$=\frac{1}{a}\int$
	7 - -	-	$-\int$	-	$\frac{1}{a}\int$
	7 v. unt.	-	$-\int$	-	$\frac{1}{a^2}\int$
	5 - -	-	k^3	-	k^2
357 -	8. 9 v. ob.	-	$\mathrm{dn}\,x$	-	$a\,\mathrm{dn}\,x$
	8 v. unt.	-	$r+2$	-	$r-2$
358 -	7 v. ob.	-	$p-4$	-	$p-1$
	8 v. unt.	-	$=\frac{1}{a}$	-	$-\frac{1}{a}$
359 -	4 - -	-	k^3	-	k^2
362 -	8 v. ob.	-	$2kb$	-	ikb

Seite		Zeile				
Seite 363	Zeile	4 v. ob.	statt	$\operatorname{cn} x b^2$	setze	$\operatorname{cn} x + b^2$
		13 - -	-	dx	-	$\operatorname{dn} x$
364	-	7 - -	-	$\sqrt{}$	-	$k_1\sqrt{}$
365	-	2. 3 v. ob.	-	c''	-	c'''
366	-	7 v. ob.	-	$-\frac{1}{2}$	-	$+\frac{1}{2}$
		1 v. unt.	-	c_2	-	$\frac{1}{2}c_2$
367	-	3 v. ob.	-	c_3	-	$\frac{1}{2}c_3$
		3 v. unt.	-	n''	-	n'''
		2 - -	-	n''	-	n_3
368	-	4 v. ob.	-	i	-	$i;$
369	-	8 v. unt.	-	$\frac{k}{k_1}$	-	$\frac{k_1}{k}$
370	-	13 v. ob.	-	m''	-	m'''
373	-	13 - -	-	vorderen	-	anderen
374	-	4 v. unt.	-	$\operatorname{dn} x$	-	$\operatorname{sn} x$
377	-	12. 13 v. ob.	-	ϱ^r	-	ϱ^p
379	-	13 v. unt.	-	K	-	$K_{(90)}$
381	-	3 v. ob.	-	$< >$	-	$< <$
382	-	5. 10 v. ob.	-	und	-	nur
386	-	6 v. unt.	-	wenn	-	von
388	-	12 v. ob.	-	ungefähr	-	ungünstiger
	·	6 v. unt.	-	$<$	-	$>$
390	-	9 v. ob.	-	$>$	-	$<$
		13 v. unt.	und fällt weg			
399	-	7 v. ob.	statt	E	setze	C
404	-	6 - -	-	C_1	-	C_r
408	-	2 v. unt.	-	41	-	71
410	-	7 v. ob.	-	r	-	ϱ
411	-	8 - -	-	$1'$	-	$15'$

Andre Fehler sind leichter zu erkennen.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

CLIX.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Abel, N. H., Oeuvres complètes. Nouv. édit., publ. p. L. Sylow et S. Lie. 2 Tomes. (Christiania). Leipzig, Teubner. 24 Mk.

Actenstücke als orient. Beil. zu d. Werke: Der Normalhöhenpunkt f. d. K. Preussen an d. K. Sternwarte zu Berlin. Berlin, Mittler & S. 60 Pf.

Fortschritte, die, der Physik im J. 1877. 33. J. Red. v. B. Schwalbe. 2. Abth. Berlin, G. Reimer. 10 Mk. 50 Pf.

Gladstone, J. H., Michael Faraday. Aut. Uebers. Glogau, Flemming. 3 Mk.

Jahrbuch üb. die Fortschritte d. Mathematik. Hrsg. v. C. Ohrtmann etc. J. 1879. 3. Hft. Berlin. G. Reimer. 6 Mk.

Zuckermann, B., Materialien zur Entwicklg. d. altjüd. Zeitrechnung im Talmud. Breslau, Preuss & J. 2 Mk.

Methode und Principien.

Brücke, E., üb. e. Consequenzen der Young-Helmholtz'schen Theorie. 2. Abhandl. Wien, Gerold's S. 50 Pf.

Crookes, W., strahlende Materie. N. Abdr. Leipzig, Quandt & H. 1 Mk. 50 Pf.

Kritik der Hypothesen, welche d. heut. Physik zu Grunde liegen, v. e. Denker. Cöln, Rommerskirchen. 40 Pf.

Scheffler, H., d. Wesen der Elektrizität etc. 2. Suppl. z. 2. Thle. d. Naturgesetze. Leipzig, Förster. 3 Mk.

Tischner, A., Sta, sol, ne moveare. II—III. Leipzig, Fock. à 80 Pf.

Turner, A., die Kraft u. Materie im Raume. 2. Afl. Frankfurt, Ch. Winter. 8 Mk.

Zöllner, F., Erklärg. d. univers. Gravitation a. d. statist. Wirkungen d. Elektricität u. die allg. Bedeutg. d. Weber'schen Gesetzes. Mit Beitr. v. W. Weber. Leipzig, Staackmann. 5 Mk.

Lehrbücher, Sammlungen und Tabellen.

Fuss, K., Sammlung v. Konstructions- u. Rechenaufg. a. d. Planim. u. Stereom. 2. Tl. Nürnberg, Korn. 1 Mk. 20 Pf.

Gauss, F. G., fünfstellige vollst. logarithm. u. trig. Tafeln. 16. Afl. Halle, Strien. 2 Mk.

Gerke, R., Aufg. aus d. darstell. Geometrie. Fol. Hannover. Schmorl & v. S. 6 Mk.

Greve, Lehrb. d, Mathematik. 2. Kursus. 2. Tl. Berlin, Stubenrauch. 1 Mk.

Handbuch der Mathematik. Hrsg. v. Schlömilch, unt. Mitw. v. Reidt & Heger. 2 Bde. Breslau, Trewendt. 39 Mk.; geb. 43 Mk. 80 Pf.

Heis, E., Sammlung v. Beisp. u. Aufg. aus d. allg. Arithmetik u. Algebra. 59. Afl. Cöln, DuMont-Schauberg. 3 Mk.

Kleyer, A., vollst. gelöste Aufg.-Sammlg. aus allen Zweigen d. Rechenkunst etc. 27—32. Heft. Stuttgart, Maier. à 25 Pf.

Matthiessen, L., Uebungsb. f. d. Unt. in d. Arithmetik u. Algebra. Cöln, DuMont-Schauberg. 2 Mk. 50 Pf.

Reidt, J., planimetr. Aufgaben. 2 Thle. Breslau, Trewendt. à 1 Mk. 50 Pf.

Stubba, A., Samml. algebr. Aufgaben. 9. Afl. bearb. v. K. Backhaus. Altenburg, Pierer. 2 Mk.

Vega's logarithm.-trigon. Handbuch. 66. Afl. Berlin, Weidmann. 4 Mk. 20 Pf.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Adam, W., Lehrb. d. Buchstabenrechnung u. Algebra. 1. Tl. 3. Afl. Berlin, Th. Hofmann. 3 Mk. 60 Pf.

Fordemann, A., geometr. Betrachtungen üb. algebr. Gleichungen. Jena, Neuenhahn. 1 Mk. 60 Pf.

Gegenbauer, L., üb. algebr. Gleichungen, welche nur reelle Wurzeln besitzen. Wien, Gerold's S. 20 Pf.

Hamilton, W. R., Elemente d. Quaternionen. Dtsch. v. P. Glan. 1. Bds. 2. Thl. (Schluss d. Bds.). Leipzig, Barth. 4 Mk.

Heuner's, J. F., Lehrg. d. Rechenunterr. m. gleichm. Berücksicht. d. Kopf- u. Zifferrechnens. 16. Afl. Ansbach, Seybold's B. 3 Mk. 60 Pf.

Lefler, F., d. Integral etc. u. seine Umkehrung. Jena, Neuenhahn. 1 Mk.

Löser, J., das Kopfrechnen in d. d. Schulen. 2. Afl. Weinheim, Ackermann. 3 Mk.; geb. 3 Mk. 50 Pf.

Lühn, O., üb. Funkt. zweier Variabeln, welche durch Hilfe d. ellipt. Funct. etc. Heidelberg, Winter. 1 Mk. 20 Pf.

Schlaefli, L., üb. d. 2 Heine'schen Kugelfunctionen etc. Bern, Huber & Co. 4 Mk.

Geometrie.

Baer, J. & G. Dreesen, d. geometr. Zeichnen. m. bes. Berücksicht. d. geometr. Ornamente. Flensburg, Westphalen. 2 Mk. 75 Pf.

Blakesley, J. H., 4 financielle Curvensysteme nach den Vega-schen Tabellen. Hannover, Helwing's S. 1 Mk.

Choura, J., Leitf. f. d. Unterricht in der darstell. Geometrie. 1. Hft. Wien, Seidel & S. 3 Mk. 60 Pf.

Heis, E., & Th. J. Eschweiler, Lehrbuch d. Geometrie zum Gebrauche an höh. Lehranst. 2. Tl. 4. Afl. Cöln, DuMont-Schauberg. 2 Mk. 80 Pf.

Hohl, A., die Lehre v. den Polyedern. N. Asg. Tübingen, Fues. 3 Mk.

— element. geom.-algebr. Uebungen. Ebd. 4 Mk.

Kantor, S., üb. d. Configuration (3, 3) m. d. Indices 8, 9 etc. Wien, Gerold's S. 60 Pf.

Mittentzweiy, L., Geometrie f. Volks- u. Fortbildungsschulen u. unt. Kl. höh. Lehranst. Ausg. B. Für d. Hand d. Schüler. 1. Hft. 3. Afl. Leipzig, Klinkhardt. 30 Pf.

Most, Th., Elementar-Geometrie f. Volks- u. Mittelschulen. 1—3. Thl. 2. Afl. Berlin, Burmester & St. 1 Mk. 50 Pf.

Naske, A., geometr. Formenlehre f. Mädchenbürgerschulen etc. 2. u. 3. Thl. Brünn, Winkler. 1 Mk. 12 Pf.

Wenck, J., die synthet. Geometrie d. Ebene. Leipzig, Winter. 4 Mk.

Weyr, E., üb. mehrstuf. Curven- u. Flächensyst. Wien, Gerold's S. 40 Pf.

Praktische Geometrie, Geodäsie.

Gehring, das Vermessungswesen in Württemberg. Stuttgart, Wittwer. 80 Pf.

Gerke, R., die Linear-Perspektive nebst Schattenconstr. Fol. Hannover, Schmorl & v. S. 2 Mk.

Mechanik.

Züge, üb. d. Bewegg. e. materiellen Punktes etc. Lingen, v. Acken. 2 Mk.

Technik.

Dietzschold, C., die Rechenmaschine. Leipzig, Schlag. 1 Mk.

Grawinkel, C., die allg. Fernsprecheinrichtungen d. d. Reichs-Post- u. Telegraphen-Verwaltung. Berlin, Springer. 2 Mk. 60 Pf.; geb. 3 Mk.

Ludolph, Leuchtfeuer u. Schallsignale d. Erde. 11. J. 3. Afl. 1. Nachtr. Bremerh., v. Vangerow. 50 Pf.

Schellen, H., die magnet.- u. dynamo-elektr. Maschinen. 2. Afl. Cöln, Du Mont-Schauberg. 16 Mk.

Weidenbach, L., Compendium d. elektr. Telegraphie. 2. Asg. Wiesbaden, Bischkopff. 11 Mk.

Weisbach's, J., Lehrb. d. Ingen.- u. Maschinen-Mechanik. 2. Afl. Bearb. v. G. Herrmann. 3. Afl. 3. Thl. 2. Abth. 13. u. 14. (Schluss-) Lfg. Braunschweig, Vieweg & S. 3 Mk. 60 Pf.

Zeitschrift, elektrotechnische. Red. v. K. E. Zetzsche. 3. J. (12. Hfte.). 1. Hft. Berlin, Springer. prcplt. 20 Mk.

Optik, Akustik und Elasticität.

Böklen, O., Abhandl. üb. d. Wellenfläche zweiaxiger Cristalle. Reutlingen, Kocher. 2 Mk.

Guichard, E., die Harmonie d. Farben. Dtsche. Ausg. m. Text v. G. Krebs. 12—16 Lfg. Fol. Frankfurt a./M., Rommel. à 4 Mk.

Häuselmann, J., popul. Farbenlehre f. d. Gebr. in Mittelsch. etc. Zürich, Orell F. & Co. 4 Mk.

Erd- und Himmelskunde.

Beobachtungen, meteorol. u. magnet., der k. Sternwarte bei München. J. 1881. München, Franz. 1 Mk.

Hilfiker, J., die astron. Längenbestimmungen m. bes. Berücks. der n. Methoden. Aarau, Sauerländer. 1 Mk. 20 Pf.

Israel, C., astron. Anwendg. e. Satzes d. sphär. Transversalenlehre. Halle, Schmidt. 50 Pf.

— üb. gleichz. Bestimmung d. Sternzeit etc. Ebd. 50 Pf.

Publikationen d. astrophysik. Observat. zu Potsdam. Nr. 8. 2. Bd. 4. Stück. Leipzig, Engelmann. 3 Mk.

Repertorium f. Meteorologie, red. v. H. Wild. 7. Bd. 2. Hft. Leipzig, Voss' Sort. 9 Mk.

Schelle, A. K., Lehrg. d. popul. Astronomie u. math. Geographie. 2. Afl. Kempten, Kösel. 1 Mk. 40 Pf.

Seeliger, H., Unters. üb. die Bewegungsverh. in den dreif. Sternsyst. ζ Cancri. Wien, Gerold's S. 4 Mk.

Sirius. Red. H. J. Klein. 15. Bd. od. N. F. 10. Bd. (12 Hfte.). 1. Hft. Leipzig, Scholtze. prcplt. 10 Mk.

Sternfreund, G., astronom. Führer pro 1882. M. e. Karte d. nördl. Sternenhimmels. München, Liter.-artist. Anstalt. 2 Mk. 40 Pf.; Karte ap. 80 Pf.

Suchsland, E., das Zodiakallicht, e. Folge d. Baues unseres Planetensystems. Stolp, Schrader. 50 Pf.

Wochenschrift f. Astronomie, Meteorol. u. Geographie. Red. v. H. J. Klein. N. F. 25. J. Nr. 1. Halle, Schmidt. prcplt. 9 Mk.

Zeitschrift d. österr. Gesellsch. f. Meteorologie. Red. v. J. Hann. 18. Bd. Nr. 1. Wien, Braumüller. prcplt. 12 Mk.

Nautik.

Zehden, F., Handb. d. terrestr. u. astron. Theiles d. Nautik. Wien, Hoelder. 7 Mk. 60 Pf.

Physik.

Brühl, J. W., d. Zusammenhang zw. d. opt. u. d. therm. Eigensch. Wien, Gerold's S. 90 Pf.

Doubrava, S., üb. Elektricität. 1. Thl. Prag, Slavik & B. 2 Mk. 20 Pf.

Hankel, W. G., elektr. Untersuchungen. 15. Abhandlg. Leipzig, Hirzel. 2 Mk.

Hildebrandt, C., üb. die stationäre Strömung in e. unendl. Ebene u. e. Kugeloberfläche. Göttingen, Akad. Buchhandlung. 1 Mk. 50 Pf.

Müller-Pouillet's Lehrb. d. Physik u. Meteorol. 8. Afl. Bearb. v. L. Pfaundler. 3. Bd. 2. (Schluss-) Abth. Braunschweig, Vieweg & S. 6 Mk.

Zwerger, M., üb. Kältemischungen u. die in denselb. verbrauchten Wärmemengen. München, Th. Ackermann. 2 Mk.

Vermischte Schriften.

Burkhardt, W., mathemat. Unterrichtsbriefe. 1. Curs. 18—23. Brief. Leipzig, Gressner & Schr. à 1 Mk.

Siemens & Halske's Katalog, A. C. u. D. Berlin, Springer. 6 Mk. 60 Pf.

Sitzungsberichte d. k. Ak. d. Wiss. Math.-naturw. Cl. 1. Abth. 84. Bd. 1. u. 2. Hft. Wien, Gerold's S. 9 Mk. 40 Pf.

— dass. 2. Abth. 84. Bd. 1. Hft. Ebd. 3 Mk. 50 Pf.

— dass. 1. Abth. 83. Bd. 5. Hft. Ebd. 4 Mk. 40 Pf.

Sitzungsberichte d. k. Ak. d. Wiss. Math.-naturw. Cl. 2. Abth. 83. Bd. 5. Hft. u. 84. Bd. 1. u. 2. Hft. Ebd. 13 Mk. 90 Pf.

— dass. 3. Abth. 84. Bd. 1. Hft. Ebd. 4 Mk. 40 Pf.

Sitzungsberichte der mathem.-physik. Cl. der k. b. Ak. d. Wissensch. zu München. 1882. 1. Hft. München, Franz. 1 Mk. 20 Pf.

Sitzungsanzeiger d. kais. Akad. d. Wissensch., mathem.-naturwiss. Cl. J. 1882. (Ca. 30 Nrn.) Nr. 1—3. Wien, Gerold's S. prcplt. 3 Mk.

Zeitschrift f. Mathematik u. Physik, hrsg. v. O. Schlömilch etc. 27. J. 1. Hft. Leipzig, Teubner. prcplt. 18 Mk.

Zeitschrift f. mathemat. u. naturw. Unterricht. Hrsg. v. J. C. V. Hoffmann. 12. J. (6 Hfte.) 1. Hft. Leipzig, Teubner. prcplt. 10 Mk. 80 Pf.

Zöllner, F., wissensch. Abhandlungen. 4. Bd. Leipzig, Staackmann. 30 Mk.

I.

Curven dritter Ordnung mit Rückkehrpunkt.

Von

Max Greiner.

Sind die Gleichungen von drei Geraden:

$$A \equiv a_0 x + a_1 y + a_2 = 0$$
$$B \equiv b_0 x + b_1 y + b_2 = 0$$
$$C \equiv c_0 x + c_1 y + c_2 = 0$$

gegeben, so stellt die Gleichung:

$$F \equiv a_{111}A^3 + a_{222}B^3 + a_{333}C^3 + a_{112}A^2B + a_{113}A^2C + a_{122}AB^2 + a_{133}AC^2 + a_{223}B^2C + a_{233}BC^2 + a_{123}ABC = 0$$

jede beliebige Curve dritter Ordnung dar; da die zehn Coefficienten $a_{\varkappa\mu\lambda}$ immer so bestimmt werden können, dass die Curve durch neun gegebene Punkte geht.

Soll die Curve dritter Ordnung K_3 im Schnittpunkte der Geraden A und B einen Doppelpunkt besitzen, so muss ihre Gleichung $F = 0$ für $A = 0$ den Factor B^2 und für $B = 0$ den Factor A^2 enthalten; was nur der Fall ist, wenn:

$$a_{333} = 0 \qquad a_{133} = 0 \qquad a_{233} = 0$$

sind. Es wird somit die Gleichung von K_3 mit einem Doppelpunkte:

$$F \equiv a_{111}A^3 + a_{222}B^3 + a_{112}A^2B + a_{122}AB^2 + C.(a_{113}A^2 + a_{123}AB + a_{223}B^2) = 0$$

wobei durch:

$$a_{113}A^2 + a_{123}AB + a_{223}B^2 = 0$$

das Tangentenpaar des Doppelpunktes dargestellt wird.

Soll nun die Gerade A Rückkehrtangente der Curve werden, so müssen:

$$a_{123} = 0 \text{ und } a_{223} = 0 \text{ sein.}$$

Da jede Curve dritter Ordnung mit Rückkehrpunkt stets einen Wendepunkt besitzt, so lässt sich annehmen, derselbe falle mit dem Schnittpunkte der Geraden B und C zusammen und C sei die Wendetangente, welche sodann mit der Curve drei aufeinander fallende Punkte gemeinsam haben müsste, so dass für $C = 0$ die Gleichung von K_3 den Factor B^3 erhalten würde, was dann der Fall ist; wenn noch:

$$a_{111} = 0 \qquad a_{112} = 0 \qquad a_{122} = 0 \quad \text{sind.}$$

Es ergibt sich somit für eine Curve dritter Ordnung, wenn die Gerade A ihre Rückkehrtangente, C die Wendetangente und B die Verbindungslinie des Rückkehr- und Wendepunktes ist, die Gleichung:

$$F \equiv A^2C - mB^3 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Jede durch den Rückkehrpunkt R gehende Gerade hat die Gleichung:

$$B - \lambda A = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

und trifft die K_3 nur noch in einem einzigen Punkte p, dessen Coordinaten A, B, C sich als 1, λ, $m\lambda^3$ ergeben, so dass jeder Punkt der Curve, abhängig von dem einzigen Parameter λ, dargestellt ist durch:

$$p \equiv 1,\ \lambda,\ m\lambda^3 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Zu jedem Punkte x_0, y_0 der Ebene gehört bezüglich der K_3 eine gerade und eine konische Polare, deren Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} P(0) &\equiv 2AA_0C_0 - 3BmB_0{}^2 + CA_0{}^2 = 0 \\ \Pi(0) &\equiv A^2C_0 - 3mB^2B_0 + 2ACA_0 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

sind, worin A_0, B_0, C_0 diejenigen Werte bedeuten, welche die auf der linken Seite des Gleichheitszeichens stehenden Ausdrücke der Gleichungen $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ annehmen, wenn statt der variablen Coordinaten x, y diejenigen des Punktes x_0, y_0 eingeführt werden. Die Gleichung der Curventangente $T(p)$ im Punkte p ist somit:

$$T(p) \equiv 2Am\lambda^3 - 3Bm\lambda^2 + C = 0 \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Jede Tangente der K_3 schneidet dieselbe noch in einem Punkte p', welcher der zu p gehörige Tangentialpunkt genannt wird, dessen Coordinaten sich aus (1) und (5) ergeben, wenn man aus beiden

Gleichungen C eliminirt, $\frac{A}{B} = u$ setzt und berücksichtigt, dass die sich ergebende Gleichung:

$$2\lambda^3 u^3 - 3\lambda^2 u^2 + 1 = 0$$

die Doppelwurzel $u = \frac{1}{\lambda}$ besitzen muss, so dass der Tangentialpunkt p' dargestellt ist durch:

$$p' \equiv -1,\ 2\lambda,\ 8m\lambda^3 \qquad (6)$$

Hieraus erkennt man, dass auch jedem Punkte p' ein und nur ein Punkt p entspricht; woraus hervorgeht, dass von einem Punkte der Curve K_3 an dieselbe nur eine Tangente gezogen werden kann.

Soll die Tangente $T(p)$ den Punkt A_0, B_0, C_0 enthalten, so muss sein:

$$2A_0 m\lambda^3 - 3B_0 m\lambda^2 + C_0 = 0$$

Die Wurzeln dieser kubischen Gleichung sind die Parameter dreier Punkte, weshalb an die Curve K_3 von einem beliebigen Punkte aus im allgemeinen drei Tangenten gezogen werden können.

Die Bedingung, dass drei Punkte der K_3 einer Geraden G von der Gleichung:

$$G \equiv \alpha A + \beta B + \gamma C = 0$$

angehören, ist:

$$\alpha + \beta\lambda + \gamma m\lambda^3 = 0 \qquad (7)$$

und da in dieser kubischen Gleichung, deren Wurzeln λ_1, λ_2, λ_3 seien, das Glied mit λ^2 fehlt, so muss zwischen den Parametern dreier Punkte der K_3, die einer Geraden angehören sollen, die Relation:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \text{ bestehen.}$$

Um zu erfahren, wie es sich mit den Tangentialpunkten dreier Curvenpunkte einer Geraden verhält, hat man nur die aus den Coordinaten (6) des Tangentialpunktes

$$\varkappa A = -1 \qquad \varkappa B = 2\lambda \qquad \varkappa C = 8m\lambda^3$$

sich ergebenden Werte für:

$$\lambda = -\frac{B}{2A} \quad \text{und} \quad m\lambda^3 = -\frac{C}{8A}$$

in Gleichung (7) einzuführen, so folgt:

$$8\alpha A - 4\beta B - \gamma C = 0$$

d. h. „Die Tangentialpunkte von drei einer Geraden angehörigen Punk-„ten der K_3 liegen ebenfalls auf einer Geraden.“

Diese durch die Gleichung:

$$G' \equiv 8\alpha A - 4\beta B - \gamma C = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

dargestellte Gerade wird die **Begleiterin der Geraden** G genannt.

Ist:

$$G \equiv (\alpha' + \mu\alpha'')A + (\beta' + \mu\beta'')B + (\gamma' + \mu\gamma'')C = 0$$

so geht G durch den Schnittpunkt zweier Geraden mit den Gleichungen:

$$\alpha' A + \beta' B + \gamma' C = 0 \quad \text{und} \quad \alpha'' A + \beta'' B + \gamma'' C = 0$$

dessen Coordinaten sind:

$$\varkappa A_0 = (\beta'\gamma'' - \beta''\gamma') \qquad \varkappa B_0 = \gamma'\alpha'' - \gamma''\alpha' \qquad \varkappa C_0 = \alpha'\beta'' - \alpha''\beta'$$

Die Begleiterin von G hat sodann die Gleichung:

$$G' \equiv -8(\alpha' + \mu\alpha'')A + 4(\beta' + \mu\beta'')B + (\gamma' + \mu\gamma'')C = 0$$

und geht somit durch den Schnittpunkt der Geraden:

$$-8\alpha' A + 4\beta' B + \gamma' C = 0 \qquad -8\alpha'' A + 4\beta'' B + \gamma'' C = 0$$

welcher die Coordinaten hat:

$$4(\beta'\gamma'' - \beta''\gamma'); \; -8(\gamma'\alpha'' - \gamma''\alpha'); \; -32(\alpha'\beta'' - \alpha''\beta') \equiv -A_0; \; 2B_0; \; 8C_0$$

Es ergibt sich somit:

„Dreht sich eine Gerade G um einen festen Punkt $q \equiv A_0, B_0, C_0$, „so dreht sich ihre Begleiterin ebenfalls um einen Punkt $q' \equiv -A_0$, „$2B_0$, $8C_0$." . . . . (9)

Die Punkte q und q' heissen **conjugirte Punkte**.

Ist q ein Punkt der Curve K_3, so ist q' sein Tangentialpunkt; dem Wendepunkte W, wofür $B_0 = C_0 = 0$ ist, entspricht als conjugirter Punkt ebenfalls W; ebenso haben sowohl der Rückkehrpunkt R, als auch der Schnittpunkt S von Wende- und Rückkehrtangente sich selbst zu conjugirten Punkten.

Der Schnittpunkt einer beliebigen Geraden G mit ihrer Begleiterin G' heisst der **begleitende Punkt**. Da nun jeder durch q gehenden Geraden G eine bestimmte durch q' gehende Begleiterin G' und umgekehrt entspricht, so sind die beiden Strahlenbüschel q und q' projectivisch und erzeugen somit einen Kegelschnitt, der die sämmtlichen begleitenden Punkte aller durch q gehenden Geraden enthält. Den Geraden qW, qS, qR entsprechen aber im Büschel q' die Begleiterinnen $q'W$, $q'S$, $q'R$, woraus hervorgeht, dass der Kegelschnitt der begleitenden Punkte durch die Ecken des Dreiecks ABC geht.

Diese Eigenschaft würde man auch aus seiner Gleichung:

$$BCA_0 + 3ACB_0 - 4ABC_0 = 0 \quad \ldots \ldots \ldots (10)$$

ersehen, welche man durch Elimination der Grösse μ aus den Gleichungen:

$$G \equiv (\alpha' A + \beta' B + \gamma' C) + \mu(\alpha'' A + \beta'' B + \gamma'' C) = 0$$
$$G' \equiv (-8\alpha' A + 4\beta' B + \gamma' C) + \mu(-8\alpha'' A + 4\beta'' B + \gamma'' C) = 0$$

erhält, wobei angenommen ist, dass alle Geraden G den Punkt A_0, B_0, C_0 enthalten.

Es folgt daher:

„Dreht sich eine Gerade G um einen festen Punkt q, so beschreibt „ihr begleitender Punkt einen Kegelschnitt, der den Punkt q und seinen „conjugirten Punkt q' und ferner den Wendepunkt W, Rückkehrpunkt „R und den Schnittpunkt S der Wende- und Rückkehrtangente der „Curve K_3 enthält." . . . . (11)

Ein beliebiger Kegelschnitt ist gegeben durch die Gleichung:

$$\alpha A^2 + \beta B^2 + \gamma C^2 + aBC + bAC + cAB = 0$$

und die Bedingung, dass derselbe den Punkt p der Curve K_3 enthält ist daher:

$$\alpha + \beta\lambda^2 + \gamma m^2\lambda^6 + am\lambda^4 + bm\lambda^3 + c\lambda = 0 \quad \ldots . (12)$$

Die sechs Wurzeln λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, λ_5, λ_6 dieser Gleichung liefern die Parameter der sechs Schnittpunkte des Kegelschnittes mit der Curve K_3; weil aber in der Gleichung das Glied λ^5 fehlt, so folgt:

Liegen sechs Punkte der Curve K_3 auf einem Kegelschnitte, so besteht zwischen ihren sechs Parametern die Relation: $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6 = 0$. . . . . (13)

Um zu erfahren, wie es sich mit den sechs Tangentialpunkten p' verhält, die zu den sechs Schnittpunkten des Kegelschnittes mit K_3 gehören, hat man nur die aus den Coordinaten $\varkappa A = -1$, $\varkappa B = 2\lambda$, $\varkappa C = 8m\lambda^3$ von p' sich ergebenden Werte von:

$$\lambda = -\frac{B}{2A} \qquad m\lambda^3 = -\frac{C}{2A}$$

in (12) einzusetzen, so folgt:

$$64\alpha A^2 + 16\beta B^2 + \gamma C^2 + 4aBC - 8bAC - 32cAB = 0 \quad . \; . (14)$$

d. h. „Bestimmt man zu den Schnittpunkten eines Kegelschnittes mit „der Curve K_3 die Tangentialpunkte, so liegen dieselben wieder auf „einem Kegelschnitte."

Die geraden Polaren zweier conjugirter Punkte $q \equiv A_0, B_0, C_0$ und $q' \equiv -A_0, 2B_0, 8C_0$ bezüglich K_3 haben nach (4) die Gleichungen:

$$P(q) \equiv 2AA_0C_0 - 3BmB_0^2 + CA_0^2 = 0$$
$$P(q') \equiv 16AA_0C_0 + 12BmB_0^2 - CA_0^2 = 0$$

Die Gleichung der Begleiterin von $P(q)$ wird erhalten, wenn man in (8) für:

$$\alpha = 2A_0C_0 \qquad \beta = -3mB_0^2 \qquad \gamma = A_0^2$$

setzt, wodurch folgt:

$$P(q') = 0$$

d. h. „Die gerade Polare eines Punktes q hat die Polare des conju-„girten Punktes q' zur Begleiterin.“ . . . . (15)

Die konischen Polaren zweier conjugirter Punkte q und q' haben nach (4) die Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} \Pi(q) \equiv A^2C_0 + 2ACA_0 - 3mB^2B_0 = 0 \\ \Pi(q') \equiv 4A^2C_0 - ACA_0 - 3mB^2B_0 = 0 \end{array}\right\} \quad . . . (16)$$

Die Tangentialpunkte, welche zu den Schnittpunkten von $\Pi(q)$ mit K_3 gehören, liegen nach (14) auf einem Kegelschnitte, dessen Gleichung aus (14) erhalten wird, wenn man darin setzt:

$$\alpha = C_0 \qquad \beta = -3mB_0 \qquad \gamma = 0 \qquad a = 0 \qquad b = 2A_0 \qquad c = 0$$

wodurch folgt:

$$\Pi(q') = 0$$

d. h. „Bestimmt man zu den Schnittpunkten der Curve K_3 mit der „konischen Polare $\Pi(q)$ eines beliebigen Punktes q der Ebene die „Tangentialpunkte, so liegen dieselben auf der konischen Polare $\Pi(q')$ „des zu q conjugirten Punktes q'.“ . . . . (17)

Nun sind aber die Schnittpunkte von $\Pi(q)$ mit K_3 die Berührungspunkte der von q an die Curve K_3 laufenden Tangenten; daher folgt:

„Zieht man von einem Punkte q die drei Tangenten an K_3 und „bestimmt zu ihren Berührungspunkten die zugehörigen Tangential-„punkte, so schneiden sich die Tangenten der K_3 in diesen Punkten „in einem und demselben Punkte q', der zu q conjugirt ist.“ . (18)

Die Polare eines beliebigen Punktes $r \equiv A_1, B_1, C_1$ bezüglich des Kegelschnittes $\Pi(q)$ hat die Gleichung:

$$P_{01} \equiv A(A_1C_0 + A_0C_1) - 3mBB_0B_1 + CA_0A_1 = 0$$

Ist r der Rückkehrpunkt R, so sind $A_1 = B_1 = 0$, somit $P_{01} \equiv A = 0$; ist r der Schnittpunkt S von Wende- und Rückkehrtangente, also $A_1 = C_1 = 0$, so folgt: $P_{01} \equiv B = 0$; und fällt r mit dem Wendepunkte W zusammen, wofür $B_1 = C_1 = 0$ ist, so wird $P_{01} \equiv AC_0 + CA_0 = 0$; letztere Gerade geht also stets durch S und ist zur Verbindungslinie $Sq \equiv AC_0 - CA_0 = 0$ bezüglich A und C harmonisch. Trifft die Gerade $AC_0 + CA_0 = 0$ die Verbindungslinie $RW \equiv B$ in t, so schneidet der Kegelschnitt $\Pi(q)$, der nach Obigem durch R geht und hierin die Rückkehrtangente $RS \equiv A$ berührt, die B zum zweitenmale noch in einem Punkte u, der zu R bezüglich W und t harmonisch conjugirt ist; es ergibt sich daher:

„Die konische Polare $\Pi(q)$ eines beliebigen Punktes q bezüglich „der Curve K_3 berührt stets die Rückkehrtangente im Rückkehrpunkte „R und liegt ferner so, dass die Verbindungslinie RW von Rückkehr- „und Wendepunkt die Polare des Schnittpunktes S von Rückkehr- „und Wendetangente bezüglich $\Pi(q)$ ist. Die Polare des Wendepunktes „W bezüglich $\Pi(q)$ geht stets durch S und ist harmonisch conjugirt „zur Verbindungslinie Sq bezüglich der Wende- und Rückkehrtangente. „Von den beiden Tangenten, die von S an $\Pi(q)$ gehen, ist die eine „die Rückkehrtangente und die andere berührt $\Pi(q)$ in einem Punkte „u, der auf RW liegt.“ . . . . (19)

Aus (16) folgt:

$$\Pi(q) - \Pi(q') \equiv A(CA_0 - AC_0) = 0$$

d. h. „Die konischen Polaren zweier conjugirter Punkte q und q' be- „rühren sich im Rückkehrpunkte und schneiden sich in noch zwei „Punkten, deren Verbindungslinie stets durch den Schnittpunkt S von „Wende- und Rückkehrtangente geht und den Punkt q enthält.“ (20)

Die Gleichungen der konischen Polaren eines Curvenpunktes p und seines Tangentialpunktes p' sind:

$$\left.\begin{aligned} \Pi(p) &\equiv A^2 m\lambda^3 - 3mB^2\lambda + 2AC = 0 \\ \Pi(p') &\equiv 8A^2 m\lambda^3 - 6mB^2\lambda - 2AC = 0 \end{aligned}\right\} \quad . . . (21)$$

Die Kegelschnitte $\Pi(p)$ und $\Pi(p')$ berühren die Rückkehrtangente A in R und die Curve K_3 beziehungsweise in p und p'; $\Pi(p')$ enthält ferner auch noch den Punkt p, was man alles leicht aus den Gleichungen (21) erkennen kann; aus den Beziehungen

$$2\Pi(p) - \Pi(p') \equiv A(C - Am\lambda^3) = 0$$
$$\Pi(p) + \Pi(p') \equiv (A\lambda + B)(A\lambda - B) = 0$$

sowie auch aus (19) und (20) ergibt sich:

„Die konischen Polaren eines Curvenpunktes p und seines Tan-
„gentialpunktes p' berühren sich im Rückkehrpunkte R und schneiden
„sich in p; haben also nur noch einen Punkt s gemeinsam, der auf
„der Verbindungslinie von p mit dem Schnittpunkte S der Wende-
„und Rückkehrtangente liegt und zu p harmonisch conjugirt ist bezüg-
„lich S und des Schnittpunktes v von spS mit der Verbindungslinie B
„des Wende- und Rückkehrpunktes.“ . . . . (22)

„Die Polare des Wendepunktes W bezüglich des Kegelschnittes
„$\Pi(p)$ geht stets durch S und ist harmonisch zu Sp bezüglich der
„Wende- und Rückkehrtangente.“ . . . . (23)

Der vierte gemeinsame Punkt s der Kegelschnitte $\Pi(p)$ und $\Pi(p')$
liegt also auf den Geraden:

$$A\lambda + B = 0 \text{ und } C - Am\lambda^3 = 0$$

somit sind dessen Coordinaten:

$$\varkappa A = 1 \qquad \varkappa B = -\lambda \qquad \varkappa C = m\lambda^3$$

so dass:

$$\lambda = -\frac{B}{A} \qquad m\lambda^3 = \frac{C}{A}$$

Für drei auf einer Geraden $G \equiv \alpha A + \beta B + \gamma C = 0$ liegende
Curvenpunkte p besteht die Relation:

$$\alpha + \beta\lambda + \gamma m\lambda^3 = 0$$

so dass für die zugehörigen Punkte s folgt:

$$L \equiv \alpha A - \beta B + \gamma C = 0$$

d. h. „Liegen drei Curvenpunkte p auf einer Geraden G, so liegen
„auch die vierten gemeinsamen Punkte s der konischen Polaren der
„Punkte p und ihrer Tangentialpunkte p' auf einer Geraden L, welche
„G in einem Punkte der Verbindungslinie B von Wende- und Rück-
„kehrpunkt schneidet; ferner trifft L die Wende- und Rückkehrtangente
„WS und RS in Punkten, die zu den Schnittpunkten mit G bezüglich
„W, S und R, S harmonisch conjugirt sind.“ . . . . (24)

Ist G die unendlich ferne Gerade, so folgt:

„Die vierten gemeinsamen Punkte s der konischen Polaren je eines
„unendlich fernen Punktes der Curve K_3 und seines zugehörigen Tan-
„gentialpunktes liegen auf einer Geraden, welche durch die Mitten
„der Wende- und Rückkehrtangenten WS und RS geht und somit zu
„RW parallel ist.“ . . . . (25)

Durch Elimination der Grösse λ aus den Coordinaten von s folgt:

$$A^2C + mB^3 = 0$$

d. h. „Alle vierten gemeinsamen Punkte s der konischen Polaren je „eines Curvenpunktes und seines Tangentialpunktes liegen auf einer „Curve derselben Art, wie K_3.“ . . . . (26)

Schneidet eine Gerade $G \equiv \alpha A + \beta B + \gamma C = 0$ die Seiten $A \equiv RS$, $B \equiv RW$, $C \equiv SW$ des Fundamentaldreiecks in den Punkten a, b, c, während ihre Begleiterin $G' \equiv -8\alpha A + 4\beta B + \gamma C = 0$ dieselben in a', b', c' trifft; so hat man für diese Schnittpunkte die Coordinaten:

$$\begin{array}{llll} a \equiv 0, \ \gamma, \ -\beta & \qquad & a' \equiv 0, \ \gamma, \ -4\beta \\ b \equiv \gamma, \ 0, \ -\alpha & & b' \equiv \gamma, \ 0, \ 8\alpha \\ c \equiv \beta, \ -\alpha, \ 0 & & c' \equiv \beta, \ 2\alpha, \ 0 \end{array}$$

Für die Schnittpunktepaare a, a'; b, b'; c, c' und die Eckenpaare R, S; R, W und S, W bestehen also die unveränderlichen Doppelverhältnisse:

$$(SRa'a) = 4 \qquad (WRb'b) = -8 \qquad (WSc'c) = -2 \quad . (27)$$

oder weil auch:

$$(Sa'Ra) = -3 \qquad (Wb'Rb) = 9 \qquad (Wc'Sc) = 3$$

so folgt:

$$(Wc'Sc) = -(Sa'Ra) = \tfrac{1}{3}(Wb'Rb)$$

Die Relationen (27) gestatten eine einfache Construction der zu einer gegebenen Geraden G gehörigen Begleiterin G'.

Ist G die unendlich ferne Gerade, so sind die Tangenten in ihren Schnittpunkten mit K_3 die Asymptoten der Curve, welche dieselbe ebenfalls in drei einer Geraden G'_∞ liegenden Punkten schneiden; da ferner die Verhältnisse:

$$\frac{Sa}{Ra} = \frac{Wb}{Rb} = \frac{Wc}{Sc} = 1$$

werden, so folgt:

„Die drei Asymptoten der Curve K_3 schneiden dieselbe in drei „Punkten einer Geraden G'_∞, welche die Seiten des Fundamental- „dreiecks in Punkten a', b', c' derart trifft, dass:

$$\frac{Sa'}{Ra'} = 4 \qquad \frac{Wb'}{Rb'} = -8 \qquad \frac{Wc'}{Sc'} = -2.\text{“} \quad . \ . \ . (28)$$

Hieraus ergibt sich ein einfaches Constructionsverfahren für die Gerade G'_∞.

Um zu einem gegebenen Punkte $q \equiv A_0, B_0, C_0$ seinen conjugirten Punkt $q' \equiv -A_0, 2B_0, 8C_0$ zu bestimmen, hat man nur, wie aus den Coordinaten ersichtlich ist, zu den Strahlen RS, RW, Rq des Büschels R und zu den Strahlen SR, SW, Sq des Büschels S, die Strahlen Rq' und Sq' so zu construiren, dass für beide Büschel die Doppelverhältnisse bestehen:

$$R(SWqq') = -2 \qquad S(RWqq') = -8$$

dann treffen sich die gefundenen Strahlen Rq' und Sq' im gesuchten Punkte q'.

Man kann daher auch für einen gegebenen Curvenpunkt p seinen zugehörigen Tangentialpunkt p', die Curventangenten in p und p' und die konischen Polaren beider Punkte p und p' auf folgende Weise construiren:

Man verbindet p mit R und S und bestimmt die Strahlen Rp' und Sp' so, dass die Doppelverhältnisse:

$$R(SWpp') = -2 \qquad S(RWpp') = -8$$

bestehen; so schneiden sich Rp' und Sp' im Tangentialpunkte p', und pp' ist die Curventangente in p. Bestimmt man auf Sp, welche RW in v schneidet, einen Punkt s so, dass $(spvS) = -1$, so ist s ein gemeinschaftlicher Punkt der konischen Polaren $\Pi(p)$ und $\Pi(p')$ der Punkte p und p'. Der zu Sp bezüglich SR und SW harmonisch conjugirte Strahl St trifft RW im Punkte t, und der zu R bezüglich W und t harmonisch conjugirte Punkt u ist ein Punkt des Kegelschnittes $\Pi(p)$. Somit geht die konische Polare $\Pi(p)$ des Punktes p durch die Punkte R, p, u, s und hat in den Punkten R, u und p beziehungsweise die Tangenten RS, uS und pp'. Bestimmt man auf dem Strahle Sp', der RW in v' trifft, den Punkt s' so, dass $(s'p'v'S) = -1$ und verschafft sich auf RW die Punkte t' und u', so dass $(v't'RW) = -1$ und $(Ru't'W) = -1$ ist; so sind von der konischen Polare des Tangentialpunktes p' die Punkte s, p, u', p', s' und die Tangenten RS und $u'S$ bekannt.

Sind a, b, c die Schnittpunkte einer beliebigen Curventangente, deren Gleichung

$$2Am\lambda^3 - 3Bm\lambda^2 + C = 0$$

ist, mit den Seiten A, B, C des Fundamentaldreiecks; so haben diese Schnittpunkte die Coordinaten:

$$\begin{aligned} a &\equiv 0, \quad 1, \quad 3m\lambda^2 \\ b &\equiv -1, \quad 0, \quad 2m\lambda^3 \\ c &\equiv 3, \quad 2\lambda, \quad 0 \end{aligned}$$

Sind ϱ, ω, σ die Winkel des Fundamentaldreiecks an den Ecken R, W, S desselben, so hat man die Beziehungen:

$$Ra = \frac{\alpha}{\sin\varrho} \qquad Sa = \frac{3\alpha\lambda^2}{\sin\sigma}$$

$$Rb = -\frac{\beta}{\sin\varrho} \qquad Wb = \frac{2\beta m\lambda^3}{\sin\omega}$$

$$Wc = \frac{2\gamma\lambda}{\sin\omega} \qquad Sc = \frac{3\gamma}{\sin\sigma}$$

weil die Abstände der Punkte a, b, c von den Seiten A, B, C erhalten werden, wenn man ihre Coordinaten mit gewissen Grössen α, β, γ multiplicirt; man hat nun unabhängig von diesen Grössen die Relationen:

$$\frac{Sa}{Ra} = 3m\lambda^2\frac{\sin\varrho}{\sin\sigma} \qquad \frac{Wb}{Rb} = -2m\lambda^3\frac{\sin\varrho}{\sin\omega} \qquad \frac{Wc}{Sc} = \frac{2\lambda}{3}\,\frac{\sin\sigma}{\sin\omega}$$

Da die Grössen m, σ, ϱ, ω für die betrachtete Curve K_3 von unveränderlichem Werte sind, so folgt:

„Jede beliebige Tangente der Curve K_3 schneidet die Geraden „RS, RW, WS in Punkten a, b, c stets so, dass:

$$\left.\begin{aligned}\overline{Wc}^2 : \overline{Sc}^2 &= \varkappa[Sa : Ra] \\ \overline{Wc}^3 : \overline{Sc}^3 &= \mu[Wb : Rb]\end{aligned}\right\}\text{“} \quad \ldots\ldots \quad (29)$$

Geht die Tangente durch einen gegebenen Punkt A_0, B_0, C_0, so ist:

$$2m\lambda^3 A_0 - 3m\lambda^2 B_0 + C_0 = 0$$

und setzt man hierin für:

$$3m\lambda^2 = \frac{Sa}{Ra}\cdot\frac{\sin\sigma}{\sin\varrho} \quad \text{und} \quad 2m\lambda^3 = \frac{Sa}{Ra}\cdot\frac{Wc}{Sc}\cdot\frac{\sin\omega}{\sin\varrho}$$

so folgt:

$$Sa\,.\,Wc\,.\,A_0\sin\omega + Ra\,.\,Sc\,.\,C_0\sin\varrho = Sa\,.\,Sc\,.\,B_0\sin\sigma$$

oder da A_0, B_0, C_0, ω, ϱ, σ für die sämmtlichen durch A_0, B_0, C_0 gehenden Tangenten unveränderlich sind, so hat man:

$$Sa\,.\,Sc = \varepsilon\,.\,Sa\,.\,Wc + \delta\,.\,Ra\,.\,Sc$$

Es ergibt sich nun:

„Schneiden die drei von einem beliebigen Punkte der Ebene an „die Curve K_3 gehenden Tangenten die Rückkehrtangente RS in den „Punkten a_1, a_2, a_3 und die Wendetangente WS in den Punkten c_1, „c_2, c_3, so bestehen die Relationen:

$$Sa_1 . Sc_1 = \varepsilon . Sa_1 . Wc_1 + \delta . Ra_1 . Sc_1$$
$$Sa_2 . Sc_2 = \varepsilon . Sa_2 . Wc_2 + \delta . Ra_2 . Sc_2$$
$$Sa_3 . Sc_3 = \varepsilon . Sa_3 . Wc_3 + \delta . Ra_3 . Sc_3$$

„worin ε und δ zwei constante Grössen bedeuten." . . . . . . (30)

Zwischen den 12 Abschnitten besteht also auch die Beziehung:

$$\begin{vmatrix} Sa_1 . Sc_1, & Sa_1 . Wc_1, & Ra_1 . Sc_1 \\ Sa_2 . Sc_2, & Sa_2 . Wc_2, & Ra_2 . Sc_2 \\ Sa_3 . Sc_3, & Sa_3 . Wc_3, & Ra_3 . Sc_3 \end{vmatrix} = 0$$

Die Gleichung der Normale $N(p) \equiv \alpha A + \beta B + \gamma C = 0$ eines Curvenpunktes $p \equiv 1, \lambda, m\lambda^3$ wird erhalten, wenn man erstens die Bedingung:

$$\alpha + \beta\lambda + \gamma m\lambda^3 = 0$$

aufstellt, unter welcher die Normale den Curvenpunkt p enthält, und zweitens berücksichtigt, dass die Normale $N(p)$, deren Gleichung

$$\alpha(a_0 x + a_1 y + a_2) + \beta(b_0 x + b_1 y + b_2) + \gamma(c_0 x + c_1 y + c_2) = 0$$

ist, senkrecht zur Tangente $T(p)$ sein muss, deren Gleichung ist:

$$2m\lambda^3(a_0 x + a_1 y + a_2) - 3m\lambda^2(b_0 x + b_1 y + b_2) + (c_0 x + c_1 y + c_2) = 0$$

Die Geraden $N(p)$ und $T(p)$ stehen aber senkrecht unter der Bedingung, dass

$$\frac{2a_0 m\lambda^3 - 3b_0 m\lambda^2 + c_0}{2a_1 m\lambda^3 - 3b_1 m\lambda^2 + c_1} + \frac{\alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1}{\alpha a_0 + \beta b_0 + \gamma c_0} = 0$$

ist. Setzt man nun:

$$2m\lambda^3(a_0^2 + a_1^2) - 3m\lambda^2(a_0 b_0 + a_1 b_1) + (a_0 c_0 + a_1 c_1) = u$$
$$2m\lambda^3(a_0 b_0 + a_1 b_1) - 3m\lambda^2(b_0^2 + b_1^2) + (b_0 c_0 + b_1 c_1) = v$$
$$2m\lambda^3(a_0 c_0 + a_1 c_1) - 3m\lambda^2(b_0 c_0 + b_1 c_1) + (c_0^2 + c_1^2) = w$$

so geht obige Bedingungsgleichung über in

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$$

Eliminirt man aus dieser und den Gleichungen:

$$\alpha A + \beta B + \gamma C = 0$$
$$\alpha + \beta\lambda + \gamma m\lambda^3 = 0$$

die Grössen α, β, γ, so folgt für die Normale im Curvenpunkte p die Gleichung:

$$N(p) \equiv \begin{vmatrix} A & B & C \\ u & v & w \\ 1 & \lambda & m\lambda^3 \end{vmatrix} = 0$$

Soll $N(p)$ durch den Punkt A_1, B_1, C_1 gehen, so hat man für den Parameter λ die Gleichung:

$$A_1(m\lambda^3 v - \lambda w) + B_1(w - m\lambda^3 u) + C_1(\lambda u - v) = 0$$

welche bezüglich λ von der sechsten Ordnung ist, da die Grössen u, v, w in Bezug auf λ vom dritten Grade sind; somit folgt:

„Durch einen beliebigen Punkt gehen im allgemeinen sechs Nor-
„malen der Curve.“ . . . . (31)

Für den Rückkehrpunkt ist $A_1 = B_1 = 0$, also geht obige Gleichung über in

$$\lambda u - v = 0$$

d. h. „Durch den Rückkehrpunkt gehen vier Normalen der Curve.“ (32)

Sollen die Fusspunkte der sechs durch einen Punkt gehenden Normalen auf einem Kegelschnitte liegen, so muss nach (13) in der vorigen Bedingungsgleichung für λ das Glied λ^5 fehlen, was dann der Fall ist, wenn $A_1(b_0^2 + b_1^2) - B_1(a_0 b_0 + a_1 b_1) = 0$ ist; d. h. der Ort der Punkte $A_1 B_1 C_1$ ist sodann eine durch R gehende Gerade, deren Gleichung:

$$A(b_0^2 + b_1^2) - B(a_0 b_0 + a_1 b_1) = 0$$

auch noch die Form annimmt:

$$b_1 x - b_0 y + \varkappa = 0$$

woraus ersichtlich ist, dass dieselbe zur Geraden $B = 0$ senkrecht steht; somit folgt:

„Diejenigen Punkte, durch welche sechs Curvennormalen derart
„gehen, dass ihre sechs Fusspunkte einem Kegelschnitte angehören,
„liegen auf einer durch den Rückkehrpunkt gehenden Geraden, welche
„zur Verbindungslinie des Rückkehr- und Wendepunktes senkrecht
„steht.“ . . . . (33)

II.

Beweis des Riemann'schen Satzes über algebraische Functionen.

Von

Norbert Herz.

Bekanntlich gilt für algebraische Functionen der zuerst von Riemann bewiesene Satz, dass eine algebraische Function, die ebenso verzweigt ist, wie eine gegebene Function y von x und eine endliche Anzahl von Unstetigkeiten erster Ordnung hat, sich rational durch y und x ausdrücken lässt. Den Beweis führt Riemann (Theorie der Abel-schen Functionen Art. 5. und 8. dadurch, dass er von dem Abel'schen Integrale

$$s = \beta_1 t_1 + \beta_2 t_2 \ldots + \beta_m t_m + \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \ldots + \alpha_p w_p + \text{const.}$$

das in m Punkten der Fläche unendlich wird, ausgeht, und die Constanten α, β so bestimmt, dass die Periodicitätsmoduln an sämmtlichen Querschnitten Null werden, wodurch also diese Function dann eine algebraische wird. Die Zahl der noch willkürlich bleibenden Constanten wird

$$m - p + 1$$

und da sich rationale Ausdrücke in s und z bilden lassen, welche $m - p + 1$ willkürliche Constanten enthalten, so kann durch einen solchen Ausdruck jede algebraische, wie s verzweigte Function s', die in m Punkten unendlich von der ersten Ordnung wird, dargestellt werden.

Ohne auf die Abel'schen Integrale überzugehen, kann man diesen Satz auch wie folgt beweisen *):

Sei die gegebene Function y, für welche die Riemann'sche Fläche construirt ist, durch die algebraische Gleichung definirt:

$$F(x, y) = f_0(x)y^n + f_1(x)y^{n-1} \dots f_{n-1}(x)y + f_n(x) = 0 \quad (1)$$

Die zu suchende Function muss nach einem bekannten Satze als Lösung einer algebraischen Gleichung n ten Grades in u und m ten Grades in x sich ergeben [s. Königsberger, „Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen“ I. pag. 178] also einer Gleichung von der Form

$$\Phi(x, u) = \varphi_0(x)u^n + \varphi_1(x)u^{n-1} + \dots + \varphi_{n-1}(x)u + \varphi_n(x) = 0 \quad (2)$$

Jede der Functionen $\varphi_1(x) \dots \varphi_n(x)$ hat im allgemeinen, da sie von der m ten Ordnung ist, $m+1$ Constante **). $\varphi_0(x)$ kann ebenfalls von der m ten Ordnung sein oder von einer niedrigeren μ; dann hat sie m resp. μ Constante, weil durch eine Constante stets die Gleichung 2) dividiert werden kann. Soll nun u in m gegebenen in der Endlichkeit liegenden Punkten $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m$ unendlich von der ersten Ordnung werden, so muss man $\varphi_0(x)$ von der m ten Ordnung annehmen und die m Constanten lassen sich darin so bestimmen, dass $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m$ Lösungen der Gleichung $\varphi_0(x) = 0$ sind. (Soll statt dessen u in einem Punkte α von der r ten Ordnung unendlich werden, so muss für diesen Punkt $\varphi_0(x)$ nebst den $r-1$ sten Ableitungen verschwinden). Also ist diese Function m ten Grades vollständig bestimmt. Soll hingegen nur in $\mu < m$ Punkten $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_\mu$ in der Endlichkeit unendlich werden, und in den übrigen $m - \mu$ Punkten in der Unendlichkeit, so wird $\varphi_0(x)$ von der μ ten Ordnung anzunehmen sein, und die μ Coefficienten lassen sich darin so bestimmen, dass $\varphi_0(x)$ die Lösungen $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_\mu$ hat, und ist also wieder völlig bestimmt. Die Gleichung (2) enthält also noch

$$n(m+1)$$

unbestimmte Coefficienten, für welche noch gewisse Bedingungen gegeben sein können.

Nun sollen die Verzweigungspunkte von y auch Verzweigungs-

*) Ein anderer Beweis ist von Christoffel in den Annalen der Mathematik v. Brioschi II. Serie Bd. X. gegeben.

**) Wenn dieselben von einer niedrigeren Ordnung werden, so braucht man nur die Coefficienten der höchsten Potenzen von x gleich Null zu setzen.



punkte für u sein. Zweiblättrige Verzweigungspunkte werden dort auftreten, wo

$$\frac{\partial \Phi(xu)}{\partial u} = 0 \tag{3}$$

ist, und nicht gleichzeitig $\frac{\partial \Phi(xu)}{\partial x}$ verschwindet. Setzt man also in diese Gleichung einen Wert $x = \alpha$, welcher Verzweigungspunkt für y ist, und den für dieses x aus (2) folgenden Wert von u, so muss die Gleichung (3) erfüllt werden. Dieses giebt für jeden zweiblättrigen Verzweigungspunkt eine Bedingung zwischen den Constanten von (2) und daher für w Verzweigungspunkte von y w Bedingungsgleichungen zwischen denselben *). Die beiden Gleichungen (2) und (3) werden aber noch andere Lösungen gemein haben, die aus der durch Elimination von u aus (2) und (3) folgenden Eliminationsgleichung

$$\Psi(x) = 0 \tag{4}$$

erhalten werden, welche von $2m(n-1)$ten Gerade ist. Zu jeder Lösung dieser Gleichung wird sich im Allgemeinen auch nur ein Wert von u ergeben, so dass die Anzahl der zusammen gehörigen Wertepaare x und u $2m(n-1)$ ist. Demgemäss müssen, wenn zwei oder mehrere Werte von u zusammen fallen, auch notwendig ebensoviele Werte von x zusammen fallen. Unter den einfachen Lösungen von (6) sind jedenfalls die w Verzweigungspunkte von y enthalten, da für diese die Gleichungen (2) und (3) also auch (4) nach der getroffenen Constantenbestimmung erfüllt werden müssen **). Für die übrigen $2m(n-1)-w$ Lösungen dieser Gleichung muss aber, damit die Entwickelung von u in denselben eindeutig sei, auch

$$\frac{\partial \Phi(xu)}{\partial x} = 0 \tag{5}$$

werden. Dann fallen in diesen Punkten zwei (oder mehrere) Werte von u, also auch zwei (oder mehrere) Werte von x zusammen, d. h.

---

*) Für einen $r$blättrigen Verzweigungspunkt kommen noch die Bedingungen

$$\frac{\partial^2 \Phi(xu)}{\partial u^2} = 0 \quad \ldots \quad \frac{\partial^{r-1} \Phi(xu)}{\partial u^{r-1}} = 0$$

hinzu. Es folgen also für diesen $r-1$ Bedingungen, wodurch also auch für die hier festzustellende Anzahl von Bedingungen ein $r$blättriger Verzweigungspunkt identisch ist mit $r-1$ zweiblättrigen.

**) Die w Bedingungsgleichungen hätten auch daraus erhalten werden können, dass $\Psi(x) = 0$ für die w Verzweigungspunkte von y werden muss.

diese Werte von x müssen doppelte (oder mehrfache) Lösungen von (4) sein. Setzt man nun diese $\frac{2m(n-1)-w}{2}$ verschiedenen Wertepaare von x und u in (5) ein, so ergeben sich noch ebensoviele Bedingungsgleichungen *) zwischen den Constanten von (2), so dass die Anzahl der sämmtlichen Bedingungsgleichungen jetzt

$$w+m(n-1)-\frac{w}{2}=m(n-1)+\frac{w}{2}$$

ist. Da die Anzahl der noch zu bestimmenden Constanten $n(m+1)$ gefunden war, so bleiben noch

$$n(m+1)-m(n-1)-\frac{w}{2}=n+m-\frac{w}{2}$$

Constanten willkürlich.

Nun ist $w=2(p+n)-2$, wenn die Riemann'sche Fläche $2p+1$-fach zusammenhängend ist, also die Zahl der noch willkürlichen Constanten

$$n+m-\frac{w}{2}=n+m-(p+n-1)=m-p+1$$

die linear in (2) vorkommen.

Nachdem aber dies bewiesen ist, schliesst sich hieran unverändert der Artikel 8. der „Theorie der Abel'schen Functionen" (s. Riemann's gesammelte Werke, pag. 107.).

Wien, im October 1881.

---

*) Für ein ϱfaches Wertepaar wird die Anzahl dieser Bedingungsgleichungen um $\varrho-2$ vermindert, weil die Anzahl der einzusetzenden Werte um $\varrho-2$ kleiner ist. Hingegen giebt die Bestimmung, dass in diesem Punkte ϱ Werte von x zusammenfallen, $\varrho-2$ neue Bedingungsgleichungen; es muss nämlich für diesen Punkt ausser

$$\frac{\partial\Psi(x)}{\partial x}=0$$

noch

$$\frac{\partial^2\Psi(x)}{\partial x^2}=0\ \ldots\ \frac{\partial^{\varrho-1}\Psi(x)}{\partial x^{\varrho-1}}=0$$

sein.

III.

Geometrischer Ort der Punkte, von welchen aus zwei feste Strecken unter gleichen Winkeln erscheinen.

Von

Herrn Dr. **Stammer,**

Oberlehrer an der Realschule zu Düsseldorf.

Zu Coordinatenaxen nehmen wir die beiden Geraden, auf welchen die Strecken liegen. Bezeichnet man mit ω den Coordinatenwinkel und mit p', p'' und q', q'' die Abstände der Eckpunkte der Strecken von dem Coordinaten-Anfangspunkte unter der bleibenden Voraussetzung, dass $p'' > p'$, $q'' > q'$, so ist die Gleichung des geometrischen Ortes:

$$\frac{\left(\frac{y}{x-p''} - \frac{y}{x-p'}\right)\sin\omega}{1+\left(\frac{y}{x-p''}+\frac{y}{x-p'}\right)\cos\omega + \frac{y^2}{(x-p')(x-p'')}}$$

$$= \pm \frac{\left(\frac{y-q''}{x} - \frac{y-q'}{x}\right)\sin\omega}{1+\left(\frac{y-q''}{x}+\frac{y-q'}{x}\right)\cos\omega + \frac{(y-q'')(y-q')}{x^2}}, \tag{I}$$

wo das untere oder obere Vorzeichen gilt, je nachdem der Punkt innerhalb oder ausserhalb des Coordinatenwinkels liegt. Wir unterscheiden demnach i n n e r e und ä u s s e r e Punkte *).

---

*) Es mag darauf aufmerksam gemacht werden, dass, wenn der geometrische Ort eine der Geraden, auf welchen die Strecken liegen, überschreitet, die Winkel nicht mehr gleich bleiben, sondern sich zu Rechten ergänzen.

Die Gleichung wird befriedigt durch $\sin\omega = 0$, d. h. wenn die Strecken parallel sind oder auf derselben Geraden liegen. Wir haben daher drei Hauptfälle zu unterscheiden.

A. $\omega > 0$.

Bezeichnen wir die Längen der Strecken mit $2p_1$, $2q_1$ und die Abstände ihrer Mitten vom Anfangspunkte der Coordinaten *) mit p_2, q_2, so ist also

$$\left.\begin{array}{ll} p''-p' = 2p_1 & q''-q' = 2q_1 \\ p''+p' = 2p_2 & q''+q' = 2q_2, \end{array}\right\} \qquad \text{(II)}$$

und die obige Gleichung wird:

$$(y^2+2xy\cos\omega+x^2)(p_1y\pm q_1x)-2p_1q_2y^2-2xy(p_1q_2\pm p_2q_1)\cos\omega$$
$$\mp 2p_2q_1x^2+p_1(q_2^2-q_1^2)y\pm q_1(p_2^2-p_1^2)x = 0. \qquad \text{(III)}$$

Dass diese Gleichung vom ursprünglich vierten Grade auf den dritten gesunken ist, liegt darin, dass die unendlich entfernte Gerade ebenfalls zu dem geometrischen Orte gehört.

Unsere Aufgabe soll darin bestehen, zu untersuchen, in welchem Falle der geometrische Ort eine Curve des zweiten Grades ist, unter welchen Bedingungen also die linke Seite der Gleichung desselben in zwei Factoren vom ersten und zweiten Grade zerfällt, die Gleichung mithin die Form annimmt:

$$(ay^2+2bxy+cx^2+2dy+2ex+f)(ny+mx+k) = 0 \qquad \text{(IV)}$$

Die Vergleichung der beiden Gleichungen liefert:

$$\begin{array}{ll}
an & = \varrho p_1 \\
am+2bn & = \varrho(2p_1\cos\omega\pm q_1) \\
cn+2bm & = \varrho(\pm 2q_1\cos\omega+p_1) \\
cm & = \pm\varrho q_1 \\
ak+2dn & = -2\varrho p_1q_2 \\
ck+2em & = \mp 2\varrho p_7q_1 \\
bk+dm+en & = -\varrho(p_1q_2\pm p_2q_1)\cos\omega \\
2dk+fn & = \varrho p_1(q_2^2-q_1^2) \\
2ek+fm & = \pm\varrho q_1(p_2^2-q_1^2) \\
fk & = 0
\end{array}$$

---

*) Um den unnötig langen Ausdruck zu vermeiden, soll dieser Punkt künftig nur Punkt 0 genannt werden,

Da p_1 und q_1 grösser als Null sind, so sieht man, dass, a, c, m, n nicht Null sein können. Man kann also $a = 1$, $n = p_1$ setzen, wodurch $\varrho = 1$ wird und $m = \pm \frac{q_1}{c}$.

Setzt man diese Werte in die zweite und dritte Gleichung ein und eliminirt zwischen beiden b, so kommt:

$$(c-1)(c^2p_1^2 \mp 2p_1 q_1 c \cos\omega + q_1^2) = 0.$$

Da der zweite Factor stets grösser ist als $(cp_1 - q_1)^2$, so kann er nicht verschwinden; es muss also

$$c = 1$$

sein, wodurch die zweite Gleichung liefert:

$$b = \cos\omega.$$

Substituirt man die gefundenen Werte, so erkennt man, dass die Curve des zweiten Grades ein Kreis ist, und das System der Gleichungen wird:

$$\begin{aligned} m &= \pm q_1 \\ k + 2dp_1 &= -2p_1q_2 \\ k \pm 2eq_1 &= \mp 2p_2q_1 \\ k\cos\omega \pm dq_1 + ep_1 &= -(p_1q_2 \pm p_2q_1)\cos\omega \\ 2dk + fp_1 &= p_1(q_2^2 - q_1^2) \\ 2ek \pm fq_1 &= \pm q_1(p_2^2 - p_1^2) \\ fk &= 0, \end{aligned} \qquad \text{(V)}$$

während die Gleichung des geometrischen Ortes ist:

$$(y^2 + 2xy\cos\omega + x^2 + 2dy + 2ex + f)(p_1x \pm q_1x + k) = 0 \qquad \text{(VI)}$$

Die letzte der Gleichungen (V) verlangt, dass entweder $k = 0$, oder $f = 0$, dass also eine der beiden Linien durch Punkt 0 gehe.

I) $k = 0$.

Die Gleichungen sind jetzt:

$$\begin{aligned} d &= -q_2 \\ e &= -p_2 \\ \mp q_1q_2 - p_1p_2 &= -(p_1q_2 \pm p_2q_1)\cos\omega \\ f &= q_2^2 - q_1^2 \\ f &= p_2^2 - p_1^2. \end{aligned}$$

Es sind hiernach die zwei Bedingungsgleichungen zu erfüllen:

$$q_2^2 - q_1^2 = p_2^2 - p_1^2; \quad \mp q_1 q_2 - p_1 p_2 = -(p_1 q_2 \pm p_2 q_1) \cos \omega$$

Die erste dieser Gleichungen lässt sich schreiben:

$$p_2^2 \left(\left(\frac{q_2}{p_2} \right)^2 - 1 \right) = p_1^2 \left(\left(\frac{q_1}{p_1} \right)^2 - 1 \right),$$

und die zweite nach Division durch $p_1 p_2$:

$$\pm \frac{q_1}{p_1} \cdot \frac{q_2}{p_2} - \frac{q_2}{p_2} \cos \omega \mp \frac{q_1}{p_1} \cos \omega + 1 = 0;$$

daraus

$$\frac{q_2}{p_2} = \frac{\pm \frac{q_1}{p_1} \cos \omega - 1}{\pm \frac{q_1}{p_1} - \cos \omega}. \tag{VII}$$

Hierdurch liefert die erste der beiden Gleichungen:

$$\left[1 - \left(\frac{q_1}{p_1} \right)^2 \right] \left[p_2^2 \sin^2 \omega + p_1^2 \left(\pm \frac{q_1}{p_1} - \cos \omega \right)^2 \right] = 0.$$

Da der zweite Factor als Summe zweier Quadrate nicht verschwinden kann, so muss

$$\left(\frac{q_1}{p_1} \right)^2 = 1, \quad \text{also} \quad \frac{q_1}{p_1} = \pm 1$$

sein. Hier kann nur das obere Vorzeichen gelten, weil der Annahme nach p_1 urd q_1 beide positiv sind. Substituirt man den Wert, in (VII), so erhält man $q_2 = \mp p_2$. Die beiden Strecken sind also gleich, und ihre Mitten sind gleichweit von 0 entfernt. Dieser Fall ist zu einfach, um weitere Bemerkungen zu bedürfen.

II. $f = 0$.

Die Gleichungen heissen jetzt:

$$\begin{aligned} k + 2dp_1 &= -\ 2p_1 q_2 \\ k \pm 2eq_1 &= \mp\ 2p_1 q_1 \\ k \cos \omega + dq_1 + ep_1 &= -\ (p_1 q_2 \pm p_2 q_1) \cos \omega \\ 2dk &= \quad p_1 (q_2^2 - q_1^2) \\ 2ek &= \pm q_1 (p_2^2 - p_1^2). \end{aligned}$$

Sie enthalten die 3 Unbekannten d, e, k, so dass also 2 Bedingungsgleichungen zwischen den 4 Grössen p und q entstehen.

Damit nicht durch Division durch eine Function dieser Grössen möglicherweise ein Fall verloren gehe, darf man nicht, wie es am einfachsten scheint, die Unbekannten aus den beiden ersten und den den beiden letzten Gleichungen bestimmen, sondern nur aus dreien. Dazu eignen sich am besten die 3 ersten, weil sie zu Gleichungen des ersten Grades führen. Man erhält aus ihnen:

$$d = -\frac{(p_1q_2 \mp p_2q_1)(p_1 \mp q_1 \cos\omega)}{p_1^2 + q_1^2 \mp 2p_1q_1 \cos\omega};$$

$$e = -\frac{(p_1q_2 \mp p_2q_1)(p_1 \cos\omega \mp q_1)}{p_1^2 + q_1^2 \mp 2p_1q_1 \cos\omega}$$

$$k = \mp 2p_1q_1 \frac{p_1p_2 \pm q_1q_2 - (p_1q_2 + p_2q_1)\cos\omega}{p_1^2 + q_1^2 \mp 2p_1q_1 \cos\omega} \qquad \text{(IX)}$$

Die gesuchten Bedingungsgleichungen erhält man durch Substitution dieser Werte in die noch unbenutzten letzten beiden Gleichungen (VIII). Man erhält indes bequemere Gleichungen, wenn man vorher einmal diese Gleichungen durch einander dividirt und das anderemal sie addirt, nachdem man die erste mit p_1 und die andere mit $\mp q_1$ multiplicirt hat. Bedenkt man, dass $p_1^2 + q_1^2 \mp 2q_1p_1 \cos\omega$ stets grösser als Null, und man demnach dadurch dividiren darf, so bekommt man

$$\pm q_1(p_1 \mp q_1 \cos\omega)(p_2^2 - p_1^2) = p_1(p_1 \cos\omega \mp q_1)(q_2^2 - q_1^2) \qquad \text{(X)}$$

$$(p_1q_2 \mp p_2q_1)[\pm 4p_1q_1(p_1p_2 \pm q_1q_2 - (p_1q_2 \pm p_2q_1)\cos\omega)$$
$$- (p_1q_2 \pm p_2q_1)(p_1^2 + q_1^2 \mp 2p_1q_1 \cos\omega)] = 0$$

Die zweite dieser Gleichungen wird befriedigt, indem man einen der beiden Factoren der Null gleich setzt.

a) Es sei zuerst

$$p_1q_2 \mp p_2q_1 = 0 \qquad \text{(XI)}$$

Dadurch wird die erste Gleichung zu

$$(p_2^2 - p_1^2)(p_1^2 + q_1^2 \mp 2p_1q_1 \cos\omega) = 0.$$

Da, wie schon bemerkt, der zweite Factor nicht Null werden kann, so muss sein

$$p_2 = \pm p_1$$

mithin auch

$$q_2 = \pm q_1.$$

Dieser Fall besteht demnach darin, dass die beiden Strecken im Punkte 0 zusammen stossen; die gerade Linie des geometrischen Ortes ist die Verbindungslinie der beiden freien Enden der Strecken; der Kreis schrumpft wegen $d = e = 0$ in den Punkt 0 zusammen. Der Wechsel in den Vorzeichen hat weiter keine Folge, als dass an die Stelle des Winkels ω sein Nebenwinkel tritt. Innerhalb des Winkels, der von den beiden Strecken eingeschlossen wird, giebt es keine Punkte, welche der Aufgabe genügen.

b) Setzt man zweitens den zweiten Factor in der zweiten Gleichung (X) gleich Null, so lässt sich die Gleichung schreiben:

$$p_1(p_1 \mp q_1 \cos\omega)(p_1q_2 \mp 3p_2q_1) = \mp q_1(p_1\cos\omega \mp q_1)(3p_1q_2 \mp p_2q_1) \qquad \text{(XII)}$$

Verbindet man diese Gleichung mit der ersten Gleichung (X), indem man, um keine Bedingung zu verlieren, kreuzweise multiplicirt, so erhält man:

$$(p_1 \mp q_1\cos\omega)(p_1\cos\omega \mp q_1)[(p_1q_2 \mp 3p_2q_1)(q_2^2 - q_1^2)p_1^2 + (3p_1q_2 \mp p_2q_1)(p_2^2 - p_1^2)q_1^2] = 0$$

Die beiden ersten Factoren, einzeln gleich Null gesetzt, betreffen Fälle, welche, wie wir später sehen werden, in dem allgemeinern enthalten sind, so dass wir sie hier nicht zu betrachten brauchen. Es muss also der dritte Factor verschwinden. Durch einfache Umformung erhält man:

$$(p_1q_2 \mp p_2q_1)[(p_1q_2 \mp p_2q_1)^2 - 4p_1^2q_1^2] = 0.$$

Da das Verschwinden des ersten Factors schon unter a) seine Erledigung gefunden, so haben wir nur die Bedingung zu betrachten:

$$p_1q_2 \mp p_2q_2 = \mp 2p_1q_1$$

Insofern die Vorzeichen der rechten Seite von denen auf der linken Seite unabhängig sind, ersetzt diese Gleichung 4 Gleichungen, von welchen sich zwei (mit dem Vorzeichen — vor p_2q_1) auf die äussern und zwei auf die innern Punkte beziehen. Um die weiteren Entwickelungen übersichtlicher zu gestalten, empfiehlt es sich das Vorzeichen von q_1 auf beiden Seiten zugleich wechseln zu lassen, wodurch wir die beiden Doppelgleichungen erhalten:

$$\text{a}')\quad p_1q_2 \mp p_2q_1 = \mp 2p_1q_1; \qquad \text{b}')\quad p_1q_2 \mp p_2q_1 = \pm 2p_1q_1 \qquad \text{(XIII)}$$

wobei wir festsetzen, dass in jeder derselben die beiden obern und ebenso die beiden untern Vorzeichen zusammen gehören sollen. Zu jeder der beiden Gleichungen gehört als zweite Bedingung, je nach der Zweckmässigkeit entweder die Gleichung (XII) oder die erste der Gleichungen (X). Zunächst ist zu bemerken, dass jede der früher gefundenen Bedingungen $p_1 \mp q_1\cos\omega = 0$, $p_1\cos\omega \mp q_1 = 0$, durch Verbindungen mit den letztern Gleichungen zu solchen Werten von p_2 und q_2 führt, welche die Gleichungen (XIII) befriedigen, wodurch die oben aufgestellte Behauptung bewiesen ist.

Die Verbindung der ersten der Gleichungen (XIII) mit (XII) liefert:

$$\text{a}')\quad p_2 = p_1\left(1 + 2\frac{q_1^2 - p_1^2}{p_1^2 + q_1^2 \mp 2p_1q_1\cos\omega}\right),$$

$$q_2 = \pm q_1\left(-1 + 2\frac{q_1^2 - p_1^2}{p_1^2 + q_1^2 \mp 2p_1q_1\cos\omega}\right) \qquad \text{(XIV)}$$

und daraus:

$$\text{a}') \quad k = \mp 2p_1q_1 \frac{q_1^2 - p_1^2}{p_1^2 + q_1^2 \mp 2p_1q_1 \cos\omega},$$

$$d = \pm 2p_1q_1 \frac{p_1 \mp q_1 \cos\omega}{p_1^2 + q_1^2 \mp 2p_1q_1 \cos\omega},$$

$$e = \pm 2p_1q_1 \frac{p_1 \cos\omega \mp q_1}{p_1^2 + q_1^2 \mp 2p_1q_1 \cos\omega} \qquad \text{(XV)}$$

Die Gleichung b′) liefert diesslben Werte, nur mit umgekehrtem Vorzeichen.

Bedenkt man, dass der in allen Ausdrücken vorkommende Nenner nichts ist als das Quadrat der dritten Seite des Dreiecks, dessen andere Seiten p_1 und q_1 sind und den Winkel ω oder $180^0 - \omega$ einschliessen, so kann man die Ausdrücke construiren. Sie lehren uns, dass zu jedem Werte von p_1 und q_1 vier Werte von p_2 und q_2, also vier verschiedene Lagen der Strecken gehören. Versucht man anderseits p_1 und q_1 durch p_2 und q_2 auszudrücken, so gelangt man zu Gleichungen des 3ten Grades, so dass die Aufgabe auch dann immer möglich ist, wenn die Mitten der Strecken gegeben sind.

Zur weitern Behandlung der Aufgabe, namentlich zur geometrischen Deutung der analytischen Ergebnisse, ist es zweckmässig, die Grössen p', q, p'', q'', also die Lage der Endpunkte der Strecken an Stelle von p_1, q_1, p_2, q_2 wieder einzuführen. Zu dem Ende müssen aber die vier Gleichungen (XIII) getrennt behandelt werden:

$$\alpha) \quad p_1q_2 - p_2q_1 = -2p_1q_1.$$

Diese Gleichung lässt sich schreiben:

$$p_1(q_2 + q_1) - q_1(p_2 - p_1) = 0 \qquad \text{(XVI)}$$

d. h.

$$p_1q'' = q_1p' \quad \text{oder} \quad p'' - p' : q'' - q' = p' : q''.$$

Die zweite Bedingung liefert die Gl. (X), welche hiernach (und unter Berücksichtigung von $q_2^2 - q_1^2 = q'q''$; $p_2^2 - p_1^2 = p'p''$) gibt:

$$(p' - q''\cos\omega)p'' = (p'\cos\omega - q'')q'$$

oder

$$p'p'' + q'q'' - (p''q'' + p'q')\cos\omega = 0 \qquad \text{(XVI)b}$$

d. h. „die Gerade, welche von den Coordinatenaxen die Stücke p', „q'' abschneidet, steht senkrecht auf der Geraden, welche die Ab„schnitte p'', q' bestimmt.“

Die Proportion (XVI) lässt sich schreiben:

$$p''\frac{q''}{2} + q'\frac{p'}{2} = p'q'',$$

d. h. die Gleichung $p''y + q'x = p'q''$ wird befriedigt durch $y = \frac{q''}{2}$, $x = \frac{p'}{2}$, oder, mit andern Worten, die zweite der eben genannten Geraden wird durch die erste halbirt.

Verfährt man in gleicher Weise mit den übrigen drei Gleichungen (XIII), so findet man:

$$\left.\begin{array}{ll} \beta) & p''-p' : q''-q' = p' : -q'; \\ & p''(p'-q'\cos\omega) = q''(p'\cos\omega - q') \\ \gamma) & p''-p' : q''-q' = p'' : q'; \\ & p'(p''-q'\cos\omega) = q''(p''\cos\omega - q') \\ \delta) & p''-p' : q''-q' = p'' ; -q''; \\ & p'(p''-q''\cos\omega) = q'(p''\cos\omega - q'') \end{array}\right\} \quad \text{(XVII)}$$

Allgemein lässt sich hiernach die Beziehung, welche zwischen den Lagen der vier Endpunkte der beiden Strecken stattfinden muss, in folgende Worte fassen.

„Die Gerade, welche einen Endpunkt einer Strecke mit einem „Endpunkt der andern Strecke verbindet, steht senkrecht auf der „Verbindungslinie der beiden andern Endpunkte und halbirt die-„selbe.“

Insofern die Lage der Endpunkte in Bezug auf den Punkt 0 durch die Vorzeichen in den Proportionen und durch die Bedingung $p'' > p'$, $q'' > q'$ teils bestimmt wird, teils unbestimmt gelassen ist, könnte man noch weitere Fälle unterscheiden, die aber wieder zum Teil in einander übergehn, wenn man den Winkel ω mit seinem Scheitelwinkel oder einem seiner Nebenwinkel vertauscht. Alle diese Fälle kann man unter folgende zwei zusammenfassen: Entweder liegen die Endpunkte jeder der beiden Strecken auf derselben Seite des Scheitels 0, oder eine der beiden Strecken wird durch 0 geteilt. Ein dritter Fall, wo beide Strecken durch 0 geteilt wurden, ist nicht möglich, da die Bedingung $q'' > 0$, $p'' > 0$, $q' < 0$, $p' < 0$ mit jeder der vier Proportionen in Widerspruch steht.

Geometrische Construction der Strecken.

a) Gegeben P' und Q''.

1) Man verbindet P' mit Q'' und errichtet in der Mitte M von $P'Q''$ eine Senkrechte, welche die Schenkel von ω in P'' und Q' schneidet (Fall γ).

2) Man errichtet in einem beliebigen Punkte C von $P'Q''$ eine Senkrechte, welche die Schenkel in A und B schneidet, verbindet O mit der Mitte N von AB, und zieht durch den Durchschnittspunkt M dieser Verbindungslinie mit $P'Q''$ die $P''Q' \parallel AB$. (Fall α).

3) Man macht $P'P'' = P'Q''$ und zieht durch P' die $P'Q''$ senkrecht zu $P''Q''$. (Fall β).

Dass nie alle 4 Fälle zugleich bei gegebenem P' und Q'' stattfinden können, lehren die Vorzeichen in den Proportionen (XVII) und (XVII).

Der Fall δ) erfordert, dass entweder Q'' oder P' auf der andern Seite von O liege. Ist letzteres der Fall, so macht man $Q''Q' = Q''P'$ und zieht durch Q'' die $Q''P'$ senkrecht zu $P'Q$.

b) Gegeben P' und P''.

Man schlägt mit dem Radius $P'P'' = p''-p'$ Kreise um P' und P'', deren vier Durchschnittspunkte je nach der Lage von P' und P'' die Punkte Q' oder Q'' liefern. Die Aufgabe bietet 4 Lösungen, wenn $(p''-p')^2 > (p' \sin \omega)^2$; sie gibt nur 2 Lösungen, wenn nur die zweite Ungleichheit, aber nicht auch die erste stattfindet; sie lässt endlich keine Lösung zu, wenn die zweite Ungleichheit nicht erfüllt wird. Dieses Ergebniss wird auch auf analytischem Wege bestätigt, wenn man aus den beiden zu jedem der vier Fälle gehörigen Bedingungsgleichungen nach Elimination von q'' den Wert von q' bestimmt. Wenn z. B. p' und p'' positiv sind, also die Strecke $P'P''$ ganz auf einer Seite von O liegt, und $p''-p' > p'' \sin \omega$, so liefert der um P'' beschriebene Bogen zwei Punkte Q'', während Q' auf der Halbirungslinie von Wkl. $Q''P''P'$ liegt (Fall α); der Bogen um P' bestimmt einen Punkt Q'' (Fall β) und einen Punkt Q' (Fall α); so dass wir hier den Fall γ zweimal und die Fälle β und α je einmal erhalten. Dass unter der Voraussetzung der Fall δ nicht statt finden kann, lässt sich folgendermassen beweisen: Da hier $p'' => 0$, so erfordert die Proportion für δ (XVII), dass $q'' < 0$, mithin auch $q' < 0$. Eliminirt man q' zwischen den zwei Bedingungen, so erhält man:

$$p'(p''^2 + q''^2 - 2p''q'' \cos \omega) = 2p''q''(p'' \cos \omega - q'').$$

Nach der Voraussetzung ist die rechte Seite der Gleichung negativ, während der Coefficient von p' positiv ist, so dass p' **negativ** sein muss. Hiermit ist bewiesen, dass im Falle δ die eine Strecke ganz auf der Verlängerung des Schenkels des Winkels ω liegt, und die andere durch O geteilt wird.

c) Gegeben P' und Q'.

1) Man macht $P'P'' = P'Q'$ und halbirt Wkl. $P''P'Q'$.

2) Man macht $Q'Q'' = Q'P'$ und halbirt Wkl. $P'Q'Q''$.

Hierbei können jedoch je nach der Lage der gegebenen Punkte die Punkte Q'' und P'' so zu liegen kommen, dass P'' zu P' und P' zu P'' wird u. s. w.

Noch einige andere Beziehungen mögen hier Platz finden:

1) Wegen $MQ' = MP''$ ist in dem Dreieck $OQ'P''$

$$P'P''.OQ'' = OP'.Q'Q'',$$

d. h.

$$(p''-p'):(q''-q') = p':q'' \quad \text{also (XVI).}$$

Aehnlich in den übrigen Fällen.

2) Die Bedingungsgleichung (XVIb)

$$(p'-q''\cos\omega)p'' = (p'\cos\omega - q'')q'$$

lässt sich auch schreiben

$$p'(p''-q'\cos\omega) = q''(p''\cos\omega - q').$$

Setzt man hierin für q'' seinen Wert $\frac{p'q'}{2p'-p''}$ aus der zugehörigen Proportion, so kommt:

$$(2p'-p'')(p''-q'\cos\omega) = q'(p''\cos\omega - q'),$$

und wenn man von beiden Seiten $p''(p''-q'\cos\omega)$ abzieht:

$$2(p''-p')(p''-q'\cos\omega) = p''^2+q'^2-2p''q'\cos\omega,$$

oder

$$p''-p' : \tfrac{1}{2}\sqrt{p''^2+q'^2-2p''q'\cos\omega} = \sqrt{p''^2+q'^2-2p''q'\cos\omega} : p''-q'\cos\omega.$$

Dasselbe liefert uns die Figur, wenn wir $Q'D$ senkrecht OP'' fällen: denn $P'P'':MP'' = P''Q':P'D$.

Dieses Ergebniss lässt uns unter andern die Bedeutung des oft wiederkehrenden Ausdrucks $p^2+q^2 \mp 2pq\cos\omega$ erkennen.

Geometrischer Ort.

1) Die Gerade.

Ihre Gleichung ist (VI)

$$p_1 y \pm q_1 x = -k, \quad \text{wo} \quad k = \mp 2p_1 q_1 \cdot \frac{q_1^2 - p_1^2}{p_1^2 + q_1^2 \mp 2p_1 q_1 \cos\omega}$$

Aus (XIV) folgt

$$\frac{q_1^2 - p_1^2}{p_1^2 + q_1^2 \mp 2p_1 q_1 \cos\omega} = \frac{p_2 - p_1}{2p_1};$$

mithin ist

$$k = \mp q_1 \cdot (p_2 - p_1) = \mp p' q_1;$$

daher, wenn wir uns auf den Fall *a*) beschränken, die Gleichung der Geraden

$$p_1 y + q_1 x = p' q_1.$$

Setzt man hierein aus der Gleichung (XVI) für p_1 seinen Wert $\frac{q_1 p'}{q''}$, so ist die Gerade:

$$p' y + q'' x = p' q'',$$

dies heisst, die Gerade verbindet die Punkte P', Q''.

In den andern 3 Fällen besteht die Gerade aus den Verbindungslinien

$$P'Q' \text{ für } \beta); \qquad P''Q' \text{ für } \gamma); \qquad P''Q'' \text{ für } \delta).$$

Das Ergebniss ist so einfach, dass ein Hinweis auf die Figur überflüssig erscheint. Es sei nur bemerkt, dass vorauszusehn war, dass der geometrische Ort durch zwei Endpunkte gehn muss. Da nämlich nach der Annahme $k \gtrless 0$, die Gerade mithin die Schenkel des Winkels ω schneidet, so kann das nur in den Endpunkten der Strecken geschehn, in so fern von jedem anderen Punkte des Schenkels des Winkels aus die auf demselben liegende Strecke unter dem Winkel O erscheint, während der Winkel, unter dem sie von einem ihrer Endpunkte aus gesehn wird, jede beliebige Grösse haben kann.

2. Der Kreis.

Seine Gleichung ist

$$y^2 + 2xy \cos\omega + x^2 + 2dy + 2ex = 0,$$

wo

$$d = \pm 2p_1 q_1 \frac{p_1 \mp q_1 \cos\omega}{p_1^2 + q_1^2 \mp 2p_1 q_1 \cos\omega},$$

$$e = \pm 2p_1 q_1 \frac{p_1 \cos\omega \mp q_1}{p_1^2 + q_1^2 \mp 2p_1 q_1 \cos\omega}.$$

Betrachten wir zunächst den Fall α), so erhält man, wenn man für p_1 seinen Wert aus $p_1 q'' = p' q_1$ einsetzt,

$$d = 2p'q_1 \frac{p' - q'' \cos\omega}{p'^2 + q''^2 - 2p'q'' \cos\omega}.$$

Schreibt man den Nenner $p'(p' - q''\cos\omega) - q''(p'\cos\omega - q')$ und benutzt die erste der Gleichungen (XVIb), so wird

$$d = -\frac{2q_1 p' q'}{p'' q'' - p' q'},$$

und unter Benutzung von $p_1 q'' = p' q_1$

$$d = -\frac{q'}{2}.$$

Ebenso

$$e = -\frac{p'}{2}.$$

Die Gleichung des Kreises ist daher

$$y^2 + 2xy\cos\omega + x^2 - q'y - p''x = 0;$$

d. h. Der Kreis geht durch die Punkte O, P'', Q', also durch die beiden Endpunkte der Strecken, durch welche die Gerade des geometrischen Ortes n i c h t geht.

Wiederholt man die Entwickelung für die übrigen 3 Fälle, so findet man:

β)	Gerade durch P', Q',	Kreis durch P'', Q'',
γ)	„ „ P'', Q',	„ „ P', Q'',
δ)	„ „ P'', Q'',	„ „ P', Q'.

Man hat daher allgemein den Satz:

„Die Senkrechte in der Mitte einer Dreiecksseite AC schnei-
„det von den beiden andern Seiten, von den Punkten A, C an
„gerechnet, solche Abschnitte AD, CE ab, dass der dem Dreieck um-
„schriebene Kreis der geometrische Ort der Punkte K wird, von
„welchen aus die beiden Abschnitte unter gleichen Winkeln erscheinen."

Als Folge hiervon gilt der Satz:

„Die Verbindungslinien der Teilpunkte D, E mit den Punkten
„der Peripherie des umschriebenen Kreises stehen in einem constan-
„ten Verhältnisse."

„Die Verbindungslinien EA, CD schneiden sich auf der Peripherie
„des Kreises."

B. Die Strecken sind parallel.

Nimmt man zur y Axe des schiefwinkligen Coordinatensystems die Verbindungslinie der Mitten der beiden Strecken und legt die x Axe parallel zu diesen, so ist, wenn der Coordinatenwinkel mit ω, die Strecken mit $2p$ und $2q$ und die auf der y Axe gemessenen Abstände der Strecken vom Anfangspunkt der Coordinaten mit b_1, b_2 bezeichnet werden,

$$\frac{\left(\frac{y-b_1}{x-p}-\frac{y-b_1}{x+p}\right)\sin\omega}{1+\left(\frac{y-b_1}{x-p}+\frac{y-b_1}{x+p}\right)\cos\omega+\frac{(y-b_1)^2}{x^2-p^2}}=\pm\frac{\left(\frac{y-b_2}{x-q}-\frac{y-b_2}{x+q}\right)\sin\omega}{1+\left(\frac{y-b_2}{x-q}+\frac{y-b_2}{x+q}\right)\cos\omega+\frac{(y-b_2)^2}{x^2-q^2}}$$

oder

$$\begin{aligned}(y^2+x^2+2xy\cos\omega)y(p\mp q)-y^2(b_1p\mp b_2q+2b_2p\mp 2b_1q)&\\ -x^2(b_1p\mp b_2q)+2xy(b_1+b_2)(p\mp q)\cos\omega&\qquad\text{(XIX)}\\ +y[(2b_1b_2\pm pq)(p\mp q)+b_2{}^2p\mp b_1{}^2q]&\\ -2x\cos\omega(p\mp q)b_1b_2-b_1b_2(b_2p\mp b_1q)\mp pq(b_2p\mp b_1q)=0.&\end{aligned}$$

Diese Gleichung vereinfacht sich bedeutend, wenn wir den Anfangspunkt der Coordinaten auf den Aehnlichkeitspunkt der beiden Strecken legen und zwar auf den äussern oder innern, je nachdem der geometrische Ort für die äussern oder die innern Punkte gesucht wird, also je nachdem in der Gleichung das obere oder das untere Vorzeichen gelten soll. Diese Bestimmung ist stets ausführbar mit Ausnahme des Falles, wo bei gleichen Strecken die äussern Punkte gesucht werden, weil dann der äussere Aehnlichkeitspunkt ins Unendliche rückt. Sehen wir von diesem Falle vorläufig ab, so ist $b_1q=\pm b_2p$, also die Gleichung der Curve

$$\begin{aligned}&(y^2+x^2+2xy\cos\omega)y(p\mp q)-y^2(b_1p\mp b_2q)\\ &-x^2(b_1p\mp b_2q)+2xy(b_1+b_2)(p\mp q)\cos\omega\\ &+y[(2b_1b_2\pm pq)(p\mp q)+b_2p(b_2-b_1)]+2x\cos\omega\,.\,b_1b_2(p\mp q)=0.\end{aligned}$$

Führt man noch den Abstand $2h$ der Mitten der Strecken, also $2h=b_2-b_1$ ein, so ist

$$b_1=\frac{2ph}{p\mp q},\quad b_2=\frac{\pm 2qh}{p\mp q}$$

und die Gleichung wird

$$\begin{aligned}(y^2+x^2+2xy\cos\omega)[y(p\mp q)^2-2h(p^2-q^2)]\pm pqy[4h^2+(p\mp q)^2]&\\ \pm 8pqh^2x\cos\omega=0&\qquad\text{(XX)}\end{aligned}$$

Vergleicht man diese Gleichung mit

$$(ay^2 + 2bxy\cos\omega + cx^2 + 2dy + 2ex + f)(ny + mx + k) = 0$$

oder

$$(ay^2 + 2xy\cos\omega + cx^2)(ny + mx + k) + 2dny^2 + 2(dm + en)xy + 2emx^2$$
$$+ y(2dk + nf) + x(2ek + mf) + fk = 0,$$

so erkennt man sofort, dass

$$m = 0$$
$$a = c = 1$$
$$b = \cos\omega$$
$$k = -2h(p^2 - q^2)$$
$$n = (p \mp q)^2.$$

Da p und q positive Grössen sind, und für $p = q$ das obere Zeichen ausgeschlossen ist, so kann n nicht Null sein. Daraus folgt weiter:

$$d = e = 0,$$
$$nf = \pm pq[4h^2 + (p \mp q)^2].$$

Da hiernach f nicht Null sein kann, so verlangt die Gleichung $fk = 0$, dass

$$k = 0, \text{ also } p = q,$$
$$2ek + mf = 0 = \pm 8pqh^2\cos\omega, \text{ also } \cos\omega = 0.$$

Die Bedingung ist also, dass die Strecken gleich sind und die Verbindungslinie ihrer Mitten senkrecht auf ihnen steht. Dann ist die Gerade

$$y = 0, \text{ und der Kreis } y^2 + x^2 = h^2 + p^2,$$

ein Ergebniss, welches keiner weitern Bemerkung bedarf. Es bezieht sich natürlich nur auf die innern Punkte, weil die Bedingung $p = q$ lautet, und in diesem Falle, wie oben angegeben, das obere Vorzeichen von q keine Gültigkeit hat. Es bleibt also noch der geometrische Ort der äussern Punkte zu suchen, wenn die Strecken gleich sind.

Legt man den Anfangspunkt der Coordinaten auf den innern Aehnlichkeitspunkt, also in die Mitte der Verbindungslinie der Mitten der Strecken, so ist $b_2 = -b_1$ und die Gleichung (XIX) wird, weil jetzt das obere Zeichen gilt und $p - q = 0$,

$$y^2 - x^2 = -(p^2 - b_1^2). \qquad \text{(XXI)}$$

Sie stellt eine gleichseitige Hyperbel dar, bezogen auf ein Paar zugeordneter Durchmesser. Da sie befriedigt wird durch $y = \pm b_1$, $x = \pm p$, so geht die Hyperbel durch die 4 Endpunkte der Strecken. Die Gerade, welche zum geometrischen Orte gehört, ist ins Unendliche gerückt, indem die ursprüngliche Gleichung vom 3. auf den 2. Grad gesunken ist.

Das erlangte Ergebniss enthält den Ausdruck einer Eigenschaft der gleichseitigen Hyperbel in Bezug auf ein Paar paraller und vom Mittelpunkt gleichweit abstehender Sehnen. Um zu erkennen, ob diese Eigenschaft eine allgemeine ist, denken wir uns zwei solcher Sehnen einer gegebenen Hyperbel gezogen, und dies zu ihrer Richtung gehörige Paar zugeordneter Durchmesser construirt. Die Gleichung der Hyperbel, auf dieselben bezogen, ist:

$$y^2 - x^2 = -a'^2.$$

Sind dann b_1 und $-b_1$ die Abschnitte, welche die Sehnen auf der y Axe bestimmen, so findet man für die Länge der Sehnen

$$2p = 2\sqrt{a'^2 + b_1^2},$$

oder

$$a'^2 = p^2 - b_1^2,$$

was stets mit der Gleichung (XXI) stimmt, wenn $p > b$. Man erhält dagegen $p < b$, wenn man die Sehnen im Abstande p dem imaginären Durchmesser parallel zieht. Wir haben also den allgemein geltenden Satz gefunden:

„Je zwei parallele und in gleichen Abständen vom Mittelpunkte „gezogene Sehnen der gleichseitigen Hyperbel werden von allen „Punkten der Curve aus (welche nicht zwischen den Sehnen liegen) „unter gleichen Winkeln gesehen."

Dieser Satz entspricht offenbar dem Satze von den Peripheriewinkeln im Kreise.

Zu der Gleichung (XXI) ist noch zu bemerken, dass sie uns lehrt, dass die Strecken entweder Punkte desselben Zweiges oder verschiedener Zweige der Hyperbel verbinden, je nachdem $p \lessgtr b$. Die Axen der Hyperbel halbiren die Winkel, welche die Verbindungslinie der Mitten der Strecken mit der auf dieser Linie in ihrer Mitte senkrecht stehenden Geraden bildet. Wenn $b = p$, artet die Hyperbel in zwei auf einander senkrechte Gerade aus, welche die Enden der Strecken kreuzweise verbinden. Es ist dies zugleich der Grenzfall von A. II. b, wenn die beiden Schenkel des Winkels zu Parallelen werden und die Verbindungslinien der Endpunkte der Strecken sich gegenseitig halbiren. Wenn die Verbindungslinie der Mitten auf den Strecken senkrecht steht, so haben wir die schöne Beziehung, dass zugleich die innern Punkte des geometrischen Ortes auf einem Kreise und einer Geraden und die äussern Punkte auf einer gleichseitigen Hyperbel liegen.

Da ferner nach der Bedingung der Aufgabe auch Wkl. $P'MQ' = P''MQ''$ (wo M ein Punkt der Curve) und $P'Q'Q''P''$ ein Parallelogramm ist, so lässt sich der gefundene Satz auch folgendermassen aussprechen:

„Der geometrische Ort für alle Punkte, von welchen aus die „gegenüberliegenden Seiten eines Parallelogramms unter gleichen „Winkeln erscheinen, ist die gleichseitige Hyperbel, welche durch „die Ecken des Parallelogramms geht"; oder

Die gegenüberliegenden Seiten eines einer gleichseitigen Hyperbel eingeschriebenen Parallelogramms erscheinen von jedem Punkte der Hyperbel aus unter gleichen Winkeln.

C. Die Strecken liegen auf derselben Geraden.

Behält man die Bezeichnungen unter (A) bei und nimmt, da hier von innern Punkten nicht die Rede sein kann, zum Anfangspunkt der rechtwinkligen Coordinaten den äussern Aehnlichkeitspunkt der Strecken, so erhält man wegen $p_1q_2 = p_2q_1$, als Gleichung des geometrischen Ortes:

$$y[(q_1-p_1)(y^2+x^2+p_1q_1)+p_2^2q_1-p_1q_2^2] = 0.$$

Der geometrische Ort besteht also aus der Geraden $y = 0$ und dem Kreis $(y^2+x^2+p_1q_1)(q_1-p_1)+p_2^2q_1-p_1q_2^2 = 0$.

Bezeichnet man den Abstand der Mitten der Strecken mit g, so ist

$$p_2^2q_1-p_1q_2^2 = -\frac{p_1q_1g^2}{q_1-p_1};$$

und da ferner bei der Wahl unseres Coordinatensystems der Fall $q_1 = p_1$ ausgeschlossen werden muss, und man daher durch q_1-p_1 dividiren darf, so erhalten wir:

$$y^2+x^2-\frac{p_1q_1}{(q_1-p_1)^2}[g^2-(q_1-p_1)^2] = 0.$$

Der Kreis hat mithin den äussern Aehnlichkeitspunkt zum Mittelpunkt und zum Radius $\frac{1}{q_1-p_1}\sqrt{p_1q_1(g^2-(q_1-p_1)^2)}$.

Es besteht zwischen den Grössen p und q keine andere Bedingung als die, dass $g^2 > (q_1-p_1)^2$ oder, wenn wir festsetzen, dass $q_1 > p_1$, einfacher $g > q_1-p_1$. Es gilt also allgemein der Satz:

„Der geometrische Ort für alle Punkte, von welchen zwei in „einer Geraden liegende Strecken unter gleichen Winkeln erscheinen,

„ist die Gerade selbst und ein Kreis, der zum Mittelpunkt den äussern „Aehnlichkeitspunkt der Strecken hat."

Wenn der Unterschied der Längen der beiden Strecken sich verringert, so wächst der Radius, und der Mittelpunkt rückt weiter fort, bis für $q_1 = p_1$ der Radius unendlich gross, der Kreis also zu einer auf den Strecken senkrechten Geraden wird.

Dieser Satz lässt sich leicht auf elementar-geometrischem Wege beweisen. Ist nämlich M ein Punkt des geometrischen Ortes, so soll Wkl. $P'MP'' = Q'MQ''$ sein. Die Inhalte der Dreiecke $P'MP''$ und $Q'MQ''$ verhalten sich daher einerseits wie die Producte der diese Winkel einschliessenden Seiten, andrerseits wie die Grundlinien $2p_1$ und $2q_1$. Bezeichnet man die Verbindungslinien von M mit den Endpunkten der Strecken mit u_1, u_2, v_1, v_2, so hat man demnach:

$$u_1 . u_2 : v_1 . v_2 = 2p_1 : 2q_1.$$

Da aber auch Wkl. $P'MQ' = P''MQ''$, so ist ebenso

$$u_1 . v_1 : u_2 . v_2 = g + p_1 - q_1 : g - p_1 + q_1.$$

Die Multiplication der beiden Proportionen liefert:

$$u_1 : v_2 = \sqrt{p_1(g + p_1 - q_1)} : \sqrt{q_1(g - p_1 + q_1)}.$$

Da hiernach u_1 und v_2 in einem constanten Verhältnisse stehen, so ist der Ort des Punktes M ein Kreis u. s. w.

Zusammenstellung:

Bedingung.	Geometrischer Ort.
A. Die Strecken liegen auf zwei Geraden, welche sich im Punkte O schneiden und einen beliebigen Winkel ω einschliessen.	
I. Die Strecken sind gleich, und ihre Mitten haben gleiche Abstände von O.	Die Halbirungslinie des Winkels und der Kreis durch die vier Endpunkte der Strecken. — Innere oder äussere Punkte, je nachdem die Mitten der Strecken auf den Schenkeln von ω oder seines Nebenwinkels liegen.

IIa. Die Strecken sind ungleich und stossen im Punkte O zusammen.	Die Verbindungsgerade der freien Endpunkte und der Punkt O. — Nur äussere Punkte, wenn die Strecken auf den Schenkeln selbst (nicht der Verlängerung) liegen.
IIb. Die Strecken ungleich und beliebig, aber so gelegen, dass die Verbindungslinien ihrer Endpunkte auf einander senkrecht stehen und die eine derselben von der andern halbirt wird.	Die Verbindungslinie zweier Endpunkte, welche die andere halbirt, und der Kreis durch die beiden andern Endpunkte und den Punkt O. — Teils innere, teils äussere Punkte.
B. Die Strecken sind parallel; dann müssen sie gleiche Länge haben.	
I. Sie befinden sich in beliebiger gegenseitiger Lage.	Die äussern Punkte bilden eine gleichseitige Hyperbel, welche durch die Endpunkte der Strecken geht.
II. Ihre Mitten liegen senkrecht übereinander.	Für die äussern Punkte die gleichseitige Hyperbel; für die innern der Kreis durch die Endpunkte der Strecken und die Gerade, welche in der Mitte derselben zu ihnen parallel gezogen ist.
C. Die Strecken liegen in einer Geraden. Länge und gegenseitige Lage beliebig.	Die Gerade, auf der die Strecken liegen, und ein Kreis, dessen Mittelpunkt der äussere Aehnlichkeitspunkt der Strecken ist. Sind die Strecken gleich, so wird der Kreis zu einer auf den Strecken senkrechten Geraden.

Schlusswort. Wenn auch die vorliegende Untersuchung, vielleicht mit Ausnahme der beiden Sätze von dem dem Dreiecke umgeschriebenen Kreis und der gleichseitigen Hyperbel, nichts wesentlich Neues geliefert hat, so dürfte doch die Untersuchung selbst nicht ganz ohne Interesse sein und jedenfalls das Verdienst in Anspruch nehmen, auf die Beziehungen (A. II. b) der Strecken hingewiesen zu

haben, bei denen die Verbindungslinien der Endpunkte auf einander senkrecht stehen, und die daher zwei Seiten eines Deltoids bilden. Wenn ferner die elementar-geometrische Behandlung der Aufgabe zum Teil weit einfacher und rascher zum Ziele geführt haben würde, so hat die analytische Behandlungsweise den entschiedenen Vorzug, die Frage vollständiger zu erschöpfen und die Gewissheit zu bieten, dass kein möglicher Fall übersehen worden.

IV.

Infinitärer Hauptwert und approximative Entwickelung.

Von

R. Hoppe.

Ist $\lim\{f(n):\varphi(n)\} = 1$ für $n = \infty$, so folgt, dass für ein hinreichend grosses n die Werte von $f(n)$ und $\varphi(n)$ auf eine gewünschte Anzahl von Decimalstellen (von der ersten von 0 verschiedenen an gerechnet) übereinstimmen müssen. Doch kann die Annäherung eine äusserst langsame sein. Einen solchen Fall hat Schlömilch in seiner Nachschrift zu Schröder's Aufsatz: „Bestimmung des infinitären Wertes des Integrales

$$C_n = \int_0^1 (u)_n \partial u$$

Schlöm. Zschr. XXV. 106—117. — welche das Resultat ergab:

$$\lim(C_n n \log^2 n) = 1$$

ans Licht gezogen, indem er den Wert von nC_n für $n = 1000001$ auf 4 Stellen berechnete und eine bedeutende Abweichung in 2. Stelle fand. Die Erklärung des Umstandes ergiebt sich, wenn man den infinitären Hauptwert durch eine Reihe ergänzt, deren Rest von bekannter Ordnung in Bezug auf n ist.

Eine solche Entwickelung suchte ich anfangs mit Hülfe entsprechender Ergänzung des Gauss'schen Ausdrucks für $\Gamma(x)$ zu gewinnen, welcher unmittelbar den Hauptwert des $n$ten Binomialcoefficienten für $n = \infty$ enthält. Es zeigte sich nun, dass dies ein

unnützer Umweg ist. Gleichwol scheint mir die Reihe für den ∞sten Binomialcoefficienten, und noch mehr für das Product der arithmetischen Reihe, woraus sich jener zusammensetzt, wegen häufiger Anwendung für sich von Interesse zu sein. Ich will daher letztere Entwickelung vorausschicken, obgleich ich die ursprünglich beabsichtigte nachher unabhängig davon herleite.

§. 1. Infinitärer Hauptwert und approximative Entwickelung des Products der arithmetischen Reihe.

Nach dem taylorschen Satze entwickelt ergeben sich die Reihen:

$$\frac{x-b}{b}\log\frac{x-b}{e}-\frac{x}{b}\log\frac{x}{e}=-\log x$$

$$+\sum_{k=1}^{k=m}\frac{1}{k(k+1)}\left(\frac{b}{x}\right)^k+\frac{1}{(m+1)(m+2)}\left(\frac{b}{x-\lambda b}\right)^{m+1}$$

$$\log(x-b)-\log x=-\sum_{k=1}^{k=m}\frac{1}{k}\left(\frac{b}{x}\right)^k-\frac{1}{m+1}\left(\frac{b}{x-\lambda_0 b}\right)^{m+1}$$

$$\left(\frac{b}{x-b}\right)^h-\left(\frac{b}{x}\right)^h=\sum_{k=h+1}^{k=m}(k-1)_{h-1}\left(\frac{b}{x}\right)^k+(m)_{h-1}\left(\frac{b}{x-\lambda_h b}\right)^{m+1}$$

wo e die Grundzahl der nat. Logarithmen, die λ Grössen zwischen 0 und 1 bezeichnen. Multiplicirt man die zweite Gleichung mit $\frac{1}{2}$, die dritte mit A_h, setzt $h=1, 2, \ldots n$ und nimmt die Summe aller, so kann man die A so bestimmen, dass sich die Summen nach k sämmtlich heben, und es bleibt:

$$\frac{x-b}{b}\log\frac{x-b}{e}-\frac{x}{b}\log\frac{x}{e}+\frac{\log(x-b)-\log x}{2}=-\log x+R$$

wo

$$R=\frac{1}{(m+1)(m+2)}\left(\frac{b}{x-\lambda b}\right)^{m+1}-\frac{1}{2(m+1)}\left(\frac{b}{x-\lambda_0 b}\right)^{m+1}$$

$$+\sum_{h=1}^{h=m}A_h(m)_{h-1}\left(\frac{b}{x-\lambda_h b}\right)^{m+1}$$

Setzt man

$$x=a+\mu b$$

und summirt von $\mu=1$ bis $\mu=n$, so kommt:

$$\frac{a}{b}\log\frac{a}{e}-\frac{a+nb}{b}\log\frac{a+nb}{e}+\tfrac{1}{2}\log a-\tfrac{1}{2}\log(a+nb)$$

$$+\sum_{h=1}^{h=m}A_h\left\{\left(\frac{b}{a}\right)^h-\left(\frac{b}{a+nb}\right)^h\right\}=-\sum_{\mu=1}^{\mu=n}\log(a+\mu b)+\sum_{\mu=1}^{\mu=n}R$$

Die Reihe der R convergirt offenbar; wir können setzen:

$$c_1 = \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} R$$

Sei überdies

$$\log c = c_1 - \left(\frac{a}{b} + \tfrac{1}{2}\right)\log\frac{a}{e} - \sum_{h=1}^{h=m} A_h \left(\frac{b}{a}\right)^h$$

$$Q = \sum_{\mu=n+1}^{\mu=\infty} R$$

Dann hat man:

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=n} \log(a+\mu b) = \log\left\{c\left(\frac{a+nb}{e}\right)^{\frac{a}{b}+n+\frac{1}{2}}\right\}$$

$$+ \sum_{h=1}^{h=m} A_h \left(\frac{b}{a+nb}\right)^h - Q \qquad (1)$$

und zwar ist

$$Q = \sum_{\mu=n+1}^{\mu=\infty} \left\{\frac{1}{(m+1)(m+2)}\left[\frac{b}{a+(\mu-\lambda)b}\right]^{m+1} - \frac{1}{2(m+1)}\left[\frac{b}{a+(\mu-\lambda_0)b}\right]^{m+1}\right.$$

$$\left. + \sum_{h=1}^{h=m} A_h (m)_{h-1} \left[\frac{b}{a+(\mu-\lambda_h)b}\right]^{m+1}\right\}$$

Ist bzhw.

$$A'_h = A_h;\quad A''_h = 0 \text{ für } A_h \geqq 0$$

$$A'_h = 0;\quad A''_h = -A_h \text{ für } A_h < 0$$

$$Q = Q' - Q''$$

wo Q' die positiven, $-Q''$ die negativen Terme des allgemeinen Gliedes enthält, so hat Q eine untere Grenze, wo in Q' die $\lambda = 0$, in Q'' die $\lambda = 1$, eine obere bei umgekehrter Bestimmung. Setzt man, wo die $\lambda = 1$, $\mu + 1$ für μ, so kommt zu der Reihe für $\lambda = 0$ nur das Anfangsglied $\mu = n$ hinzu. Folglich ist die Reihe für $\lambda = 0$, nämlich

$$Q_0 = \sum_{\mu=n+1}^{\mu=\infty} \left\{\frac{1}{(m+1)(m+2)} - \frac{1}{2(m+1)} + \sum_{h=1}^{h=m} A_h (m)_{h-1}\right\}\left(\frac{b}{a+\mu b}\right)^{m+1}$$

beiden Grenzen gemeinsam, und man hat:

$$-\left\{\frac{1}{2(m+1)} + \sum_{h=1}^{h=m} A''_h (m)_{h-1}\right\}\left(\frac{b}{a+nb}\right)^{m+1} < Q - Q_0$$

$$< \left\{\frac{1}{(m+1)(m+2)} + \sum_{h=1}^{h=m} A'_h (m)_{h-1}\right\}\left(\frac{b}{a+nb}\right)^{m+1}$$

Die A werden bestimmt durch die Bedingung:

$$\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{2k} + \sum_{h=1}^{h=k-1} A_h (k-1)_{h-1} = 0 \tag{2}$$

Zufolge derselben ist $Q_0 = 0$.

Die Relation (2) ist eine von denjenigen, welche die bernoullischen Zahlen erfüllen, wenn man setzt:

$$A_{2h} = 0; \qquad A_{2h-1} = \frac{(-1)^{h-1} B_h}{2h(2h-1)}$$

daher ist

$$A'_{4h+1} = \frac{B_{2h+1}}{(4h+1)(4h+2)}; \quad A''_{4h-1} = \frac{B_{2h}}{4h(4h+1)}$$

Gl. (1) lässt sich nun schreiben:

$$\prod_{\mu=1}^{\mu=n} (a+\mu b) = c\left(\frac{a+nb}{e}\right)^{\frac{a}{b}+n+\frac{1}{2}} e^S \tag{3}$$

$$S = \sum_{h=1}^{h=\frac{m+1}{2}} \frac{(-1)^{h-1} B_h}{2h(2h-1)} \left(\frac{b}{a+nb}\right)^{2h-1} - Q$$

wo Q zwischen den Grenzen enthalten ist:

$$-\frac{m+2}{2} - \sum_{h=1}^{h=\frac{m+1}{4}} B_{2h}(m+2)_{4h-1} < (m+1)(m+2)\left(\frac{a+nb}{b}\right)^{m+1} Q$$

$$< 1 + \sum_{h=0}^{h=\frac{m-1}{4}} B_{2h+1}(m+2)_{4h+1} \tag{4}$$

§. 2. Bestimmung des constanten Factors.

Die Grösse R hängt ab von a, b, m, μ, daher c_1 und mit ihm c nur von a, b, m. Schreibt man demgemäss dafür $c(a, b)$ und setzt $b = 1$, und $\frac{a}{b}$ statt a, so kommt:

$$b^{-n} \prod_{\mu=1}^{\mu=n} (a+\mu b) = c\left(\frac{a}{b}, 1\right)\left(\frac{a+nb}{be}\right)^{\frac{a}{b}+n+\frac{1}{2}} e^{S'}$$

Dies verglichen mit Gl. (3) giebt:

$$c(a, b) = c\left(\frac{a}{b}, 1\right) b^{-\frac{a}{b}-\frac{1}{2}} e^{Q-Q'}$$

Ferner ist nach der Gauss'schen Gleichung

$$\frac{1}{\Gamma(a+1)} = \lim\left(n^{-a}\prod_{\mu=1}^{\mu=n}\frac{a+\mu}{\mu}\right)$$

$$= \frac{c(a,1)}{c(0,1)}\lim\left\{\left(\frac{a+n}{e}\right)^{a+n+\frac{1}{2}}\left(\frac{e}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}n^{-a}\right\}$$

$$= \frac{c(a,1)}{c(0,1)}\lim\left\{\left(1+\frac{a}{n}\right)^{a+n+\frac{1}{2}}e^{-a}\right\} = \frac{c(a,1)}{c(0,1)}$$

folglich

$$c(a,1) = \frac{c(0,1)}{\Gamma(a+1)}$$

$$c(a,b) = \frac{c(0,1)}{\Gamma\left(\frac{a}{b}+1\right)}\,b^{-\frac{a}{b}-\frac{1}{2}} \tag{5}$$

Um $c(0,1)$ zu finden, hat man nach Gl. (3) für $a = 1$, $b = 2$ und $a = 2$, $b = 2$:

$$\prod_{\mu=1}^{\mu=n}(2\mu+1) = c(1,2)\left(\frac{2n+1}{e}\right)^{n+1}e^{S_1}$$

$$\prod_{\mu=1}^{\mu=n}(2\mu+2) = c(2,2)\left(\frac{2n+2}{e}\right)^{n+2}e^{S_2}$$

Beides multiplicirt giebt mit Substitution des Wertes zur Linken:

$$\prod_{\mu=1}^{\mu=2n}(\mu+2) = c(2,1)\left(\frac{2n+2}{e}\right)^{2n+\frac{1}{2}}e^{S_3}$$

$$= c(1,2)\,c(2,2)\,\frac{(2n+1)^{n+1}(2n+2)^{n+\frac{1}{2}}}{e^{2n+\frac{1}{2}}}\,e^{S_1+S_2}$$

woraus:

$$\frac{c(2,1)}{c(1,2)\,c(2,2)} = \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^{n+1}e^{S_3-S_1-S_2}$$

Der Grenzwert für $n = \infty$ hiervon ist, da die S verschwinden,

$$= e^{-\frac{1}{2}}$$

Setzt man für die c ihre Werte (5), so kommt:

$$\frac{c(0,1)}{\Gamma(3)}\,\frac{2\Gamma(\frac{3}{2})}{c(0,1)}\,\frac{\Gamma(2).2^{\frac{3}{2}}}{c(0,1)} = e^{-\frac{1}{2}}$$

woraus:

$$c(0,1) = 2\sqrt{eR}$$

und Gl. (5) lautet nun:

$$c(a,b) = \frac{2\sqrt{e\mathrm{R}}}{\Gamma\left(\frac{a}{b}+1\right)} b^{-\frac{a}{b}-\frac{1}{2}}$$

Die gesuchte Formel wird demzufolge:

$$\prod_{\mu=1}^{\mu=n}(a+\mu b) = \frac{2\sqrt{e\mathrm{R}}\, b^{-\frac{a}{b}-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{a}{b}+1\right)} \left(\frac{a+nb}{e}\right)^{\frac{a}{b}+n+\frac{1}{2}} e^{S} \tag{6}$$

insbesondere für $a = 0$, $b = 1$:

$$n! = 2\sqrt{e\mathrm{R}}\left(\frac{n}{e}\right)^{n+\frac{1}{2}} e^{S} \tag{7}$$

$$s = \sum_{h=1}^{h=\frac{m+1}{2}} \frac{(-1)^{h-1}B_h}{2h(2h-1)n^{2h-1}} - Q$$

und um auf den Gauss'schen Ausdruck Anwendung zu machen:

$$n^{-a}\prod_{\mu=1}^{\mu=n}\frac{a+\mu}{\mu} = \frac{\left(1+\frac{a}{n}\right)^{a+n+\frac{1}{2}}}{\Gamma(a+1)} e^{\sigma-a} \tag{8}$$

$$\sigma = \sum_{h=1}^{h=\frac{m+1}{2}} \frac{(-1)^{h-1}B_h}{2h(2h-1)}\{(a+n)^{1-2h} - n^{1-2h}\} - Q$$

Ueberall bedeutet Q eine Grösse von der Ordnung n^{-m-1} ohne diese näher zu bestimmen.

Auf die ersten Glieder berechnet, wird, wenn man

$$x = \frac{b}{a+nb}$$

setzt,

$$S = \frac{1}{12}x - \frac{1}{360}x^3 + \frac{1}{1260}x^5 - \frac{1}{1680}x^7 + \dots$$

$$e^S = 1 + \frac{1}{12}x + \frac{1}{288}x^2 - \frac{139}{51840}x^3 - \frac{571}{2488320}x^4 + \frac{163879}{209018880}x^5 + \dots$$

§. 3. Recurrente Bestimmung des Integrals

$$(-1)^{n-1}K_n = \int_0^1 (u)_n \,\partial u$$

Nach Multiplication mit x^n ergiebt die Summation:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^{n-1}K_n x^n = \int_0^1 (1+x)^u \partial u = \frac{x}{\log(1+x)}$$

Hiernach stellt sich das gesuchte Integral dar als Coefficient von x^n in der Entwickelung von

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{5}x^4-\dots}$$

Multiplicirt man mit dem Nenner

$$\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{(-1)^k x^k}{k+1} = \frac{\log(1+x)}{x} \tag{9}$$

die vorige Gleichung, so erhält man:

$$\sum_{k=0}^{k=\infty}(-1)^{k-1}x^k\sum_{n=0}^{n=k}\frac{K_n}{k-n+1} = 1$$

Der constante Term ist

$$-K_0 = 1$$

nach dessen Subtraction bleibt:

$$\sum_{k=1}^{k=\infty}(-1)^{k-1}x^k\left(\sum_{n=1}^{n=k}\frac{K_n}{k-n+1}-\frac{1}{k+1}\right) = 0$$

Daher werden die K recurrent bestimmt durch

$$\sum_{n=1}^{n=k-1}\frac{K_n}{k-n} = \frac{1}{k} \tag{10}$$

Hieraus findet man für

$$n = 1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\quad 5,\quad 6,\quad 7$$

$$K_n = \frac{1}{2},\ \frac{1}{12},\ \frac{1}{24},\ \frac{19}{720},\ \frac{3}{160},\ \frac{863}{60480},\ \frac{275}{24192}$$

Eliminirt man alle einem bestimmten vorhergehenden K, so erhält man den Ausdruck:

$$(-1)^{n-1}K_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-2} & \frac{1}{n-3} & \dots & 1 \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-2} & \dots & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

§. 4. Transformation des Integrals K_n.

Man hat:

$$K_n = (-1)^{n-1}\int_0^1 (u)_n \partial u = \frac{1}{n!}\int_0^1 u(1-u)(2-u)\dots(n-1-u)\partial u$$

$$= \frac{1}{n!}\int_0^1 \frac{u\Gamma(n-u)\partial u}{\Gamma(1-u)}$$

$$= \frac{1}{2\mathrm{R}n!}\int_0^1 \Gamma(1+u)\Gamma(n-u)\sin 2\mathrm{R}u\,\partial u$$

$$= \frac{1}{2\mathrm{R}n!}\int_0^1 \partial u \sin 2\mathrm{R}u \int_0^\infty e^{-w} w^{n-u-1}\partial w \int_0^\infty e^{-v} v^u \partial v$$

oder nach Substitution von vw für v:

$$K_n = \frac{1}{2\mathrm{R}n!}\int_0^1 \partial u \sin 2\mathrm{R}u \int_0^\infty v^u \partial v \int_0^\infty e^{-(v+1)w} w^n \partial w$$

$$= \frac{1}{2\mathrm{R}}\int_0^1 \partial u \sin 2\mathrm{R}u \int_0^\infty \frac{v^u \partial v}{(v+1)^{n+1}}$$

Die Ausführung der Integration nach u ergiebt:

$$K_n = \int_0^\infty \frac{(v+1)^{-n}\partial v}{\log^2 v + 4\mathrm{R}^2} \tag{11}$$

Setzt man hier $n+1$ für n und

$$v = r^{-\frac{1}{n}} - 1$$

so kommt:

$$K_{n+1} = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{\partial r}{\log^2(r^{-\frac{1}{n}}-1)+4\mathrm{R}^2} \tag{12}$$

Dieser Ausdruck ist es, den wir bei Entwickelung der K zugrunde legen.

§. 5. Entwickelung von K_{n+1} für grosse n.

Der Logarithmus im Nenner des Ausdrucks (12) verschwindet zwar einmal innerhalb der Integralgrenzen, doch findet dies sehr nahe bei $r = 0$ statt. Für $r > n^{-\alpha}$, wo α beliebig positiv, ist er im Gegenteil stets mit n zugleich $= \infty$. Setzt man daher zur Abkürzung

$$N = \log^2(r^{-\frac{1}{n}} - 1) + 4\mathrm{R}^2$$

so convergirt die Reihe

$$\frac{1}{N} = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-1)^k (2\mathrm{R})^{2k}}{\log^{2k+2}(r^{-\frac{1}{n}} - 1)} \qquad (r > n^{-\alpha})$$

Zu fernerer Entwickelung hat man die für $x^2 < 16\mathrm{R}^2$ convergirende Reihe:

$$\log(e^x - 1) = \log x + \frac{x}{2} - \sum_{h=1}^{h=\infty} \frac{(-1)^h B_h x^{2h}}{2h(2h)!}$$

das ist für $x = \frac{1}{n}\log\frac{1}{r}$:

$$\log(r^{-\frac{1}{n}} - 1) = \log\frac{\log\frac{1}{r}}{n}(1 + \varDelta)$$

wo

$$\varDelta = \frac{\frac{1}{2n}\log\frac{1}{r}}{\log\frac{\log\frac{1}{r}}{n}} \left\{ 1 - \sum_{h=1}^{h=\infty} \frac{(-1)^h B_h}{h(2h)!} \left(\frac{\log\frac{1}{r}}{n} \right)^{2h-1} \right\} \tag{13}$$

Für $r > n^{-\alpha}$ ist $\log\frac{1}{r} < \alpha \log n$; $\frac{1}{n}\log\frac{1}{r}$ unendlichklein für $n = \infty$, a fortiori der aussenstehende Factor von $\varDelta$, und die Klammer endlich, also jedenfalls $\varDelta < 1$. Demnach kann man aufs neue entwickeln:

$$\log^{-2k-2}(r^{-\frac{1}{n}} - 1) = \left(\log\frac{\log\frac{1}{r}}{n} \right)^{-2k-2} \sum_{h=0}^{h=\infty} (-2k-2)_h \varDelta^h$$

$$\varDelta^h = \left(\frac{\frac{1}{2n}\log\frac{1}{r}}{\log\frac{\log\frac{1}{r}}{n}} \right)^h \sum_{g=0}^{g=\infty} \overset{h}{c}_g \left(\frac{\log\frac{1}{r}}{n} \right)^g$$

$$= \left(2\log\frac{\log\frac{1}{r}}{n}\right)^{-h} \sum_{g=h}^{g=\infty} c_{g-h}^{h} \left(\frac{\log\frac{1}{r}}{n}\right)^{g} \tag{14}$$

Letztere Entwickelung beruht auf der Entwickelung von Potenzen unendlicher Reihen, die nach Potenzen einer Grösse fortschreiten; das Resultat geordnet nach Potenzen derselben Grösse muss wiederum convergiren, wenn die Grenze der Convergenz der ursprünglichen Reihe nicht erreicht wird.

Führt man die gefundenen Werte ein, so kommt:

$$\frac{1}{N} = \sum_{k=0}^{k=\infty} (-1)^k (2R)^{2k} \sum_{h=0}^{h=\infty} (-2k-2)_h \left(\log\frac{\log\frac{1}{r}}{n}\right)^{-2k-h-2} \times$$

$$2^{-h} \sum_{g=h}^{g=\infty} c_{g-h}^{h} \left(\frac{\log\frac{1}{r}}{n}\right)^{h}$$

oder:

$$\frac{1}{N} = \sum_{k=0}^{k=\infty} (-1)^k (2R)^{2k} \sum_{g=0}^{g=\infty} \left(\frac{\log\frac{1}{r}}{n}\right)^{g} \sum_{h=0}^{h=g} c_{g-h}^{h} (-2k-2)_h \times$$

$$2^{-h} \left(\log\frac{\log\frac{1}{r}}{n}\right)^{-2k-h-2} \qquad (r > n^{-\alpha}) \tag{15}$$

Von jetzt an müssen wir die r auch nach oben zu begrenzen. Sei

$$n^{-\alpha} < r < 1 - n^{-\beta} \tag{16}$$

dann wird

$$\alpha \log n > \log\frac{1}{r} > -\log(1-n^{-\beta}) > n^{-\beta}$$

$$\frac{\log(\alpha\log n)}{\log n} > \frac{\log\log\frac{1}{r}}{\log n} > -\beta$$

Daher ist das Mittelglied, solange es positiv ist, unendlichklein für $n = \infty$, wenn es negativ ist, übersteigt sein absoluter Wert nicht β, bleibt mithin, wenn wir $\beta < 1$ setzen, stets < 1. Hiernach convergirt auch die Reihe:

$$\left(\log\frac{\log\frac{1}{r}}{n}\right)^{-2k-h-2} = \sum_{f=0}^{f=\infty} (-1)^{h+f} (-2k-h-2)_f \frac{\left(\log\log\frac{1}{r}\right)^{f}}{(\log n)^{2k+h+f+2}} \tag{17}$$

§. 6. Rest.

Das Integral des unbegrenzten Reihenausdrucks zwischen $r=0$ und $r=1$ giebt keine convergente Reihe; daher ist es notwendig die Entwickelung zu begrenzen und den Rest zu berechnen. Wendet man die Reihe an bis $g=\mu$ und $f=\nu$ und setzt:

$$M=\sum_{k=0}^{k=\infty}(-1)^k(2\mathrm{R})^{2k}\sum_{g=0}^{g=\mu}\left(\frac{\log\frac{1}{r}}{n}\right)^g\sum_{h=0}^{h=g}c_{g-h}(-1)^h(-2k-2)_h\times$$

$$2^{-h}\sum_{f=0}^{f=\nu}(-1)^f(-2k-2)_f\frac{\left(\log\log\frac{1}{r}\right)^f}{(\log n)^{2k+h+f+2}}$$

$$\frac{1}{N}=M+P$$

so wird

$$\int_0^1\frac{\partial r}{N}=\int_0^1 M\partial r+\int_0^1 P\partial r$$

Nach dem taylorschen Satze hat der Rest die Form:

$$P=\left(\frac{\log\frac{1}{r}}{n}\right)^{\mu+1}\left(\frac{\log\log\frac{1}{r}}{\log n}\right)^{\nu+1}Q$$

und zwar bleibt Q innerhalb endlicher, von beiden Dignanden unabhängiger Grenzen, wenn dieselben innerhalb der Grenzen der Convergenz variiren, wenn also r der Bedingung (16) genügt. Es lässt sich aber beweisen, dass dies Verhalten fortdauert, wenn r über die obere Grenze hinaus bis 1 wächst.

Zunächst haben die Reihen nach g und f lauter positive Terme. Die Reihe nach k würde nicht aufhören zu convergiren, wenn man den Factor $(-1)^k$ wegliesse, so dass überhaupt alle Terme positiv werden.

Ferner lässt sich der Rest der Reihe (17) leicht angeben: die Summe von $f=\nu+1$ bis $f=\infty$ ist nämlich

$$=(-1)^{h+\nu+1}(-2k-h-2)_{\nu+1}\frac{\left(\log\log\frac{1}{r}\right)^{\nu+1}}{\left(\log n-\lambda\log\log\frac{1}{r}\right)^{2k+h+\nu+3}}$$

wo λ eine Grösse zwischen 0 und 1 bezeichnet. Wächst hier r von

$1-n^{-\beta}$ bis 1, so wächst auch $-\log\log\frac{1}{r}$, welches beständig positiv ist, folglich nimmt der Factor Q, welcher den Zähler des Ausdrucks nicht enthält, über $r=1-n^{-\beta}$ hinaus beständig ab, und Q bleibt endlich von $r=n^{-\alpha}$ bis $r=1$.

§. 7. Integration.

Setzt man $\log\frac{1}{r}=t$, so wird

$$\int_0^1\left(\log\frac{1}{r}\right)^g\left(\log\log\frac{1}{r}\right)^f\partial r=\int_0^\infty e^{-t}t^g(\log t)^f\partial t$$

$$=\Gamma^{(f)}(g+1)$$

und, wenn (Q) einen Mittelwert von Q bezeichnet,

$$\int_{n^{-\alpha}}^1 P\partial r<(Q)\int_0^1\frac{P\partial r}{Q}=\frac{(Q)\Gamma^{(\nu+1)}(\mu+2)}{n^{\mu+1}(\log n)^{\nu+1}}$$

Dieses Teilintegral ist zu ergänzen durch

$$\int_0^{n^{-\alpha}}P\partial r=\int_0^{n^{-\alpha}}\frac{\partial r}{N}-\int_0^{n^{-\alpha}}M\partial r \tag{18}$$

Da nun $N>4R^2$, so ist

$$\int_0^{n^{-\alpha}}\frac{\partial r}{N}<\frac{n^{-\alpha}}{4R^2}$$

Ferner ist für $0<r<n^{-\alpha}$ und hinreichend grosse n

$$[\log(\alpha\log n)]^f<\left(\log\log\frac{1}{r}\right)^f<\log\frac{1}{r}<r^{-\frac{1}{2(g+1)}}$$

daher

$$\left(\log\frac{1}{r}\right)^g\left(\log\log\frac{1}{r}\right)^f<\left(\log\frac{1}{r}\right)^{g+1}<r^{-\frac{1}{2}}$$

$$\int_0^{n^{-\alpha}}\left(\log\frac{1}{r}\right)^g\left(\log\log\frac{1}{r}\right)^f\partial r<\int_0^{n^{-\alpha}}\frac{\partial r}{\sqrt{r}}=2n^{-\frac{\alpha}{2}}$$

Da nun $\int_0^{n^{-\alpha}} M\partial r$ aus einer endlichen Anzahl von Termen dieser Form mit endlichen Coefficienten besteht, so überschreitet sein Wert nie ein Constant-Vielfaches von $n^{-\frac{\alpha}{2}}$, und da α beliebig gross genommen werden kann, so folgt, dass die Grösse (18) gegen den andern Teil des Restes verschwindet und durch Addition dessen Form nicht ändert. Setzt man

$$\Theta = (Q)\Gamma^{(\nu+1)}(\mu+2)$$

so wird der Rest

$$\int_0^1 P\partial r = \frac{\Theta}{n^{\mu+1}(\log n)^{\nu+1}}$$

und die resultirende Entwickelung lautet:

$$K_{n+1} = \frac{1}{n\log^2 n}\Bigg\{\sum_{k=0}^{k=\infty}(-1)^k(2R)^{2k}\sum_{g=0}^{g=\mu} n^{-g}\sum_{h=0}^{h=g} {}^h c_{g-h} \times \tag{19}$$

$$-\tfrac{1}{2})^h(-2k-2)_h\sum_{f=0}^{f=\nu}(-1)^f(-2k-h-2)_f\frac{\Gamma^{(f)}(g+1)}{(\log n)^{2k+h+f}}+\frac{\Theta}{n^{\mu+1}(\log n)^{\nu+1}}\Bigg\}$$

wo Θ zwischen endlichen Grenzen variirt, wenn n ins unendliche wächst.

§. 8. Numerische Berechnung der Coefficienten.

Es mögen zuerst die Coefficienten c für $\mu = 4$ berechnet werden. Zur Abkürzung sei

$$x = \frac{1}{n}\log\frac{1}{r}; \quad y = \log x$$

dann lauten die Gl. (13) (14)

$$\varDelta = \frac{x}{2y}\left(1+\frac{x}{12}-\frac{x^3}{1440}+\ldots\right)$$

$$\varDelta^h = \left(\frac{x}{2y}\right)^h \sum_{g=0}^{g=\infty} {}^h c_g\, x^g$$

folglich ist

$$\sum_{g=0}^{g=\infty} {}^h c_g\, x^g = \left(1+\frac{x}{12}-\frac{x^3}{1440}+\ldots\right)^h$$

einzeln

$$\sum_{g=0}^{g=\infty} {}^0 c_g\, x^g = 1$$

$$\sum_{g=0}^{g=\infty} \overset{1}{c}_g x^g = 1 + \frac{x}{12} - \frac{x^3}{1440} + 0 . x^4 + \ldots$$

$$\sum_{g=0}^{g=\infty} \overset{2}{c}_g x^g = 1 + \frac{x}{6} + \frac{x^2}{144} - \frac{x^3}{720} - \frac{x^4}{8640} + \ldots$$

$$\sum_{g=0}^{g=\infty} \overset{3}{c}_g x^g = 1 + \frac{x}{4} + \ldots$$

woraus die für unsern Zweck genügenden Werte:

$$\overset{h}{c}_0 = 1; \quad \overset{h}{c}_1 = \frac{h}{12}; \quad \overset{0}{c}_2 = \overset{1}{c}_2 = \overset{0}{c}_3 = 0; \quad \overset{2}{c}_2 = \frac{1}{144}; \quad \overset{1}{c}_3 = -\frac{1}{1440}$$

Ferner ist, wenn man

$$\psi(x) = \frac{\Gamma' x}{\Gamma x}$$

setzt,

$$\psi(g+x) = \psi(x) + \frac{1}{x} + \frac{1}{1+x} + \ldots \frac{1}{g-1+x}$$

Lässt man nach drei successiven Differentiationen x in 1 übergehen, so erhält man:

$$\frac{\Gamma'(g+1)}{g!} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots \frac{1}{g} + \psi(1) = \psi$$

$$\frac{\Gamma''(g+1)}{g!} - \frac{\Gamma'^2(g+1)}{g!^2} = -1 - \frac{1}{4} - \ldots - \frac{1}{g^2} + \psi'(1) = \psi'$$

$$\frac{\Gamma'''(g+1)}{g!} - \frac{3\Gamma'(g+1)\Gamma''(g+1)}{g!^2} + \frac{2\Gamma'^3(g+1)}{g!^3} =$$

$$2 + \frac{2}{8} + \ldots + \frac{2}{g^3} + \psi''(1) = \psi''$$

$$\frac{\Gamma^{IV}(g+1)}{g!} - \frac{4\Gamma'(g+1)\Gamma'''(g+1)}{g!^2} - \frac{3\Gamma''^2(g+1)}{g!^2} + \frac{12\Gamma'^2(g+1)\Gamma''(g+1)}{g!^3}$$

$$- \frac{6\Gamma'^4(g+1)}{g!^4} = -6 - \frac{6}{16} - \ldots - \frac{6}{g^4} + \psi'''(1) = \psi'''$$

Ausserdem ist bekannt:

$$\psi(1) = -0{,}57721\,56649$$

$$\psi'(1) = \sum_{k=1}^{k=\infty} k^{-2} = \tfrac{2}{3}R^2$$

$$\psi''(1) = -2\sum_{k=1}^{k=\infty} k^{-3} = -2{,}40411\,38064$$

$$\psi'''(1) = 6 \sum_{k=1}^{k=\infty} k^{-4} = \tfrac{16}{15} R^4$$

Aus obigen Gleichungen geht hervor:

$$\Gamma'(g+1) = g!\,\psi$$
$$\Gamma''(g+1) = g!\,(\psi' + \psi^2)$$
$$\Gamma'''(g+1) = g!\,(\psi'' + 3\psi\psi' + \psi^3)$$
$$\Gamma^{IV}(g+1) = g!\,(\psi''' + 4\psi\psi'' + 6\psi^2\psi' + 3\psi'^2 + \psi^4)$$

Dies giebt folgende Tabelle über $\Gamma^{(f)}(g+1)$:

g	$f =$ 0	1	2	3	4
0	1	−0,5772157	1,978112	−5,44487	23,5615
1	1	0,4227843	0,823681	0,48946	1,7820
2	2	1,8455687	2,492930	3,44996	5,5218
3	6	7,5367060	11,169927	17,82873	30,3661
4	24	36,1468240	59,75314	104,82453	192,7758

Ordnet man den Ausdruck nach Potenzen von $\log n$ und von n, so hat er die Form:

$$K_{n+1} = \frac{1}{n \log^2 n} \left\{ \sum_{f=0}^{f=\nu} \sum_{g=0}^{g=\mu} \frac{(f,\, g)}{(\log n)^f\, n^g} + \frac{\Theta}{(\log n)^{\nu+1}\, n^{\mu+1}} \right\}$$

und die Coefficienten bis $\mu = 4$, $\nu = 4$ giebt folgende Tabelle:

g	$(0, g)$	$(1, g)$	$(2, g)$	$(3, g)$	$(4, g)$
0	1	−1,144431	−3,93527	1,0081	19,985
1	0	1	1,26836	−14,7971	−36,833
2	0	0,166667	1,30759	5,4598	−42,952
3	0	0	0,75	6,7684	28,692
4	0	−0,016667	0,04969	14,7691	29,827

Bezeichnet H_μ den μten Näherungswert von K_n für $\mu = \nu$, und setzt man

$$K_n = \varkappa_\mu H_\mu$$

so erhält man die Tabelle:

$n =$ 3	4	5	6	7
$\varkappa_0 =$ 0,040	0,096	0,144	0,185	0,219
$\varkappa_1 =$ 0,570	0,365	0,406	0,447	0,482

welche zeigt, dass sich die $\varkappa$, obgleich für diese kleinen Zahlen noch stark von 1 differirend, sowol bei wachsendem n, als auch vom ersten

zum zweiten Näherungswert schnell der Grenze nähern. Die folgenden Näherungswerte haben auf die kleinen Zahlen keine Anwendung, da x_2 erst bei $n = 9$ anfängt positiv zu werden.

Für $n = 1000001$ wird

$$
\begin{aligned}
10^6 H_0 &= 0{,}00523921 \\
10^6 H_1 &= 0{,}00480522 \\
10^6 H_2 &= 0{,}00469750 \\
10^6 H_3 &= 0{,}00469920 \\
10^6 H_4 &= 0{,}00470207
\end{aligned}
$$

Der letzte Näherungswert differirt vom Hauptwert in gleichem Sinne und noch etwas stärker als der von Schlömilch gefundene. Da jedoch das letzte Glied der Reihe grösser ist als das vorletzte, während jedes viel kleiner sein müsste als das vorhergehende, so ist der angenommene Wert von n noch viel zu klein, damit die vierfache Correction eine sichere merkliche Annäherung bewirken könnte. Ist aber n hinreichend gross, dass die νte Correction wirksam sein kann, so ersieht man hieraus, dass alle Terme mit negativen Potenzen von n weit ausser dem Bereiche der bestimmbaren Decimalstellen liegen, dass also stets $\mu = 0$ gesetzt werden kann.

V.

Die Seitenproportionalen eines Dreiecks und die Proportionaldreiecke desselben.

Von

Herrn **J. Albers,**

Lehrer der Mathematik in Karlsruhe.

Es gibt in der Mathematik Sätze von ausserordentlicher Fruchtbarkeit. Wir erlauben uns, einen derartigen Satz, der trotz seiner Einfachheit noch wenig bekannt sein dürfte, hier mitzuteilen und einige der vielen Anwendungen, deren er fähig ist, daran zu knüpfen. Der Lehrsatz lautet (vergl. Fig. 1—4):

Wenn man in irgend einem Dreieck ABC den Winkel $ACD = ABC$ macht, also einen Dreieckswinkel in einem Endpunkte an die gegenüber liegende Seite legt, so ist:

1) $AC^2 = AB.AD$, d. h. die dem Winkel ABC gegenüber liegende Dreiecksseite ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen der durch CD geteilten Dreiecksseite und einem Abschnitte derselben;

2) $\frac{AB}{BC} = \frac{AC}{CD}$ d. h. CD ist die vierte geometrische Proportionale zu den drei Seiten des Dreiecks in der angegebenen Reihenfolge.

Die Richtigkeit dieses Satzes ergibt sich leicht aus der Aehnlichkeit der Dreiecke ABC und ACD.

Legt man auch den Winkel BAC an der gegenüber liegenden Seite in C an, macht also Wkl. $BCE = BAC$, so ist auch das Dreieck $BCE \backsim ABC$, somit

$$1)\quad BC^2 = AB.BE,$$

$$2)\quad \frac{AB}{AC} = \frac{BC}{CE}$$

Es ist aber auch $\frac{AB}{BC} = \frac{AC}{CD}$, oder $\frac{AB}{AC} = \frac{BC}{CD}$, somit $\frac{BC}{CE} = \frac{BC}{CD}$ oder $CD = CE$, und

$$3)\quad CD^2 = CE^2 = AD.BE (\text{Dreieck } ADE \backsim CEB).$$

Wir nennen nun CD resp. CE eine Seitenproportionale des Dreiecks ABC und das gleichschenklige Dreieck CDE ein Proportionaldreieck von ABC. Man sieht leicht, dass jedes Dreieck der Zahl nach sechs, der Grösse nach drei Seitenproportionalen und drei Proportionaldreiecke hat. Zur Unterscheidung bezeichnen wir die Seitenproportionalen als zu derjenigen Seite des Dreiecks gehörig, welche sie teilen, so dass also zu jeder Seite zwei gleiche Proportionalen gehören. Das von diesen als Schenkeln gebildete gleichseitige Proportionaldreieck bezeichnen wir ebenfalls als zu der Dreiecksseite gehörig, zu welcher die Proportionalen gehören. Die Grundlinie eines Proportionaldreiecks ist die doppelte Projection einer Seitenproportionale auf der zugehörigen Dreiecksseite.

Ist Wkl. $ACB > R$, so ist auch Wkl. $ADC > R$, und die Punkte D und E fallen zwischen A und B, sowie CD und CE innerhalb des Dreiecks (Fig. 1.).

Ist Wkl. $ACB = R$, so ist, wenn Wkl. $ACD = ABC$, auch Wkl. $BCD = CAB$ und Wkl. $ADC = R$, ebenso Wkl. $BEC = R$, es fallen somit D und E, CD und CE zusammen (Fig. 2.); CD resp. CE wird zur Höhe, AD und BE werden die Projectionen der Katheten. Es ist sonach der bekannte Lehrsatz, welcher wegen seiner Wichtigkeit κατ' ἐξοχήν „der Satz vom rechtwinkligen Dreieck" heisst, ein besonderer Fall unseres Lehrsatzes.

Ist Wkl. $ACB < R$, so hat man drei Fälle zu unterscheiden:

1) Ist Wkl. ACB grösser als jeder der beiden andern Winkel, so fallen D und E zwischen A und B, jedoch D näher zu B und E näher zu A (Fig. 3.).

2) Ist Wkl. ACB gleich einem der beiden andern Winkel, so fällt einer der Punkte D oder E auf B resp. A, somit eine der

Seitenproportionalen mit einer Dreiecksseite zusammen. Sind alle drei Winkel des Dreiecks gleich, so fällt das Proportionaldreieck mit seinem ursprünglichen Dreieck zusammen.

3) Ist Wkl. ACB der kleinste Winkel des Dreiecks, so fallen die Punkte D und E auf die Verlängerungen von AB und CD und CE ausserhalb des Dreiecks ABC (Fig. 4.).

Aus unserm Lehrsatze ergeben sich folgende Constructionen:

1) Construction einer mittleren geometrischen Proportionalen zwischen zwei gegebenen Geraden a und b.

Man macht (Fig. 5.) $AB = a$, $AD = b$, legt in A den Winkel BAx beliebig an, errichtet Ay senkrecht Ax und in der Mitte von AD ein Lot, welches Ay in O schneidet, beschreibt um O mit OA einen Kreis, zieht durch B eine Parallele zu Ay, welche den Kreis in C schneidet, so ist CA die gesuchte Proportionale zu a und b.

Es muss der Winkel BAx so klein gewählt werden, dass die durch B gezogene Parallele den Kreis O schneidet oder berührt. Im letzten Falle ist Wkl. $OCB = R = OAx$ und da $Bx \parallel BC$, so muss O auf AC fallen, oder Wkl. $ACB = R$ sein, d. h. in diesem Falle geht die Construction in die übliche über.

2) Construction einer vierten geometrischen Proportionalen zu den drei Geraden c, a und b.

Man construirt aus $AB = c$, $BC = a$ und $AC = b$ das Dreieck ABC und macht Wkl. $ACD = ABC$, so ist CD die vierte geometrische Proportionale.

II.

Die Umfangsstücke der Proportionaldreiecke lassen sich leicht durch jene des ursprünglichen Dreiecks ausdrücken. Der Einfachheit wegen bedienen wir uns nunmehr folgender Bezeichnungen;

a, b und c für die Seiten des ursprünglichen Dreiecks; dem entsprechend

α, β und γ für die Winkel des Dreiecks;

$p_{,}$, $p_{,,}$ und $p_{,,,}$ für die Seitenproportionalen, wobei $p_{,}$ zu a, p'' zu b, $p_{,,,}$ zu c gehört; dem entsprechend

$m_{,}$, $m_{,,}$ und $m_{,,,}$ für die Grundlinien der Proportionaldreiecke.

A. Für die Winkel des Proportionaldreiecks CDE ergibt sich (Fig. 1—4):

1) Wkl. $CDE = DAC + ACD = \alpha + \beta$, ebenso $CED = \alpha + \beta$, folglich Wkl. $ADC = BEC = \gamma$;

2) Wkl. $DCE = 2R - CDE - CED = 2R - 2(\alpha + \beta) = \gamma - (\alpha + \beta)$.

Je nachdem der Winkel $ACB \gtrless R$ ergeben sich folgende Fälle:

Wkl. $CDE = \alpha + \beta$, wenn Wkl. $ACB > R$ (Fig. 1.),
$= R$, „ „ „ $= R$ (Fig, 2.),
$= \gamma$, „ „ „ $< R$ (Fig. 3. u. 4.),

während der Nebenwinkel von $CDE = \alpha + \beta$ wird.

Wkl. $DCE = \gamma - (\alpha + \beta)$, wenn Wkl. $ACB > R$ (Fig. 1.),
$= O$ „ „ $= R$ (Fig. 2.),
$= -(\gamma - (\alpha + \beta))$ „ „ $< R$ (Fig, 3. u. 4.).

In derselben Weise lassen sich die Winkel der andern Proportionaldreiecke bestimmen.

B. Für die Seiten des Proportionaldreiecks CDE ergibt sich:

1) $CD = CE = p_w = \frac{ab}{c}$;

2_α) $DE = AB - AD - BE = AB - \frac{AC^2}{AB} - \frac{BC_2}{AB} = \frac{c^2 - (a^2 + b^2)}{c}$, wenn Wkl. $ACB > R$ (Fig. 1.);

2_β) $DE = AD + BE - AB = \frac{AC^2}{AB} + \frac{BC^2}{AB} - AB = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{c}$, wenn Wkl. $ACB < R$ (Fig. 3. u. 4.),

so mit allgemein

$$DE = \pm \frac{c^2 \mp (a^2 + b^2)}{c} = \pm \frac{c^2 - (a^2 + b^2)}{c}.$$

Ist Wkl. $ACB = R$, so ist $DE = O$. also

$$\pm \frac{c^2 \mp (a^2 + b^2)}{b} = 0 \quad \text{oder} \quad \pm c^2 \mp (a^2 + b^2) = 0,$$

somit

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

C. Für sämmtliche Seiten der Proportionaldreiecke erhalten wir daher folgende Ausdrücke:

1) $p_{,} = \frac{bc}{a}; \quad p_{,,} = \frac{ac}{b}; \quad p_{,,,} = \frac{ab}{c};$

2) $m_{,} \quad = \mp \frac{a^2 \mp (b^2 + c^2)}{a} = \pm \frac{a^2 - (b^2 + c^2)}{a}$

$m_{,,} \quad = \pm \frac{b^2 \mp (a^2 + c^2)}{b} = \pm \frac{b^2 - (a^2 + c^2)}{b}$

$m_{,,,} = \pm \frac{c^2 \mp (a^2 + b^2)}{c} = \pm \frac{c^2 - (a^2 + b^2)}{c}.$

III.

An das Vorhergehende lassen sich eine Reihe von Folgerungen knüpfen.

1) Aus C. 1) des vorhergehenden Abschnittes ergibt sich

$$p_{,} \cdot p_{,,} \cdot p_{,,,} = \frac{a^2 b^2 c^2}{abc} = abc$$

d. h. das Product der Seitenproportianalen ist gleich dem Producte der drei Seiten eines Dreiecks.

2) Ebenso folgt:

$$\frac{1}{p_{,}} = \frac{a}{bc}, \quad \frac{1}{p_{,,}} = \frac{b}{ac}, \quad \frac{1}{p_{,,,}} = \frac{c}{ab}$$

und durch Addition

$$\frac{1}{p_{,}} + \frac{1}{p_{,,}} + \frac{1}{p_{,,,}} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{p_{,} p_{,,} p_{,,,}}$$

oder

$$p_{,} \cdot p_{,,} \cdot p_{,,,} \left(\frac{1}{p_{,}} + \frac{1}{p_{,,}} + \frac{1}{p^{,,,}} \right) = a^2 + b^2 + c^2$$

3) Multiplicirt man die Gleichungen C. 1) (Cap. II.) mit 2 und dividirt sie in die Gleichungen C. 2), so erhält man

α) bei stumpfwinkligen Dreiecken:

$$\frac{m_{,}}{2p_{,}} = \frac{a^2 - (b^2 + c^2)}{2bc}, \quad \text{wenn Wkl. } \alpha > R,$$

$$\frac{m''}{2p_{,,}} = \frac{b^2 - (a^2 + c^2)}{2ac} \quad \text{,, \quad ,, } \beta > R,$$

$$\frac{m_{,,,}}{2p_{,,,}} = \frac{c^2 - (a^2 + b^2)}{2ab} \quad \text{,, \quad ,, } \gamma > R;$$

nun ist

$$\frac{m_{,}}{2p_{,}} = \cos(\beta+\gamma) = -\cos\alpha$$

$$\frac{m_{,,}}{2p_{,,}} = \cos(\alpha+\gamma) = -\cos\beta$$

$$\frac{m_{,,,}}{2p_{,,,}} = \cos(\alpha+\beta) = -\cos\gamma;$$

daher

$$\frac{a^2-(b^2+c^2)}{2bc} = -\cos\alpha \quad \text{oder} \quad a^2 = b^2+c^2-2bc\cos\alpha$$

$$\frac{b^2-(a^2+c^2)}{2ac} = -\cos\beta \quad \text{„} \quad b^2 = a^2+c^2-2ac\cos\beta$$

$$\frac{c^2-(a^2+b^2)}{2ab} = -\cos\gamma \quad \text{„} \quad c^2 = a^2+b^2-2ab\cos\gamma.$$

β) bei spitzwinkligen Dreiecken:

$$\frac{m_{,}}{2p_{,}} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, \text{ wenn } \alpha < R,$$

$$\frac{m_{,,}}{2p_{,,}} = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}, \quad \text{„} \quad \beta < R,$$

$$\frac{m_{,,,}}{2p_{,,,}} = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}, \quad \text{„} \quad \gamma < R;$$

nun ist

$$\frac{m_{,}}{2p_{,}} = \cos\alpha, \quad \frac{m_{,,}}{2p_{,,}} = \cos\beta \quad \text{und} \quad \frac{m_{,,,}}{2p_{,,,}} = \cos\gamma;$$

daher ebenfalls

$$a^2 = b^2+c^2-2bc\cos\gamma \quad \text{u. s. w.}$$

Aus Vorstehendem ergibt sich auch:

$$\frac{m_{,}.m_{,,}.m_{,,,}}{8p_{,}.p_{,,}p_{,,,}} = \cos\alpha.\cos\beta.\cos\gamma$$

oder

$$m_{,}.m_{,,}.m_{,,,} = 2a\cos\alpha.2b\cos\beta.2c\cos\gamma.$$

4) Aus

$$m_{,} = \frac{\pm a^2 \mp (b^2+c^2)}{a}$$

und

$$p_{,} = \frac{bc}{a}$$

folgt

$$m_{,}-p_{,} = \frac{a^2-(b^2+c^2)-bc}{a}, \text{ wenn Wkl. } \alpha > R$$

und

$$m_{,}-p_{,} = \frac{b^2+c^2-a^2-bc}{a}, \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \alpha < R \text{ ist.}$$

Ebenso findet man

$$m_{II} - p_{II} = \frac{\pm b^2 \mp (a^2 + c^2) - ac}{b}, \text{ Wkl. } \beta \gtrless R$$

$$m_{III} - p_{III} = \frac{\pm c^2 \mp (a^2 + b^2) - ab}{c}, \text{ Wkl. } \gamma \gtrless \text{R.}$$

Tritt nun der Fall ein, dass die Proportionaldreiecke gleichseitig werden, also $m_I = p_I$ u. s. w., so wird

$$\alpha) \quad \frac{\pm a^2 \mp (b^2 + c^2) - bc}{a} = 0$$

$$\frac{\pm b^2 \mp (a^2 + c^2) - ac}{b} = 0$$

$$\frac{\pm c^2 \mp (a^2 + b^2) - ab}{c} = 0$$

oder

$a^2 = b^2 + c^2 + bc \, (\text{cond}\, \alpha > R)$ oder $a^2 = b^2 + c^2 - bc \, (\text{cond}\, \alpha < R)$
$b^2 = a^2 + c^2 + ac \, (\text{cond}\, \beta > R)$ „ $b^2 = a^2 + c^2 - ac \, (\text{cond}\, \beta < R)$
$b^2 = a^2 + b^2 + ab \, (\text{cond}\, \gamma > R)$ „ $c^2 = a^2 + b^2 - ab \, (\text{cond}\, \gamma < R)$

β) ferner im ersten Falle Wkl. $\alpha = 120^0$, im zweiten $\alpha = 60^0$, ebenso Wkl. $\beta = 120^0$ oder Wkl. $\beta = 60^0$ und Wkl. $\gamma = 120^0$ oder $\gamma = 60^0$. Denn wird z. B. $m_{III} = p_{III}$, also $CD = DE$ (Fig. 1., 3.), so wird auch Wkl. $DCE = CDE$ und somit (vergl. II. A. 2), wenn Wkl. $\gamma > R$,

$$\text{Wkl. } \gamma - (\alpha + \beta) = \alpha + \beta \quad \text{oder} \quad \frac{\gamma}{2} = \alpha + \beta;$$

da nun

$$\text{Wkl. } \alpha + \gamma = 2R,$$

so folgt

$$\gamma + \frac{\gamma}{2} = 2R$$

$$\gamma = \frac{4R}{3} = 120^0;$$

oder, wenn Wkl. $\gamma < R$,

$$\text{Wk. } \alpha + \beta - \gamma = \gamma$$

$$\alpha + \beta + \gamma - \gamma = 2\gamma$$

$$\gamma = \frac{2R}{3} = 60^0.$$

Ist somit $m_m = p_m$, so ist entweder $c^2 = a^2 + b^2 + ab$ und Wkl. $\gamma = 120^0$, oder $c^2 = a^2 + b^2 - ab$ und $\gamma = 60^0$, d. h.

In einem Dreieck ist das Quadrat über einer Dreiecksseite gleich der Summe der Quadrate über den beiden andern Dreiecksseiten, vermehrt oder vermindert um das aus ihnen gebildete Rechteck, jenachdem der von diesen eingeschlossene Winkel gleich $\frac{4}{3}$ oder $\frac{2}{3}R$ ist.

Dieser Lehrsatz ist nicht neu, nur die Ableitung aus Lehrsätzen der Planimetrie, in welcher er nunmehr neben dem pythagoräischen Lehrsatz als besonderer Fall des unter No. 3. dieses Cap. abgeleiteten Satzes aufgeführt werden kann.

Welches sind hiernach die einfachsten Constructionen der Ausdrücke:

$$X = \sqrt{a^2 + b^2 \pm ab}$$

und

$$X = \sqrt[4]{a^4 + b^4 + a^2b^2}?$$

Selbstverständlich gilt auch die Umkehrung des obigen Lehrsatzes:

Ist das Quadrat einer Dreiecksseite gleich der Summe der Quadrate der andern Dreiecksseiten vermehrt oder vermindert um das aus ihnen gebildete Rechteck, so beträgt der von diesen eingeschlossene Winkel $\frac{4}{3}$ oder $\frac{2}{3}R$.

Löst man die Gleichungen unter α) dieses Capitels nach den andern Seiten auf, so erhält man beispielsweise aus $c^2 = a^2 + b^2 + ab$

$$a = \frac{\mp b \pm \sqrt{4c^2 - 3b^2}}{2}$$

und

$$b = \frac{\mp a \pm \sqrt{4c^2 - 3a^2}}{2},$$

wobei die obern Vorzeichen gelten, wenn $\gamma = 120^0$, die untern, wenn $\gamma = 60^0$ ist.

Da der Wurzelausdruck nie imaginär werden kann, also nur $4c^2 - 3b^2 \gtrless 0$ sein kann, so geht hieraus hervor, dass in jedem Dreieck, in welchem ein Winkel 120^0 oder 60^0 beträgt, das Quadrat der doppelten diesem Winkel gegenüber liegenden Seite nie kleiner als das dreifache Quadrat einer der andern Seiten sein kann.

Nur wenn $b > c$, also Wkl. $\gamma = 60^0$ ist, kann $4c^2 - 3b^2 = 0$ werden; dann ist entweder $a = \frac{b}{2}$ oder $b = \frac{a}{2}$.

Soll $a = b$ werden, also

$$b = \mp \frac{b \pm \sqrt{4c^2 - 3b^2}}{2},$$

so muss entweder

$$3b^2 = c^2 \quad \text{oder} \quad b = \frac{c}{3}\sqrt{3},$$

wenn Wkl. $\gamma = 120^0$ oder $b = c$ sein, wenn Wkl. $\gamma = 60^0$.

IV.

Mit Hülfe der Stücke der Proportioanaldreiecke lassen sich leicht folgende Fomeln ableiten.

Drückt man die Höhen des ursprünglichen Dreiecks durch $h_{,}$, $h_{,,}$ und $h_{,,,}$ aus, so ergibt aus den Fig. 1., 3. und 4., dass

$$h_{,}^2 = p_{,}^2 - \left(\frac{m_1}{2}\right)^2 = \left(p_1 + \frac{m_1}{2}\right)\left(p_1 - \frac{m_{,}}{2}\right)$$

$$h_{,,}^2 = p_{,,}^2 - \left(\frac{m_{,,}}{2}\right)^2 = \left(p_{,,} + \frac{m_{,,}}{2}\right)\left(p_{,,} - \frac{m_{,,}}{2}\right)$$

$$h_{,,,}^2 = p_{,,,}^2 - \left(\frac{m_{,,,}}{2}\right)^2 = \left(p_{,,,} + \frac{m_{,,,}}{2}\right)\left(p_{,,,} - \frac{m_{,,,}}{2}\right).$$

Setzen wir in diesen Ausdrücken für p und m die entsprechenden früher gefundenen Werte, so erhalten wir:

$$h_{,} = \sqrt{\left(\frac{bc}{a} \pm \frac{a^2 - (b^2 + c^2)}{2a}\right)\left(\frac{bc}{a} \mp \frac{a^2 - (b^2 + c^2)}{2a}\right)}$$

$$= \frac{1}{2a}\sqrt{(a^2 - (b - c)^2)((b^2 + c^2) - a^2)}$$

$$= \frac{1}{2a}\sqrt{(a + b + c)(b + c - a)(a + c - b)(a + b - c)}$$

oder, wenn $a + b + c = 2s$

$$h_{,} = \frac{2}{a}\sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}.$$

Entsprechend:

$$h_{,,} = \frac{2}{b}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$h_{,,,} = \frac{2}{c}\sqrt{s(s-n)(s-b)(s-c)}.$$

Somit ist der Flächeninhalt F des ursprünglichen Dreiecks:

$$F = \frac{ah_{,}}{2} = \frac{bh_{,,}}{2} = \frac{ch_{,,,}}{2} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Auch hier haben wir keine neuen Sätze; aber die Einfachheit der Ableitung mit Hülfe der Eigentümlichkeiten der Proportionaldreiecke ist in die Augen springend. Nenes wird jedoch das folgende Capitel bringen, welches über die Seiten halbirenden Transversalen eines Dreiecks (Mittellinien, Schwerlinien) handelt.

V.

Wenn wir mit $t_{,}$, $t_{,,}$ und $t_{,,,}$ die zu den Dreiecksseiten a, b und c gehörigen Schwerlinien bezeichnen, so ist bekanntlich:

$$b^2 + c^2 = \frac{a^2}{2} + 2t_1{}^2$$

$$a^2 + c^2 = \frac{b^2}{2} + 2t_{,,}{}^2$$

$$a^2 + b^2 = \frac{c^2}{2} + 2t_{,,,}{}^2$$

Somit ist

$$m_{,} = \pm\frac{a^2 - (b^2 + c^2)}{a} = \pm\frac{a^2 - \left(\frac{a^2}{2} + 2t_1{}^2\right)}{a} = \pm\frac{a^2 - 4t_{,}{}^2}{2a}$$

oder

$$m_{,} = \frac{(a + 2t_{,})(a - 2t_1)}{2a},$$

wenn Wkl. $\alpha > R$, und

$$m_{,} = \frac{(2t_{,} + a)(2t_{,} - a)}{2a},$$

wenn Wkl. $\alpha < R$. Ist Wkl. $\alpha = R$, so wird $m_{,} = O$, somit

$$a^2 = 4t_{,}{}^2 \quad \text{oder} \quad a = 2t_{,}$$

d. h. im rechtwinkligen Dreiecke ist die Hypotenuse doppelt so gross als die zugehörige Schwerlinie und

$$b^2+c^2=\frac{a^2}{2}+2t_,^2$$

geht nun über in

$$b^2+c^2=a^2.$$

Ebenso wird, wenn $a=2t_{,}$, Wkl. $\alpha=R$ und $b^2+c^2=a^2$ (der Pyth.).

Die entsprechenden Formeln für $m_{,,}$ und $m_{,,,}$ sind:

$$m_{,,}=\frac{(b+2t_{,,})(b-2t_{,,}}{2b} \quad \text{oder} \quad m_{,,}=\frac{(2t_{,,}+b)(2t_{,,}-b)}{2b}$$

$$m_{,,,}=\frac{(c+2t_{,,,})(c-2t_{,,,})}{2c} \quad " \quad m_{,,,}=\frac{(2t_{,,,}+c)(2t_{,,,}-c)}{2c},$$

Aus diesen Formeln ergibt sich gleichzeitig, dass die zu einem stumpfen Winkel gehörige Schwerlinie kleiner als die halbe gegenüber liegende Seite, dagegen die zu einem spitzen Dreieckswinkel gehörige Schwerlinie grösser als die halbe gegenüber liegende Seite sein muss.

Bezeichnen wir das Verhältniss der Seite a zu ihrer zugehörigen Schwerlinie mit α, setzen also $\frac{a}{t_,}=n$ oder

$$a=nt_, \quad \text{resp.} \quad t_,=\frac{a}{n},,$$

so gehen die Formeln

$$m_,=\frac{(a+2t_,)(a-2t_,)}{2a} \quad \text{oder} \quad m_,=\frac{(a\,t_,+a)(2t_,-a)}{2a}$$

über in

$$m_,=\pm\frac{a(n^2-4)}{2n^2}.$$

Da nun aber auch

$$m_,=\pm\frac{a^2\mp(b^2+c^2)}{a}=\pm\frac{a^2-(b^2+c^2)}{a},$$

so ist

$$\frac{a^2-(b^2+c^2)}{a^2}=\frac{a(n^2-4)}{2n^2},$$

somit

$$\frac{b^2+c^2}{a^2}=\frac{n^2+4}{2n^2} \quad \text{oder} \quad \frac{a^2}{b^2+c^2}=\frac{2n^2}{n^2+4}$$

d. h. durch das Verhältniss einer Dreiecksseite zu ihrer Schwerlinie ist auch das Verhältniss des Quadrates dieser Seite zur Summe der Quadrate der beiden andern Dreiecksseiten bestimmt.

Hieraus ergibt sich unmittelbar folgendes:

Beschreibt man mit der Schwerlinie $AD = t_,$ des Dreiecks ABC um die Mitte der Seite $BC = a$ einen Kreis und verbindet irgend einen Punkt A desselben mit B und C, so ist (Fig. 6.):

I. Das Verhältniss der Quadrate dieser Verbindungslinien zu dem Quadrate der Seite BC constant und zwar $\frac{n^2+4}{2n^2}$ wenn $a:t_,=n$ ist, somit auch

II. die Summe der Quadrate dieser Verbindungslinien constant, z. B.

$$AB^2 + BC^2 = BE^2 + EC^2.$$

Der Grund liegt einfach darin, dass in allen Dreiecken, welche auf diese Weise entstehen, eine Seite a und ihre Schwerlinie $t_,$ dieselbe Grösse haben, so mit auch ihr Verhältniss n stets dasselbe bleiben muss.

Vorstehenden Sätzen lässt sich auch noch folgende Form geben:

Der geometrische Ort für die Spitzen aller Dreiecke über derselben Grundlinie, bei welchen das Verhältniss der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten zu dem Quadrate der Grundlinie gleich ist, ist die Peripherie des Kreises, welcher um die Mitte der Grundlinie mit der zugehörigen Schwerlinie beschrieben wird.

Wird $n = 2$, so finden wir abermals, weil $\frac{n^2+4}{2n^2} = 1$ wird,

$$\frac{b^2+c^2}{c^2} = 1 \quad \text{oder} \quad a^2 = b^2 + c^2.$$

Hieran lassen sich eine Reihe von Aufgaben knüpfen. Wie muss z. B. das Verhältniss von a zu $t_,$ sein, wenn $b^2+c^2 = 2a^2$ sein soll?

Ist

$$b^2 + c^2 = 2a^2,$$

so ist

$$\frac{b^2+c^2}{a^2} = 2,$$

also auch

$$\frac{n^2+4}{2n^2} = 2,$$

somit

$$n = \tfrac{2}{3} t_, \sqrt{3}$$

oder

$$a = \tfrac{2}{3} t_, \sqrt{3} \quad \text{und} \quad t_, = \frac{a}{2} \sqrt{3}.$$

Will man dieses in einen Lehrsatz zusammenfassen, so erhält man:

Ist die zu a gehörige Schwerlinie des Dreiecks (a, b, c) gleich der halben Seite des gleichseitigen Dreiecks, welches dem Kreise mit dem Radius a einbeschrieben ist, so ist das Quadrat der Seite a halb so gross, als die Summe der Quadrate der beiden andern Dreiecksseiten.

Soll $b^2+c^2 = 3a^2$ sein, so muss

$$t_,^2 = \frac{5a^2}{4} = \frac{5a}{2} \cdot \frac{a}{2}$$

und wenn

$$b^2+c^2 = \tfrac{1}{2}a^2\sqrt{5}$$

sein soll, so muss

$$t_,^2 = \frac{(-1+\sqrt{5})a^2}{4} \quad \text{sein.}$$

Diese Resultate lassen sich ebenfalls leicht in Lehrsätze formuliren.

Soll allgemein das Verhältniss $\frac{b^2+c^2}{a^2} = v$ sein, so muss

$$n = \frac{2\sqrt{2v-1}}{2v-1} \quad \text{sein.}$$

Setzen wir das Verhältniss

$$\frac{b^2+c^2}{a^2} = v_, \quad \text{also} \quad b^2+c^2 = v_, a^2$$

$$\frac{a^2+c^2}{b^2} = v_{,,} \quad \text{"} \quad a^2+c^2 = v_{,,}b^2$$

$$\frac{a^2+b^2}{c^2} = v_{,,,} \quad \text{"} \quad a^2+b^2 = v_{,,,}c^2$$

so erhält man durch Addition

$$\frac{v_, a^2+v_{,,}b^2+v_{,,,}c^2}{a^2+b^2+c^2} = 2,$$

dieses Verhältniss ist also constant, wie die Winkelsumme des Dreiecks.

Aus

$$m_, = \pm\frac{a^2-(b^2+c^2)}{a} \quad \text{und} \quad b^2+c^2 = v_, a^2$$

folgt:

$$m_, = \pm\frac{a^2-v_, a^2}{a} = \pm a(1-v_,);$$

ebenso

$$m_{\prime\prime} = \pm \frac{b^2 - v_{\prime\prime} b^2}{b} = \pm b(1 - v_{\prime\prime})$$

und

$$m_{\prime\prime\prime} = \pm \frac{c^2 - v_{\prime\prime\prime} c^2}{c} = \pm c(1 - v_{\prime\prime\prime})$$

oder auch

$$v_{\prime} = \frac{a \mp m_{\prime}}{a}$$

$$v_{\prime\prime} = \frac{b \mp m_{\prime\prime}}{b}$$

$$v_{\prime\prime\prime} = \frac{c \mp m_{\prime\prime\prime}}{c}.$$

Aus diesem ergibt sich:

$$m_{\prime} . m_{\prime\prime} . m_{\prime\prime\prime} = \pm abc(1 - v_{\prime})(1 - v_{\prime\prime})(1 - v_{\prime\prime\prime})$$

oder

$$\frac{m_{\prime} . m_{\prime\prime} . m_{\prime\prime\prime}}{abc} = \frac{m_{\prime} . m_{\prime\prime} . m_{\prime\prime\prime}}{p_{\prime} \cdot p_{\prime\prime} \cdot p_{\prime\prime\prime}} = \pm (v_{\prime} - 1)(v_{\prime\prime} - 1)(v_{\prime\prime\prime} - 1)$$

und

$$v_{\prime} . v_{\prime\prime} . v_{\prime\prime\prime} = \frac{(a \mp m_{\prime})(b \mp m_{\prime\prime})(c \mp m_{\prime\prime\prime})}{abc}.$$

Da

$$v_{\prime} = \frac{b^2 + c^2}{a^2} \quad \text{und} \quad v_{\prime} = \frac{a \mp m_{\prime}}{a},$$

so ist

$$b^2 + c^2 = a(a \mp m_{\prime})$$

d. h. die Summe der Quadrate zweier Dreiecksseiten ist gleich einem Rechtecke, gebildet aus der dritten Seite und ihrem Ueberschuss über die Grundlinie des ihr zugehörigen Proportionaldreiecks, wenn der gegenüber liegende Winkel grösser als ein rechter ist; ist dieser Winkel aber kleiner als ein rechter, so besteht die andere Seite des Rechtecks aus der Summe der dritten Seite und der Grundlinie ihres Proportionaldreiecks; ist der Winkel ein rechter, so geht das Rechteck in das Quadrat der dritten Seite über, weil die Grundlinie des Proportionaldreiecks dann gleich Null wird.

Ist $t_{\prime} = 0$, so wird $n = \infty$ und $\frac{n^2 + 4}{2n^2} = \frac{1}{2}$, somit

$$2(b^2 + c^2) = a^2,$$

denn in diesem Falle wird

$$b = c = \frac{a}{2}.$$

Ist F der Flächenraum des ursprünglichen Dreiecks und f_1 der Flächenraum des a zugehörigen Proportionaldreiecks, so verhält sich

$$f_1 : F = m_{,} : a = \pm (a^2 - (b^2 + c^2)) : a^2$$

$$= \pm \left(1 - \frac{b^2 + c^2}{a^2}\right) = \pm \left(1 - \frac{n_{,}^2 + 4}{2n_{,}^2}\right) = \pm \frac{n_{,}^2 - 4}{2n_{,}^2}$$

wo

$$n_{,} = a : t_{,}, \quad n_{,,} = b : t_{,,}, \quad m_{,,,} = c : t_{,,,} \text{ ist.}$$

Somit

$$\frac{m_{,}}{a} = \pm \frac{n_{,}^2 - 4}{2n_{,}^2}, \quad \frac{m_{,,}}{b} = \pm \frac{n_{,,}^2 - 4}{2n_{,,}^2}, \quad \frac{m_{,,,}}{c} = \pm \frac{n_{,,,}^2 - 4}{2n_{,,,}^2}.$$

Ferner aus

$$t_{,} : F = \pm (n_{,}^2 - 4) : 2n_{,}^2$$

folgt

$$n_{,} = \pm 2 \sqrt{\frac{\pm F}{2f_1 \pm F}}$$

oder

$$\frac{1}{n_{,}} = \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{\frac{2f_1 \pm F}{\pm F}} = \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{1 \pm \frac{2f_1}{F}} = \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{1 \pm \frac{2m_{,}}{a}}.$$

Aus dem Vorstehenden lassen sich durch Auflösung der aufgestellten Gleichungen nach andern darin enthaltenen Grössen viele Beziehungen zwischen dem Dreieck und seinen Proportionaldreiecken ableiten. Sobald man die Stücke der Proportionaldreiecke unter die gegebenen Stücke bei geometrischen Constructionsaufgaben aufnimmt, werden alle möglichen Umformungen der gebotenen Gleichungen von grossem Nutzen sein. Durch Verwendung der Stücke der Proportionaldreiecke lässt sich die Zahl der geometrischen Constructions-Aufgaben bedeutend vermehren.

Im folgenden Capitel wollen wir noch einige Anwendungen der vorhergehenden Sätze machen.

VI.

Lehrsatz. Wenn man um die Endpunkte einer Dreiecksseite mit den beiden andern Seiten Kreise beschreibt, so schneiden diese die beiden andern Seiten in Punkten, welche mit den Endpunkten der ersten Seite auf der Peripherie eines Kreises liegen. Auf derselben Peripherie liegt der Durchschnittspunkt der Höhen des Dreiecks, und der Radius des Kreises ist so gross wie der Radius des dem Dreiecke umbeschriebenen Kreises.

Vorauss. $AC = AF_1$ (Fig. 7. u. 8.), $BC = BF_2$, AG und BJ Höhen des Dreiecks ABC.

Behaupt. Die Punkte A, B, F_1, F_2 und H liegen auf der Peripherie eines Kreises, dessen Radius gleich dem des ABC umbeschriebenen Kreises ist.

Beweis. Man ziehe das zu AB gehörige Proportionaldreieck CDE, und verbinde F_1 mit F_2. Dann ist

$$\begin{aligned}
\text{Wkl. } CAF_1 &= \gamma - (\alpha + \beta) \\
CAB &= \alpha \\
F_1F_2C &= \beta \\
AF_2B &= \alpha + \beta \\
\hline
\text{Wkl. } F_1AB + BF_2F_1 &= \alpha + \beta + \gamma = 2R,
\end{aligned}$$

also liegen die Punkte A, B, F_1 und F_2 auf der Peripherie eines Kreises.

Ferner halbirt AG Wkl. F_1AF_2 und Bogen F_1F_2, und BJ Wkl. F_1BF_2 und Bogen F_1F_2; folglich schneiden sich die Höhen auf dem Kreise, der durch A, B, F_1 und F_2 geht,

Nun ist $\triangle ACE \backsim ABF_2$ und $BCD \backsim BAF_1$, daher

$$\frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AF_2} \quad \text{und} \quad \frac{BD}{BC} = \frac{BF_1}{AB},$$

somit

$$AF_2 = \frac{AB \,.\, AE}{AC} \quad \text{und} \quad BF_1 = \frac{AB \,.\, AD}{BC}.$$

Wenn nun $AB = c$, $AC = AF_1 = b$, $BC = BF_2 = a$, so ist

$$AE = DE \pm AD = \pm \frac{c^2 - (a^2 + b^2)}{c} \pm \frac{b^2}{c^2} = \pm \frac{c^2 - a^2}{c^2}$$

$$BD = DE \pm BE = \pm \frac{c^2 - (a^2 + b^2)}{c} \pm \frac{a^2}{c} = \pm \frac{c^2 - b^2}{c}.$$

Setzen wir diese Werte in die Gleichungen für AF_2 und BF_1, so erhalten wir:

$$AF_2 = \pm \frac{\frac{c(c^2 - a^2)}{c}}{b} = \pm \frac{c^2 - a^2}{b}$$

$$BF_2 = \pm \frac{c^2 - b^2}{a}.$$

Nun verhält sich

$$\frac{ABC}{ABF_2} = \frac{AC}{AF_2} = \frac{b^2}{c^2 - a^2}$$

oder

$$ABF_2 = \frac{c^2 - a^2}{b^2} \,.\, ABC.$$

Ist aber r der Radius des ABF_2 umbeschriebenen Kreises, so ist

$$r = \frac{AB.BF_2.AF_2}{4ABF_2} = \frac{ac\dfrac{c^2-a^2}{b}}{4\dfrac{c^2-a_2}{b^2}.ABC} = \frac{abc}{4ABC}$$

Dieser letzte Ausdruck ist aber auch der Radius des Kreises, welcher durch die Punkte A, B und C geht, folglich ist der Radius des Kreises, welcher durch A, B, F_1, F_2 und H geht, gleich dem Radius des dem Dreieck ABC umbeschriebenen Kreises.

Folg. I. Ist O der Mittelpunkt des ABC umbeschriebenen Kreises, OM senkrecht auf AB und O_1M, so ist O_1 der Mittelpunkt des Kreises A, B, F_1, F_2 und H.

Wir nennen, um uns leichter ausdrücken zu können, das $\triangle ABH$ das dem $\triangle ABC$ correspondirende Höhendreieck und den Kreis O_1 den dem Kreise O correspondirenden Höhenkreis.

Folg. II. Für $\triangle ABC$ ist der Durchschnittspunkt der Höhen in H, für ABH in C. Es ist somit, wenn ABH das ABC correspondirende Höhendreieck ist, auch umgekehrt ABC das ABH correspondirende Höhendreieck. Wo schneidet deshalb ein mit BH um B beschriebenen Kreis die Seite AH und der mit AH beschriebene Kreis BH? Ebenso ist, wenn O_1 der Mittelpunkt des O correspondirenden Höhenkreises ist, auch O der Mittelpunkt des O_1 correspondirenden Höhenkreises.

Folg. III. Für alle Dreiecke über der gemeinsamen Grundlinie AB, deren Spitze auf der Peripherie von O liegt, liegt der Durchschnittspunkt der Höhen auf dem correspondirenden Höhenkreise, während die Fusspunkte derselben auf dem über AB beschriebenen Halbkreise liegen.

Folg. IV. Errichtet man in der Mitte M einer beliebigen Strecke AB die Lote $OM = O_1M$ und beschreibt um M mit MA, um O mit OA und um O_1 mit O_1A Kreise, so wird jede durch A oder B gehende Gerade (mit Ausnahme von AB) stets von jedem Kreise nur in einem Punkte geschnitten, wobei A und B nicht mitzählen, und die zwischen die drei Kreise fallenden zwei Abschnitte der Linien sind gleich gross. ($CG = GF$; $CJ = JF_1$).

Folg. V. Bei allen auf AB errichteten Loten sind die zwischen die Peripherien der Kreise O und O_1 fallenden Abschnitte constant $= OO_1$; z. B. $CH = OO_1$.

Folg. VI. Zieht man BO und BO_2, so ist Wkl. $O, BO = CBF_2$;

denn Wkl. $MO_,B = AHB$, somit Wkl. $O_,BM = CBH$ und $OBO_2 = CBF_2$. Deshalb $\triangle O_,BO \sim CBF_2 \sim CDE$ (dem zu AB gehörigen Proportionaldreiecke).

Folg. VII. $HF_1 = HC = HF_2$; denn Wkl. $HCF_2 = ACN = ABH = AF_2H$.

Lehrsatz. Fällt man von dem Mittelpunkte des umbeschriebenen Kreises auf die Seiten des Dreiecks Senkrechte, verlängert sie um sich selbst und beschreibt um ihre Endpunkte Kreise mit dem Radius des umbeschriebenen Kreises, so gehen diese Kreise stets durch zwei Ecken des Dreiecks und den Durchschnittspunkt seiner Höhen, während die Senkrechten gleich den obern Abschnitten der Höhen (jene Teile von der Dreiecksecke bis zum Durchschnittspunkte) sind.

Voraussetzung. $OM_,$ senkrecht BC, OM_2 senkrecht AC, OM_3 senkrecht AB; $OM_1 = M_1O_1$, $OM_2 = M_2O_2$, $OM_3 = M_3O_3$; $OA = O_2A = O_1B = O_3B$; AG, BV und CN Höhen (Fig. 9).

Behauptung. $OO_3 = CH$, $OO_2 = BH$, $OO_1 = AH$; die Kreise O_1, O_2 und O_3 gehen durch zwei Ecken des Dreiecks ABC und durch H.

Beweis. Dass $OO_3 = CH$ und der Kreis O_3 durch A, B und H geht, ist früher nachgewiesen und hier nur der Vollständigkeit wegen aufgenommen. Um das andere, welches eigentlich eine notwendige Folgerung des Vorhergehenden ist, nachzuweisen, ziehe man AOP und verbinde P mit C, so ist

$$\begin{array}{l} \text{Wkl. } BAP = HAC \quad \text{(vorhergeh. Satz)} \\ \text{Wkl. } CAB = CAB \\ \hline \text{Wkl. } CAP = HAB, \end{array}$$

folglich $HB = CP = 2M_2O = OO_2$. Nun ist aber auch OO_2 senkrecht AB und BH senkrecht AC, somit $OO_2 \# BH$. Zieht man also O_2H und OB, so ist $O_2H = OB$, folglich liegt H auf der Peripherie des Kreises O_2; dass dieser Kreis auch durch A und C geht, folgt aus der Construction.

Ebenso beweist man, dass $OO_1 = AH$ und $AO = O_1H$, sowie, dass der Kreis $O_,$ durch BC und H geht. Es giebt somit 3 correspondirende Höhenkreise.

Folg. $\triangle OO_1O_2 \cong ABH$; C ist der Mittelpunkt des dem $\triangle OO_1O_2$ umbeschriebenen Kreises, H der Mittelpunkt eines Höhen-

kreises von OO_1O_2, O_3 der Durchschnittspunkt der Höhen des Dreiecks O_1OO_2. $\triangle OO_1O_2 \cong ABC$. Auf den Loten, welche auf BC errichtet werden, schneiden die Kreise O und O_1 stets Stücke ab gleich AH, auf den Loten, welche auf AC errichtet werden, schneiden die Kreise O und O_2 stets Stücke ab gleich BH. Die gemeinsame Tangente an die Kreise O und O_1 ist gleich der Centrale und gleich AH, u. s. w.

Was die Punkte O, O_1, O_2 für das Dreieck ABC sind, sind A, B und C für das Dreieck OO_1O_2.

VI.

Die Schraubenregelfläche.

Von

Franz Schiffner.

Durch Drehung einer Geraden G um eine andere Gerade A können entstehen:

1. Kegel oder Cylinderflächen, wenn sich G und A im Endlichen oder Unendlichen schneiden und G nur um A rotirt.

2. Hyperboloide, wenn sich G und A kreuzen und erstere Gerade um letztere nur rotirt.

3. Schraubenflächen, wenn sich G und A im Endlichen schneiden und G bei der Drehung um A in der Richtung von A gleichmässig vorrückt. (Sind G und A parallel, dann entsteht wieder ein Cylinder.)

4. Schraubenregelflächen, wenn sich G und A kreuzen und G bei der Rotation um A in der Richtung von A gleichmässig vorrückt.

Da in der darstellenden Geometrie von den Flächen der Gruppe 4 gewöhnlich nur eine specielle Form, die entwickelbare Schraubenfläche (und zwar als Tangentenfläche einer Helix) behandelt wird, so wollen wir uns hier mit einer allgemeinen Fläche dieser Gruppe beschäftigen, und der Einfachheit halber annehmen, die Drehungsachse A sei vertical, die erzeugende Gerade G zur verticalen Bildebene parallel.

Wird noch gesagt, dass sich G nach einer einmaligen Umdrehung in der Richtung A um das Stück h weiter bewegt, so ist die Schraubenregelfläche bestimmt. Um sie darzustellen, können wir nun entweder einzelne Punkte der Geraden G oder diese selbst in ihrer Bewegung verfolgen.

Das Bewegungsgesetz für einzelne Punkte von G ist dasselbe wie für die Gerade G: jeder Punkt muss um A rotiren und dabei gleichmässig in der Richtung von A vorrücken. Da dies das Bildungsgesetz der cylindrischen Schraubenlinie (Helix) ist, so beschreibt jeder Punkt der Geraden G eine Helix und die ganze Fläche besteht daher aus einem System cylindrischer Schraubenlinien mit der Achse A und mit gleichen Ganghöhen h, denn jeder Punkt muss bei einer einmaligen Umdrehung um dasselbe Stück wie die Gerade G vorrücken. Weil die Entfernung der erzeugenden Punkte von A ungeändert bleibt, so muss der Punkt p (p_4 in der Figur), welcher der Achse A am nächsten liegt, auch immer der nächste bleiben und sein Weg begrenzt daher gleichsam die Fläche nach innen zu und bildet die Einziehungs- oder Kehllinie der Fläche. Ihre horizontale Projection ist zugleich die horizontale Contour der Fläche.

Um die erzeugende Gerade G in einzelnen Lagen darzustellen, hat man zu bedenken:

1. Dass G um A rotirt, also immer die gleiche Entfernung von A behält (die horizontale Projection G' muss daher von A' immer um $A'p'$ abstehen) und ein Rotationskegel (Richtungskegel) mit der Achsenrichtung A existiren muss, dessen Erzeugende mit entsprechenden Erzeugenden der Schraubenregelfläche parallel sind.

2. Dass jeder Punkt der Geraden G eine Helix mit der Achse A und der Ganghöhe h beschreibt. Der Punkt p z. B. durchläuft die Linie $p_0 p_1 p_2 \ldots$. Man wird deshalb, um G in irgend einer Lage zu bestimmen, aus A' den Kreis $p_0' p_1' p_2' \ldots$ beschreiben, einen Rotationskegel Sk mit der beliebigen Spitze S und der Achsenrichtung A zeichnen, dessen eine Erzeugende g mit G parallel ist, die cylindrische Schraubenlinie $p_0 p_1 p_2 \ldots$ construiren, und nun G_n unter den Bedingungen bestimmen, dass G_n' den Kreis $p_0' p_1' \ldots$ tangirt, einer Erzeugenden g_n des Kegels Sk parallel ist und durch den Punkt p_n gehen muss.

In ihrer Gesammtheit bilden die Geraden G_n die verlangte Schraubenregelfläche.

Man sieht, dass G nach einer einmaligen Rotation wieder die Richtung der Ausgangslage hat und nur um h erhöht liegt; deshalb wird die Fläche aus einer Reihe paralleler Streifen bestehen, die einander congruent sind und von denen jeder um h höher liegt als der vorhergehende. Aus diesem Grunde haben wir in der Figur nur den durch einmalige Umdrehung der Geraden G entstandenen Flächenteil $G_0 G_{16}$ gezeichnet und G oder G_4 in der Bewegung nach abwärts bis G_0, in der Bewegung nach aufwärts bis G_{16} verfolgt.

Die Fläche geht eigentlich ins Unendliche und besitzt dort einen vielfachen Kreis mit dem Mittelpunkte in A, weil ihr Richtungskegel ein Rotationskegel mit der Achsenrichtung A ist. In diesem unendlichen Kreise begegnen sich die einzelnen Parallelstreifen. In der Figur haben wir die Fläche begrenzt: durch die Spur in der horizontalen Bildebene und durch die Schraubenlinie $\mathfrak{P}_0\mathfrak{P}_1 \ldots \mathfrak{P}_{16}$, welche der Punkt $\mathfrak{P}$ der Geraden G beschreibt.

Die Spur der Fläche in der horizontalen Bildebene ergibt sich als Verbindungslinie der Schnitte einzelner Erzeugenden mit der horizontalen Bildebene, kann aber auch direct und unabhängig von den Flächenerzeugenden construirt werden.

Ist α der Neigungswinkel der Geraden $G(G_4)$ mit der horizontalen Projectionsebene und h_n die Höhe des Punktes p_n über der horizontalen Bildebene, so haben wir, weil die Horizontalneigung von G bei der Bewegung constant bleibt: $p_4's_4' = h_4 \operatorname{cotg}\alpha$ und $p_n's_n' = h_n \operatorname{cotg}\alpha$. Daraus folgt: $p_n's_n' : p_4's_4' = h_n : h_4$ oder $(p_n's_n' - p_4's_4') : p_4's_4' = (h_n - h_4) : h_4$. Wächst also z. B. h_4 um $\frac{h_4}{r}$, so nimmt auch der Abstand des betreffenden Spurpunktes s_n vom Berührungspunkte p_n' um $\frac{p_4's_4'}{r}$ zu. In der Figur ist die Höhenzunahme von Punkt zu Punkt gleich $\frac{h_4}{4} = \frac{h}{16}$, es wächst daher auch die Strecke $p's'$ von Punkt zu Punkt um $\frac{p_4's_4'}{4}$.

Der Spurpunkt der Erzeugenden jedes Punktes und die Horizontalspur der Fläche lassen sich daher genau ermitteln. Damit ist eine neue Methode zur Construction einzelner Erzeugenden gegeben.

Die horizontale Projection der Fläche wäre sonach vollständig bekannt: der Kreis $p_0'p_1'p_2' \ldots$ bildet die Contour, die Curve $s_0s_1s_2 \ldots$ die Spur in der horizontalen Projectionsebene. Die verticale Projection der Fläche wäre in so fern bestimmt, als die von den verticalen Projection der Erzeugenden umhüllten Curven die Aufriss-Contour bilden müssen — wie man einzelne Punkte dieser Contour findet, wird später gezeigt werden.

Die Ebene der Tangenten eines Flächenpunktes ist im allgemeinen bestimmt durch zwei diesen Punkt enthaltene Flächentangenten. Da bei allen Regelflächen die Erzeugende eines Punktes P für diesen auch eine Tangente u. z. eine Haupttangente der Fläche ist, so brauchen wir zur Bestimmung der Tangentenebene des Punktes P nur noch eine daselbst berührende Gerade zu suchen.

Am leichtesten wird sich jene Gerade finden lassen, welche die von P bei der Drehung erzeugte Helix in P tangirt. Diese Schraubenlinie projicirt sich horizontal als Kreis, und ihre Berührungsgeraden erscheinen im Grundriss als Tangenten dieses Kreises; für die Punkte p fällt also die horizontale Projection der Erzeugenden und die der Tangenten ihrer Schraubenlinie in eine Gerade, woraus folgt, dass die Berührungsebenen der Punkte p auf der horizontalen Bildebene senkrecht stehen. Dies zeigt uns wieder, dass die Helix $p_0 p_1 p_2 \ldots$ eine Contourlinie der Fläche ist.

Für einen beliebigen andern Punkt P hat man die Tangente $P\sigma$ der durch ihn gehenden Schraubenlinie zu construiren; die Erzeugende von P und $P\sigma$ bestimmen die Berührungsebene. In der Figur liegt P auf der Helix, welche s_4 beschreibt, P_1 auf der Schraubenlinie des Punktes s_6, weshalb die Spurpunkte σ und σ_1 beziehungsweise von P' und P_1' um die Länge der Bögen $s_4'P'$ und $s_6'P_1'$ abstehen. Hat man aber die Berührungsebenen von drei Punkten einer Erzeugenden G, dann kann man zu jedem Punkte derselben die entsprechende Tangentenebene, und ebenfalls den Berührungspunkt jeder durch G gehenden Ebene bestimmen, indem man sich auf den bekannten Satz stützt, dass das Doppelverhältniss von vier Tangentenebenen, welche durch dieselbe Erzeugende gehen, dem Doppelverhältnisse ihrer vier Berührungspunkte gleich ist. So wurden in der Figur aus den Tangentenebenen $E^{p_7} E^P$ und E^{P_1} der drei Punkte p_7, P und P_1 die Berührungsebene des Punktes s_7 und der Berührungspunkt C jener Ebene bestimmt, welche durch G_7 normal zur verticalen Bildebene gelegt werden kann, indem im ersten Falle der Strahl $E_h^{s_7}$ des Büschels $E_h^{p_7} E_h^P E_h^{P_1}$ so gefunden wurde, dass dieses Büschel projectivisch der Punktreihe $s_7 p_7 P P_1$ ist und im zweiten Falle jener Punkt C' der Punktreihe $p_7' P' P_1'$ gesucht wurde, welcher dem zur Projectionsachse senkrechten Strahle des projectivischen Strahlenbüschels der Horizontalspuren der drei Tangentenebenen entspricht. Der so erhaltene Punkt C ist ein Punkt der verticalen Contour; G_7'' wird also in C'' die Umrisslinie im Aufriss berühren.

Es kann aber auch der Umstand mit Vorteil ausgenützt werden, dass die Berührungsebene des unendlichen Punktes einer Flächenerzeugenden (d. i. die asymptotische Ebene dieser Erzeugenden) zur Tangentenebene der entsprechenden Erzeugenden des Richtungskegels parallel ist. Die Trace $E_h^{s_{15}}$ der Ebene, welche die Fläche im Punkte s_{15} berührt, und der Punkt c, in welchem die Erzeugende G_{15} die verticale Contour tangirt, wurden in der Figur mit Benutzung der Tangentenebenen in den Punkten p_{15}, P_0 und des unendlichen Punktes von G_{15} bestimmt.

Der Richtungskegel *Sk* hat zwei Berührungsebenen — längst den Erzeugenden g_4 und g_{12} — welche auf der verticalen Bildebene senkrecht stehen: es sind daher auch die asymptotischen Ebenen jener Flächenerzeugenden vertical projicirend, welche die Richtung der Geraden g_4 und g_{12} haben. Es sind das die Flächenerzeugenden G_4, G_{12}, G_{20} etc.; diese berühren also die Aufrisscontour in ihrem unendlich fernen Punkte, sind daher Asymptoten der verticalen Contour. Betrachten wir unter diesem Gesichtspunkte die Aufrisscontour näher, so erkennen wir in ihr eine zusammenhängende Linie, die z. B. nach links gehend dem unendlichen Punkte von G_4 sich nähert, von diesem rechts wiederkehrt und nun auf der rechten Flächenseite bis zum unendlichen Punkte der Geraden G_{12} sich ausdehnt und von da wieder auf die linke Flächenseite übergeht etc.

Mit Benutzung der asymptotischen Ebenen der einzelnen Erzeugenden können wir auch jene Punkte N der Erzeugenden auffinden, welche ihrer Nachbarerzeugenden am nächsten liegen, und in ihrer Gesammtheit die Strictionslinie der Regelfläche bilden. Die Tangentialebenen solcher Punkte N müssen nämlich Normalebenen jener asymptotischen Ebenen sein, die den durch N gehenden Erzeugenden entsprechen. In unserem Falle sind die asymptotischen Ebenen den Berührungsebenen eines Rotationskegels parallel, also haben die Tangentialebenen der Punkte N mit jenen Normalebenen des Richtungskegels gleiche Stellung, welche durch eine seiner Erzeugenden gehen. Solche Ebenen stehen hier aber auf der horizontalen Bildebene senkrecht. Da wir als die Berührungspunkte horizontal projicirender Ebenen schon früher die Punkte $p_0 p_1 p_2 \ldots$ bezeichnet haben, so erkennen wir in der Helix $p_0 p_1 p_2 \ldots$ auch die Strictionslinie der Regelfläche. Das konnte man wohl gleich vermuten, weil der Punkt p als der Rotationsachse A am nächsten liegend, den kleinsten Weg beschreiben wird, um zu seinem Nachbarpunkte zu gelangen.

Wären die Berührungspunkte jener Tangentenebenen der Fläche zu suchen, welche durch einen gegebenen Punkt L gehen, dann würde man durch L und einzelne Flächenerzeugende Ebenen legen und nach Obigem die Berührungspunkte ermittteln. Durch einen stetigen Zug verbunden geben diese Punkte die Selbstschattengrenze der Fläche für die centrale Beleuchtung aus dem Punkte L.

Bei Parallelbeleuchtung in der Richtung der Geraden l wird die Schattengrenze auf der Fläche gefunden, indem man durch einzelne Flächenerzeugende Ebenen legt, welche zum Lichtstrahle l parallel sind, ihre Berührungspunkte sucht und diese verbindet. Will man die Asymptoten dieser Selbstschattengrenze haben, dann legt man parallel l berührende Ebenen an den Richtungskegel *Sk* und findet

in den Berührungskanten die Richtung solcher Erzeugenden, deren unendliche Punkte der Selbstschattengrenze angehören.

Die ebenen Schnitte der Schraubenregelfläche ergeben sich als die Curven der Schnittpunkte einzelner Erzeugenden mit der Schnittebene E. Die Tangente der Schnittlinie in einem Punkte wird als die Durchschnittsgerade der Ebene E mit der Tangentialebene der Fläche in diesem Punkte erhalten; ihre Asymptoten construirt man nach demselben Grundsatze. Die Ebene e, welche durch S parallel zu E gelegt wird, schneidet den Richtungskegel Sk im allgemeinen nach zwei Geraden, die den Flächenerzeugenden parallel sind, deren asymptotische Ebenen der Ebene E in den verlangten Asymptoten begegnen. So wird z. B. die Spur der Fläche in der horizontalen Bildebene gar keine reelle Asymptote besitzen — wir haben deshalb nach Obigem die Tangenten derselben in den Punkten s_7 und s_{15} construirt — während die Flächenspur Σ in der verticalen Projectionsebene die Geraden $G_4''G_{12}''G_{20}''$ etc. zu Asymptoten haben muss.

Eisenstadt im Juli 1881.

VII.

Zur Theorie der Kegelschnitte.

Von

Eduard Mahler.

In der Abhandlung „Ueber gewisse Systeme von Kegelschnitten, die mit einander projectivisch sind, und deren Erzeugniss" *) zeigten wir, dass, wenn durch $K-\lambda K'=0$ ein Kegelschnittbüschel gegeben ist, und $F=0$ die Gleichung jenes Kegelschnittes ist, der die Eigenschaft hat, dass das von irgend einem seiner Punkte an $K=0$ gezogene Tangentenpaar harmonisch geteilt wird durch das von diesem Punkte an $K'=0$ gezogene Tangentenpaar, durch

$$2K-\lambda\left[K\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\frac{1}{\alpha_3}\right)+K'\right]+\frac{\lambda^2}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}F=0 \qquad \text{A)}$$

ein System von Kegelschnitten gegeben ist, von der Beschaffenheit, dass das von einem beliebigen Punkte irgend eines Kegelschnittes des Systems an den demselben λ-Werte entsprechenden Kegelschnitt des Büschels gezogene Tangentenpaar harmonisch geteilt wird durch das von diesem Punkte an $K=0$ gezogene Tangentenpaar. Wir sahen, dass es ebenso ein System von Kegelschnitten gibt, das diese Eigenschaft bezüglich $K'=0$ besitzt und durch die Gleichung:

$$F-\lambda[K'(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)+K]+2\lambda^2K'=0 \qquad \text{B)}$$

gegeben ist.

Wir suchten auch daselbst das Erzeugniss des Systems A) und des gegebenen Kegelschnittbüschels, sowie das Erzeugniss des Sy-

---

*) Archiv der Math. u. Phys. Bd. LXVI. pag. 358.

stems A) und des Systems B) und fanden gewisse Beziehungen derselben. Nun haben wir hier die Aufgabe allgemein gefasst, indem wir jenes System von Curven suchten, welches die Eigenschaft besitzt, dass das von einem beliebigen Punkte irgend einer Curve des Systems an den dieser entsprechenden Kegelschnitt des Büschels $K - \lambda K' = 0$ gezogene Tangentenpaar durch das von diesem Punkte an einen der Fundamentalkegelschnitte (K oder K') des Büschels gezogene Tangentenpaar in einem bestimmten constanten Doppelverhältnisse d [die in der erwähnten Abhandlung gegebene Aufgabe entspricht dem spec. Werte $d = -1$] geteilt wird. Das betreffende System ist ein System von Curven 4. Ordnung, von denen jede von der Eigenschaft ist, dass ihre Schnittpunkte mit den Seiten des den Kegelschnitten des Büschels gem. sich selbst conjug. Dreiecks sich in 2 Punktepaare gruppiren, die durch die Ecken jenes Dreiecks harmonisch geteilt werden.

Es seien wieder:

$$K \equiv \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2 = 0 \quad \text{und}$$
$$K_1 \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$$

die Gleichungen der Fundamentalelemente eines durch $K - \lambda K_1 = 0$ gegebenen Kegelschnittbüschels, so ist das von einem Punkte x' an $K = 0$ gezogene Tangentenpaar gegeben durch:

$$(\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2)(\alpha_1 x_1'^2 + \alpha_2 x_2'^2 + \alpha_3 x_3'^2) - (\alpha_1 x_1 x_1' + \alpha_2 x_2 x_2' + \alpha_3 x_3 x_3')^2 = 0 \qquad \text{C)}$$

und das von diesem Punkte an $K - \lambda K_1 = 0$ gezogene Tangentenpaar ist gegeben durch:

$$[(\alpha_1 - \lambda)x_1^2 + (\alpha_2 - \lambda)x_2^2 + (\alpha_3 - \lambda)x_3^2] \times [(\alpha_1 - \lambda)x_1'^2 + (\alpha_2 - \lambda)x_2'^2 + (\alpha_3 - \lambda)x_3'^2] - [(\alpha_1 - \lambda)x_1 x_1' + (\alpha_2 - \lambda)x_2 x_2' + (\alpha_3 - \lambda)x_3 x_3']^2 = 0 \qquad \text{D)}$$

Nun soll das durch D) gegebene Tangentenpaar durch das Tangentenpaar C) in einem constanten Doppelverhältnisse d geteilt werden, oder — was dasselbe ist — es soll das durch

$$[(\alpha_1 - \lambda)x_1^2 + (\alpha_2 - \lambda)x_2^2].[(\alpha_1 - \lambda)x_1'^2 + (\alpha_2 - \lambda)x_2'^2 + (\alpha_3 - \lambda)x_3'^2] - [(\alpha_1 - \lambda)x_1 x_1' + (\alpha_2 - \lambda)x_2 x_2']^2 = 0 \qquad \text{D')}$$

gegebene Punktepaar durch das Punktepaar

$$[\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2].[\alpha_1 x_1'^2 + \alpha_2 x_2'^2 + \alpha_3 x_3'^2] - [\alpha_1 x_1 x_1' + \alpha_2 x_2 x_2']^2 = 0 \qquad \text{C')}$$

in einem constanten Doppelverhältnisse d geteilt werden.

Es ist dies der Fall, wenn

$$\Theta^2 - c\Delta\Delta' = 0 \qquad \text{E)}$$

ist, wobei Θ, Δ, Δ' und c folgende Bedeutung haben:

$$\begin{aligned}\Theta = {} & \alpha_1(\alpha_2 x_2'^2 + \alpha_3 x_3'^2)(\alpha_2 - \lambda)\left[(\alpha_1-\lambda)x_1'^2 + (\alpha_3-\lambda)x_3'^2\right] \\ & + \alpha_2(\alpha_3 x_3'^2 + \alpha_1 x_1'^2)(\alpha_1 - \lambda)\left[(\alpha_2-\lambda)x_2'^2 + (\alpha_3-\lambda)x_3'^2\right] \\ & - 2\alpha_1\alpha_2(\alpha_1-\lambda)(\alpha_2-\lambda)x_1'^2 x_2'^2\end{aligned}$$

also gleich dem mit $x_3'^2$ multiplicirten Polynome, das gleich Null gesetzt, die Gleichung B) auf pag. 359 des LXVI. Bandes des Archiv f. Math. u. Phys. gibt;

Δ ist die Discriminante von D') und somit gegeben durch:

$$\begin{aligned}\Delta = (\alpha_1-\lambda)(\alpha_2-\lambda)\left[(\alpha_2-\lambda)x_2'^2 + (\alpha_3-\lambda)x_3'^2\right].\left[(\alpha_1-\lambda)x_1'^2 + (\alpha_3-\lambda)x_3'^2\right] \\ - (\alpha_1-\lambda)^2(\alpha_2-\lambda)^2 x_1'^2 x_2'^2;\end{aligned}$$

Δ' ist die Discriminante von C') und somit gegeben durch:

$$\Delta' = \alpha_1\alpha_2\left[\alpha_2 x_2'^2 + \alpha_3 x_3'^2\right].\left[\alpha_1 x_1'^2 + \alpha_3 x_3'^2\right] - \alpha_1^2\alpha_2^2 x_1'^2 x_2'^2;$$

endlich $c = 4\left(\frac{1+d}{1-d}\right)^2$.

Nun ist aber:

$$\Delta\Delta' = x_3'^4 \alpha_1\alpha_2\alpha_3(\alpha_1-\lambda)(\alpha_2-\lambda)(\alpha_3-\lambda)K'(K'-\lambda K_1'),$$

wenn das Substitutionsresultat von x' in K mit K' und das Substitutionsresultat von x' in K_1 mit K_1' bezeichnet wird.

Wird nun $\Theta^2 - c\Delta\Delta' = 0$ durch $x_3'^4$ dividirt und

$$c\,\alpha_1\alpha_2\alpha_3(\alpha_1-\lambda)(\alpha_2-\lambda)(\alpha_3-\lambda) = \mu$$

gesetzt, so erhalten wir folgende Gleichung 4. Grades in x' als Gleichung des gesuchten Systems:

$$\Theta^2 - \mu K'(K' - \lambda K_1') = 0$$

oder wenn statt x' x gesetzt wird:

$$\Theta^2 - \mu K(K - \lambda K_1) = 0 \qquad \text{E')}$$

Jedem bestimmten Werte von λ, also jedem bestimmten Kegelschnitte des Büschels $K - \lambda K_1 = 0$ entspricht ein bestimmter Wert von μ und somit eine bestimmte Curve 4. Ordnung des Systems E').

Denkt man sich nun dem λ und somit dem μ einen bestimmten Wert beigelegt, so haben wir es mit einer bestimmten Curve des

Systems E′) zu tun. Nun kommen aber in der Gleichung dieser Curve die Grössen x_1, x_2, x_3 blos im 4. und 2. Grade vor, d. h. die Gleichung dieser Curve ist so beschaffen, dass, wenn sie mit $x_3 = 0$ verbunden wird und wir somit die Schnittpunkte dieser Curve mit der Fundamentaldreiecksseite $x_3 = 0$ suchen, wir eine Gleichung 4. Grades in x_1 und x_2 erhalten, welche in $\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2$ quadratisch ist. Sind also die Lösungen dieser Gleichung α_1^2 und α_2^2, so haben wir für $\frac{x}{x_2}$ folgende 4 Werte:

$$\frac{x_1}{x_2} = \begin{cases} \pm \alpha_1 \\ \pm \alpha_2 \end{cases}$$

d. h. die 4 Schnittpunkte einer Curve des Systems E′) mit einer Fundamentaldreiecksseite gruppiren sich in 2 Punktepaare, die durch die Ecken jenes Dreiecks harmonisch geteilt werden. Wir haben daher folgenden Satz:

„Zu jedem Kegelschnittbüschel gehört ein System von Curven „4. Ordnung, das so beschaffen ist, dass jedem Kegelschnitte des „Büschels eine Curve des Systems von der Eigenschaft entspricht, „dass das von einem beliebigen Punkte der Curve 4. Ordnung an „den entsprechenden Kegelschnitt gezogene Tangentenpaar durch das „von diesem Punkte an einen der Fundamentalelemente des Kegel-„schnittbüschels gezogene Tangentenpaar in einem constanten Doppel-„verhältnisse geteilt wird. Ferner hat jede dieser Curven 4. Ordnung „die Eigenschaft, dass ihre Schnittpunkte mit den Seiten des den „Kegelschnitten des Büschels gem. sich selbst conjug. Dreiecks sich „in 2 Punktepaare gruppiren, die durch die Ecken jenes Dreiecks „harmonisch geteilt werden, so dass die Schnittpunkte jener Curven „4. Ordnung auf jeder Seite des den Kegelschnitten des Büschels „gem. sich selbst conjug. Dreiecks Punktepaare einer Involution „bilden, deren Doppelpunkte die Dreiecksecken sind."

Einem bestimmten Werte von d entspricht — wie wir sahen — bei einem Parameter λ ein System von Curven 4. Ordnung. Einem anderen Werte von d würde beim selben Parameter λ ein anderes System von Curven 4. Ordnung entsprechen. Legt man nun dem d der Reihe nach alle unendlich vielen zwischen $-\infty$ und $+\infty$ gelegenen Werte bei, und sucht zu jedem dieser Werte von d das dem Parameter λ entsprechende System von Curven 4. Ordnung, so erhält man unendlich viele Systeme von Curven 4. Ordnung der oben genannten Eigenschaft.

So entspricht dem Werte $d = -1$ der Wert

also
$$c = 0$$
$$\mu = 0$$

und daher das System $\Theta^2 = 0$ oder $\Theta = 0$, d. i. das auf pag. 359 des LXVI. Bandes dieser Zeitschrift gefundene System von Curven, was auch natürlich ist, da $d = -1$ dem Falle der harmonischen Teilung entspricht.

Sucht man das dem Werte $d = +1$ entsprechende System, so erhält man, weil $c = 4\left(\frac{1+d}{1-d}\right)^2$ ist, $c = \infty$, also $\mu = \infty$, und somit:

$$K(K - \lambda K_1) = 0 \qquad \text{F)}$$

als gesuchtes System von Curven 4. Ordnung der oben genannten Eigenschaft.

Wir sagten, dass jedem Werte von λ ein bestimmter Kegelschnitt des Büschels und eine bestimmte Curve 4. Ordnung des Systems entspricht; welches ist nun die dem Werte $\lambda = \infty$ oder die dem Kegelschnitte $K_1 = 0$ entsprechende Curve des Systems E′)?

Zu diesem Behufe dividiren wir Gleichung E′) durch λ^4 und setzen im Resultate $\lambda = \infty$. Wird durch λ^4 dividirt, so haben wir:

$$\frac{\Theta^2}{\lambda^4} - \frac{\mu}{\lambda^3} K \left(\frac{K}{\lambda} - K_1\right) = 0$$

und wird $\lambda = \infty$ gesetzt, so haben wir:

$$F^2 - c\alpha_1\alpha_2\alpha_3 KK_1 = 0 \qquad \text{G)}$$

als Gleichung der dem Werte $\lambda = \infty$ d. i. dem Kegelschnitte $K_1 = 0$ entsprechenden Curve 4. Ordnung des Systems E′), wobei F den linken Teil der Gleichung C) auf pag. 360 des LXVI. Bandes dieser Zeitschrift bedeutet und somit $F = 0$ die Gleichung jenes Kegelschnittes ist, der der Ort des Punktes ist, dessen Tangentenpaar an $K_1 = 0$ harmonisch geteilt wird durch das an $K = 0$ gezogene Tangentenpaar.

Es ist klar, dass es ebenso ein zweites System von Curven 4. Ordnung gibt, das bezüglich $K' = 0$ dem Kegelschnittbüschel gegenüber dieselbe Rolle spielt, wie das durch E′) gegebene System bezüglich $K = 0$.

Die Gleichung dieses Systems wird lauten:

$$\Theta_1^2 - \mu_1 K_1(K - \lambda K_1) = 0 \qquad \text{H)}$$

wobei Θ_1 das mit x_3^2 multiplicirte Polynom

$$\begin{aligned}&x_1^2\{(\alpha_3-\lambda)+(\alpha_2-\lambda)\}(\alpha_1-\lambda)\\+&x_2^2\{(\alpha_3-\lambda)+(\alpha_1-\lambda)\}(\alpha_2-\lambda)\\+&x_3^2\{(\alpha_1-\lambda)+(\alpha_2-\lambda)\}(\alpha_3-\lambda)\\=&F-\lambda[K+K_1(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)]+2\lambda^2K_1\end{aligned}$$

ist, und somit gleich Null gesetzt die Gleichung eines Systems von Kegelschnitten ist, das bezüglich $K_1=0$ dem Büschel $K-\lambda K_1=0$ gegenüber dieselbe Rolle spielt, wie das durch $\Theta=0$ gegebene System bezüglich $K=0$;

μ_1 ist gegeben durch:

$$\mu_1=c(\alpha_1-\lambda).(\alpha_2-\lambda).(\alpha_3-\lambda)$$

wobei c wie früher $4\left(\frac{1+d}{1-d}\right)^2$ bedeutet.

Die dem Werte $\lambda=0$, also dem Kegelschnitte $K=0$ entsprechende Curve des Systems H) ist gegeben durch:

$$F^2-c\alpha_1\alpha_2\alpha_3KK_1=0$$

und ist somit identisch mit der dem Werte $\lambda=\infty$ entsprechenden Curve des Systems E′).

Wir sahen, dass jedem Werte von λ, also jedem Kegelschnitte des Büschels, eine Curve des Systems E′) und eine Curve des Systems H) entspricht. Fassen wir nun 2 demselben Kegelschnitte des Büschels entsprechende Curven der Systeme E′) und H) als e i n a n d e r e n t s p r e c h e n d auf, so mag es von Interesse sein, nach dem Orte zu fragen, welchen die beiden genannten Systeme E′) und H) bilden.

Die Gleichung des ersten Systems war:

$$\Theta^2-\mu K(K-\lambda K_1)=0.$$

Die Gleichung des zweiten Systems war: .

$$\Theta_1^2-\mu_1K_1(K-\lambda K_1)=0.$$

Wir haben nun aus diesen beiden Gleichungen λ zu eliminiren.

Bevor wir dies tun, haben wir beide Gleichungen auf nach Potenzen von λ geordnete Formen zu bringen. Wir erhalten dann 2 Gleichungen 4. Grades in λ, und wird aus diesen λ eliminirt, so erhalten wir eine Gleichung 32. Grades in x_1, x_2, x_3 (welche wir nach der Methode von Sylvester sehr leicht aufschreiben könnten, aber

ihres grossen Umfanges halber hier nicht bringen wollen), welches die Gleichung des verlangten Erzeugnisses ist.

Nachdem aber in der Gleichung dieses Erzeugnisses nur gerade Potenzen von x_1, x_2, x_3 vorkommen (indem die Grössen K, K_1, F, die in der Gleichung vorkommen, solche Functionen 2. Grades sind, die keine ungerade Potenz von x_1, x_2, x_3 enthalten), so bekommen wir, indem wir $x_3 = 0$ setzen und somit die Schnittpunkte der Curve mit der betreffenden Seite des Fundamentaldreiecks suchen, zur Bestimmung der letzteren eine Gleichung 16. Grades in $\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2$; d. h. die 32 Schnittpunkte gruppiren sich in 16 Punktepaare, von denen ein jedes durch die Ecken des Dreiecks harmonisch geteilt werden.

Wir haben somit den Satz:

„Wenn man das Erzeugniss jener 2 Systeme von Curven 4. Ord-
„nung sucht, von denen das eine so beschaffen ist, dass das von
„einem beliebigen Punkte irgend einer Curve dieses Systems an den
„entsprechenden Kegelschnitt des Büschels $K - \lambda K_1 = 0$ gezogene
„Tangentenpaar in einem constanten Doppelverhältnisse
„geteilt wird durch das von diesem Punkte an $K = 0$ gezogene
„Tangentenpaar und das andere System dieselbe Eigenschaft gegen-
„über dem Büschel bezüglich $K_1 = 0$ hat, so bekommt man eine
„Curve 32. Ordnung, die die Seiten des dem gegebenen Büschel sich
„selbst conjugirenden Dreiecks in 16 Punktepaaren einer Involution
„schneidet, deren Doppelpunkte die Dreiecksecken sind."

Wien im Juli 1881.

VIII.

Bildungs-Gesetz periodischer Brüche in bestimmten Zahlensystemen.

Von

Karl Broda.

Es sei die Primzahl p der Nenner eines gemeinen Bruches, r die Stellenzahl des entsprechenden periodischen Decimalbruches, a die Periode und x die Grundzahl des Zahlensystemes, so ist bekanntlich:

$$\frac{1}{p} = \frac{a}{x^r - 1}$$

also

$$x^r - 1 = ap$$

daher

$$x^r \equiv +1 [\mathrm{md}\, p] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

Durch Lösung dieser Congruenz erhält man für x die Grundzahlen derjenigen Zahlensysteme, die für die $p$tel .., r Stellen erfordern.

Es sei die Primzahl $p = 7$ und die Stellenzahl $r = 6$, so ist:

$$x^6 \equiv +1 [\mathrm{md}\, p]$$

zu lösen. Es ist

$$x^6 - 1 = (x^3 + 1)(x^3 - 1) \equiv 0 [\mathrm{md}\, 7].$$

Beachtet man, dass für $x = 10$, die 7tel ... 6 Stellen liefern, so kann nur

$$x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1) \equiv 0 [\mathrm{md}\, 7]$$

sein, und da $x + 1$ prim gegen 7 ist, so ergibt sich nach einfacher Reduction

$$x^2 - x + 1 \equiv 0 [\text{md } 7] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

zur Lösung. Man erhält leicht aus 2)

$$(2x - 1)^2 \equiv 4 [\text{md } 7],$$

es ist weiter

$$2x - 1 \equiv \pm 2 [\text{md } 7],$$

woraus die Werte von x

$$x_1 \equiv -2 [\text{md } 7] \quad \text{und} \quad x_2 \equiv +3 [\text{md } 7]$$

sich ergeben.

Ist nun u irgend eine ganze positive Zahl, so kann x_1 und x_2 durch die Gleichungen ausgedrückt werden:

$$x_1 = 7n - 2$$
$$x_2 = 7u + 3.$$

x_1 und x_2 sind die Grundzahlen derjenigen Zahlensysteme, in denen die 7tel sechs Stellen besitzen.

Beachtet man, dass für $x_1 \ldots 7u + 5$ geschrieben werden kann, so ist man im Stande, für die 7tel den periodischen Bruch im $7u + 5$ und im $7u + 3$ teiligen Systeme auszudrücken. Es ist nach einfacher Verwandlung z. B.

$$\frac{1}{7}^{*} = 0 \cdot (u)(5u+3)(4u+2)(6u+4)(2u+1)(3u+2) \text{ im } 7u+5$$

und

$$\frac{1}{7} = 0 \cdot (u)(3u+1)(2u)(6u+2)(4u+1)(5u+2) \ldots \text{ im } 7u+3$$

teiligen Systeme. Die unmittelbare Benutzung des in x_1 gefundenen Wertes unterliegt keiner Schwierigkeit, nur musste eine Erweiterung des Zahlensystems vorgenommen werden.

Schreibt man in x_1 und x_2, für u der Reihe nach die Werte 1, 2, 3 ... so erhält man für x_1 ... 5, 12, 19 ... für x_2 ... 10, 17, 24 ...; es müssen daher die 7tel im 5, 12 ... und im 10, 17 ... teiligen Systeme 6 Stellen besitzen.

Bei directer Verwandlung ist:

$$\frac{1}{7} = 0 \cdot 186(10)35 \ldots \text{ im } 12 \quad \text{und} \quad 0 \cdot 274(14)9(12) \ldots$$

---

*) Diejenigen Brüche, bei denen kein Zahlensystem angegeben wurde, sind im dekadischen Systeme geschrieben.

Die eingeklammerten Ausdrücke sind als je eine Ziffer anzusehen.

im 17 teiligen Systeme; schreibt man in den ersten der oben gefundenen allgemeinen Werte für $\frac{1}{7}$ statt $u = 1$, in den zweiten $u = 2$, so erhält man sofort die durch directe Rechnung sich ergebenden Perioden.

Das Ergänzungsgesetz im $7u + 5$ und $7u + 3$ teiligen Systeme ist durch die Gleichungen gegeben

$$u + (6u + 4) = (5u + 3) + (2u + 1) = (4u + 2) + (3u + 2) = 7u + 4$$
$$u + (6u + 2) = (3u + 1) + (4u + 1) = 2u + (5u + 2) = 7u + 2.$$

Es findet daher immer die Ergänzung zu der um 1 verminderten Grundzahl des Zahlensystemes statt; dem entsprechend ist in dem oben angewendeten 12 und 17 teiligem Systeme die Ergänzungszahl 11 und 16.

Schreibt man in die Relation 1), für r der Reihe nach die Werte: 1, 2, 3 . . ., so erhält man für $r = 1$

$$x = up + 1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 3)$$

für $r = 2$ ist

$$x^2 \equiv + 1 [\text{md}p] \quad \text{oder} \quad x \equiv \pm 1 [\text{md}p],$$

daher

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = up + 1 \\ x_2 = up - 1 \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 4)$$

Setzt man $r = 3$, so wird

$$x^3 \equiv + 1 [\text{md}p],$$

also

$$(x - 1)(x^2 + x + 1) \equiv 0 [\text{md}p],$$

woraus nach Lösung der Congruenz aus

$$x^2 + x + 1 \equiv 0 [\text{md}p]$$

die Werte

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = up + M \\ x_2 = up + N \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 5)$$

erhalten werden.

M und N ergeben sich durch Auflösung der Congruenz: u bedeutet wie früher eine ganze positive Zahl.

In ähnlicher Weise wären die Untersuchungen durchzuführen, wenn dem r ein anderer Wert erteilt würde.

Als Beispiel soll hier die Untersuchung für die 37tel und 31tel, die im dekadischen Systeme 3, beziehungsweise 15 Stellen liefern, durchgeführt werden.

Schreibt man in 3) für p ... 37 und dann 31, und nimmt, wie in allen folgenden Untersuchungen für u der Reihe nach die Werte 1, 2, 3 ... au, so werden die Grundzahlen der verlangten Systeme für die 37tel ... 38. 75 ... und für die 31tel, 32, 63 ... sein müssen, um nur eine Stelle zu liefern. Es hat z. B.

$\frac{1}{37} = 0 \cdot 1$ ... im 38 und $\frac{1}{31} = 0 \cdot 1$ ... im 32 t. Systeme je **eine** Stelle.

Aus Gleichung 4) folgt, wenn man nur den Wert von x_2 beachtet:

$$37u - 1 \quad \text{und} \quad 31u - 1.$$

Als Grundzahlen der Systeme ergeben sich daher 36, 73 ... und 30, 61 ... Es liefern daher sowol die 37tel im 36, 73 ... als auch die 31tel im 30, 61 ... teiligen Systeme je zwei Stellen.

Es ist $\frac{1}{37} = 0 \cdot 0(35)$ ... im 36 und $\frac{1}{31} = 0 \cdot 0(29)$ ... 30 teiligen Systeme.

Wird in Gleichung 5) für $p = 37$ geschrieben und M und N berechnet, so ist

$$x_1 = 37u - 11$$
$$x_2 = 37u + 10.$$

Dieselbe Rechnung für die 31tel durchgeführt, liefert:

$$x_1 = 31u + 5$$
$$x_2 = 31u - 6.$$

Für die 37tel ergeben sich, so wie für das dekadische System 3 Stellen, in den Systemen deren Grundzahlen 26, 63 ... und 47, 84 ... sind.

Für die 31tel sind dem entsprechend die Grundzahlen 36. 67 ... und 25, 56 ....

Es ist z. B.

$\frac{1}{37} = 0 \cdot 0(18)7$ ... im 26 und $0 \cdot 1(12)33$ ... im 47 teiligen Systeme. Im 25 und 36 teiligen Systeme ergeben sich für $\frac{1}{37}$ auch 3 Stellen, und zwar $0 \cdot 0(20)4$ ... und $0 \cdot 15(29)$ ...

Die Ziffersummen solcher unpaarer Decimalbrüche, die aus gemeinen Brüchen entstehen, deren Nenner 31, 37, 41, 43, 53, 67, 71,

79, 239, 271, ... sind, zeigen bemerkenswerte Eigenschaften, welche natürlich auch bei den hier in anderen Systemen geschriebenen periodischen Brüchen wahrnehmbar sind.

Ist nun p eine der angegebenen Primzahlen 31, 37, 41, ..., so übergeht Gleichung 1) in

$$x^{2r+1} \equiv +1 \,[\mathrm{md}\, p],$$

wobei $2r+1$ die Anzahl der Stellen anzeigt, es ist weiter

$$x^{2r+1} - 1 = (x-1)(x^{2r} + x^{2r-1} + {}^{2r-2} + \ldots + 1) \equiv 0 \,[\mathrm{md}\, p]$$

Im dekadischen Systeme ist nun $x - 1 = 9$ immer prim gegen p, also

$$x^{2r} + x^{2r-1} + x^{2r-2} + \ldots + 1 \equiv 0 \,[\mathrm{md}\, p].$$

Es ist ersichtlich, dass $x^{2r} + x^{2r-1} + \ldots + 1$, diese mit $2r+1$ Einsern geschriebene Zahl durch p teilbar erscheint.

Als Beispiel seien für $2r+1 = 5$ und $= 7$ die Zahlen 11111 und 111 1111 in Factoren zu zerlegen, wobei für den ersten Fall $r = 2$, für den zweiten $r = 3$ ist.

Untersucht man 11111, so ist:

$$10^5 \equiv 1 \,[\mathrm{md}\, 41],$$

da die 41tel 5 Stellen; dehnt man die Untersuchung auf 111 1111 aus, so wird ferner

$$10^7 \equiv +1 \,[\mathrm{md}\, 239]$$

sein müssen, da die 239tel 7 Stellen erfordern. Es ist also

$$10^5 - 1 = (10-1)(10^4 + 10^3 + 10^2 + 10 + 1) \equiv 0 \,[\mathrm{md}\, 41]$$

und

$$10^7 - 1 = (10-1)(10^6 + 10^5 + 10^4 + 10^3 + 10^2 + 10 + 1) \equiv 0 (\mathrm{md}\, 239].$$

Kürzt man durch 9, beide Congruenzen ab, so ist

$$10^4 + \ldots + 1 \equiv 0 \,[\mathrm{md}\, 41]$$

und

$$10^6 + \ldots + 1 \equiv 0 \,[\mathrm{md}\, 239].$$

Der Ausdruck $10^4 + \ldots + 1 = 11111$ muss daher ein Vielfaches von 41, und der Quotient $\frac{11111}{41} = 271$ muss eine Primzahl vorstellen, welche wieder eine fünfstellige Periode erfordert. — Aus $10^6 + \ldots + 1$ folgt, da die 239tel 7 Stellen bedingen, dass die 4649tel, da

$$1111111 = 4649 \cdot 239$$

Die hier geführten Untersuchungen können noch weiter ausgedehnt werden, und liefern, für die Beurteilung der Stellenzahl der Perioden, und für Zerlegung von bestimmten Zahlen in Factoren, bemerkenswerte Resultate *).

Es soll, um die Untersuchungen zu vereinfachen, die Beschränkung getroffen werden, dass p nur eine solche Primzahl vorstellt, die einen geradstelligen Decimalbruch bedingt.

Bildungs-Gesetz und Stellenzahl geradstelliger periodischer Brüche in bestimmten Zahlensystemen.

Bedeutet der Nenner p eine solche Primzahl, dass dem gemeinen Bruch ein geradstelliger Decimalbruch entspricht, bezeichnet A die halbe Periode, und r deren Stellenzahl, x die Grundzahl des Zahlensystems, so ist:

$$\frac{1}{p} = \frac{A+1}{x^r+1} \;{}^{**)}.$$

Nach einfacher Umformung ist:

$$x^r + 1 = (A+1)p$$

also

$$\frac{x^r+1}{p} = A+1$$

eine ganze Zahl, daher

$$x^r \equiv -1 [\mathrm{md}\, p[\quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 6)$$

Diese Relation liefert ein bequemes Mittel, um für eine bestimmte Stellenzahl und für die gegebene Primzahl p das entsprechende Zahlensystem zu bestimmen.

Setzt man, um zweistellige periodische Brüche zu betrachten, $r = 1$, so ist

$$x \equiv -1 [\mathrm{md}\, p],$$

also

$$x = up - 1,$$

welcher Wert mit dem unter 4) durch x_2 ausgedrückten identisch ist.

---

*) Für Zahlen, die durch eine gerade Anzahl Einser geschrieben werden, wurde von mir eine Methode angegeben, durch welche solche Zahlen leicht in Factoren zerlegt werden können. [Archiv, 63. Band, Seite 416].

**) Archiv, 56. Band, Seite 93.

Sucht man für die 7tel und 13tel diejenigen Systeme, durch welche 2 Stellen bedingt sind, so liefert für die 7tel $x = u - 1$ und für die 13tel $x = 13u - 1$ die Grundzahlen der verlangten Zahlensysteme. Man findet für die 7tel 6, 13 ... und für die 14tel 12, 25 ... —

Es haben wirklich $\frac{1}{7} = 0 \cdot 05 \ldots$ im 6 und $\frac{1}{13} = 0 \cdot 0\,(11)$ im 12 t. Systeme je 2 Stellen.

Nimmt man $p = 11$ an, so ist durch diese Relation $x = up - 1$ erwiesen, dass die 11tel im 10, 21, 32 ... teiligen Systeme nur zwei Stellen besitzen.

Man ist bei diesen Entwickelungen nur genötigt die halbe Periode durch gewöhnliche Division zu berechnen, da die Ergänzung zu $x - 1$ immer stattfinden muss.

Um dieselbe Betrachtung auf vierstellige Perioden auszudehnen, setze man in der Relation 6) $r = 2$, so wird sofort:

$$x^2 \equiv -1\,[\text{md}p],$$

also

$$x^2 = pu - 1 \quad \text{und} \quad x = \sqrt{up - 1}.$$

Führt man die Untersuchung z. B. für die 13tel und 17tel durch, so erhält man:

für die 13tel $\sqrt{13u - 1}$ und für die 17tel $\sqrt{17u - 1}$.

Wählt man u so, dass die Wurzeln rational werden, so ist für

$$u = 2 \quad \sqrt{13u - 1} = 5 \text{ und für } u = 5 \ldots \sqrt{13u - 1} = 8.$$

Die 13tel bedingen daher im 5 und 8 t. Systeme je 4 Stellen.

Es hat $\frac{1}{13} = 0 \cdot 0143 \ldots$ im 5 und $\frac{1}{13} = 0 \cdot 0473 \ldots$ im 8 t. Systeme je vier Stellen.

$\sqrt{17u - 1}$ wird rational, wenn man $u = 1$ oder auch 10 schreibt, hiedurch ergeben sich die Grundzahlen 4 und 13.

Es hat daher $\frac{1}{17} = 0 \cdot 0033 \ldots$ im 4 und $\frac{1}{17} = 0 \cdot 09\,(12)\,3 \ldots$ im 13 t. Systeme je vier Stellen.

Schreibt man $r = 3$ in Relation 6), so ist:

$$x^3 \equiv -1\,[\text{md}p].$$

Wird $p = 7$ gesetzt, so geht der Ausdruck über in

$$x^3 + 1 \equiv 0 [\text{md}\, 7],$$

wodurch die oben aufgestellte Behauptung, dass aus

$$x^6 \equiv +1 [\text{md}\, 7] \text{ die Congruenz } x^3 + 1 \equiv 0 [\text{md}\, 7]$$

sich ergibt, erwiesen ist.

Aus $x^3 + 1 \equiv 0 [\text{md}\, p]$ folgt nach einfacher Auflösung

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= up + P \\ x_2 &= up + Q \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 7)$$

wo P und Q von p abhängige, durch die Lösung der Congruenz sich ergebende Zahlen bedeuten.

Es sei $p = 13$, so ergibt sich durch Lösung der Congruenz

$$x^2 - x + 1 \equiv 0 [\text{md}\, 13]$$

$P = -3$ und $Q = 4$. Diese Werte in (7) geschrieben, liefern

$$x_1 = 13u - 3$$
$$x_2 = 13u + 4.$$

Die 13tel haben demnach im 10, 23, 36 ... und im 17, 30, 43 ... t. Systeme $2r = 6$ Stellen.

Es ist $\frac{1}{13} = 0 \cdot 076923 \ldots$ im 10 und $\frac{1}{13} = 0 \cdot 153 (15) (11) (13) \ldots$ im 17 t. Systeme.

Untersucht man die 8 stelligen Perioden, so muss in 6) $r = 4$ angenommen werden, es ist dann

$$x^4 \equiv -1 [\text{md}\, p],$$

daher

$$x^4 = up - 1.$$

Die Grundzahl derjenigen Zahlensysteme, wo alle $p$tel 8 Stellen besitzen, ist demnach bestimmt durch

$$x = \sqrt[4]{up - 1}.$$

Es wird z. B. für die 41tel und 313tel x rational, wenn $u = 2$ angenommen wird, wodurch sich 8 stellige Perioden für die 41tel im 3 und für die 313tel im 5 t. Systeme ergeben.

Es hat sowol $\frac{1}{41} = 0 \cdot 00012221 \ldots$ im 3, als auch $\frac{1}{313} = 0 \cdot 00014443 \ldots$ im 5 t. Systeme, je acht Stellen.

Wird $r = 5$, so folgt aus 6)

$$x^5 \equiv -1 [\text{md}\, p],$$

woraus sofort

$$x^5 = up - 1$$

wird. Es ist daher

$$x = \sqrt[5]{up - 1}$$

die Grundzahl desjenigen Systems, welches für die $p$tel 10 Stellen bedingt.

Untersucht man z. B. die 11tel, 61tel und 41tel, und setzt man für die 11tel 3, für die 61tel 4 und für die 41tel 25, so ist, da

$$\sqrt[5]{33 - 1} = 2, \quad \sqrt[5]{244 - 1} = 3 \quad \text{und} \quad \sqrt[5]{1025 - 1} = 4$$

ist, 2 die Grundzahl für die 11tel, 3 und 4 bedingen die Grundzahlen des Zahlensystemes für die 61tel und 41tel.

Es erscheinen wirklich bei den 11teln im 2, bei den 61teln im 3 und bei den 41teln im 4 t. Systeme je 10 Stellen. Es ist

$$\frac{1}{11} = 0 \cdot 0001011101 \ldots \text{ im } 2, \; \frac{1}{61} = 0 \cdot 0001022212 \ldots \text{ im } 3 \text{ und}$$

$$\frac{1}{41} = 0 \cdot 0012033213 \ldots \text{ im } 4 \text{ t. Systeme.}$$

Soll hier noch die Aufgabe erledigt werden: Welche Nenner von gemeinen Brüchen liefern im 3, 4 und 5 t. Systeme paare Decimalbrüche, und zwar 12 Stellen? — so ist in den Gleichungen

$$\sqrt[6]{up - 1} = 3, \quad \sqrt[6]{up - 1} = 4 \quad \text{und} \quad \sqrt[6]{up - 1} = 5$$

u und p so zu wählen, dass die 6ten Wurzeln der Reihe nach die rationalen Zahlen 3, 4 und 5 geben, es ist:

$$\sqrt[6]{10 \cdot 73 - 1} = \sqrt[6]{729} = 3;$$

es ist ferner

$$\sqrt[6]{1 \cdot 4097 - 1} = \sqrt[6]{4^6} = 4$$

und endlich

$$\sqrt[6]{2 . 7813 - 1} = \sqrt[6]{15625} = 5.$$

Daher haben die 73tel im 3, die 4097tel im 4 und die 7813tel im 5 t. Systeme je 12 Stellen.

Es hat z. B.

$$\frac{1}{73} = 0\cdot000100222122 \ldots \text{ im 3 t. Systeme}$$

$$\frac{1}{4097} = 0\cdot000000333333 \ldots \text{ im 4 und endlich}$$

$$\frac{1}{7813} = 0\cdot000001444443 \ldots \text{ im 5 teiligen Systeme je 12 Stellen.}$$

Ganz in derselben Weise können die Untersuchungen weiter ausgedehnt werden.

In den vorgenommenen Entwickelungen wurden die Fragen beantwortet: I. Wie für eine bestimmte Stellenzahl der Periode, die Grundzahlen der Systeme gefunden werden, in denen die Stellenzahl dieselbe oder irgend eine andere des gegebenen Systemes ist. — II. Wurde die Frage beantwortet; wie die Nenner der gemeinen Brüche gefuuden werden, die in irgend einem gegebenen Zahlensysteme einer bestimmten Stellenzahl der Periode entsprechen. Es bleibt noch die Frage zu erörtern, wie man aus dem gegebenen Bruch die Zahl der Stellen der Periode beurteilt, wenn der gemeine Bruch uud die Periode in demselben Systeme geschrieben sind.

Bestimmung der Stellenzahl der Periode für dasselbe Zahlsystem, in welchem der gemeine Bruch geschrieben ist.

Wenn für die einzelnen Grössen dieselben Bezeichnungen beibehalten werden, so ergibt sich aus der Relation 6)

$$x^r = up - 1,$$

also:

$$x = \sqrt[r]{up - 1}.$$

Durch Benutzuug dieses Ausdruckes wird, wenn $x = 10$ angenommen wird, das wichtige Problem seine Lösung finden: wie viele Stellen im dekadischen Systeme die $p$tel liefern. — Es geht dann diese Relation über in die Gleichung:

$$10 = \sqrt[r]{up - 1},$$

aus welcher nur noch r zu berechnen ist.

Ist zu untersuchen, wie viele Stellen die 137tel besitzen, so ergibt sich nach einfacher Betrachtung, dass für u eine solche Zahl zu wählen ist, wo an der Stelle der Einer ein Dreier steht, es ist von selbst einleuchtend, dass $u = 73$ angenommen werden muss, wodurch

$$10 = \sqrt[r]{73 \cdot 137 - 1} = \sqrt[r]{10^4}$$

wird. — Da $r = 4$ sein muss, so ist die Stellenzahl der 137 tel . . . $2r = 8$. — Es folgt hieraus unmittelbar, dass auch die 73 tel . . . 8 Stellen besitzen müssen.

Auf ganz analoge Art wird, wenn p die zusammengesetzte Zahl $1729 = 7.13.19$ vorstellt, durch Lösung der Gleichung

$$\sqrt[r]{1729u - 1} = 10$$

sich ergeben, dass die 1729 tel im dekadischen Systeme, da $r = 9$ ist, 18 Stellen haben *).

Aus der Relation

$$\sqrt[r]{up - 1} = 10$$

folgt

$$up = 10^r + 1,$$

wodurch die Möglichkeit gegeben ist, solche Ausdrücke in Factoren zu zerlegen. Es ist auch

$$p = \frac{10^r + 1}{u}.$$

Schreibt man für r der Reihe nach 2, 3, 4 . . ., so wird p

$$\frac{10^2 + 1}{u}, \quad \frac{10^3 + 1}{u}, \quad \frac{10^4 + 1}{u}, \quad \frac{10^5 + 1}{u}, \ldots$$

Ist es nun möglich u als aliquoten Teil von $10^r + 1$ zu wählen, so ist die Stellenzahl der p tel . . . $2r$. Für $u = 1$ übergeht p in $10^2 + 1$, $10^3 + 1$, $10^4 + 1$ . . ., daher haben die 101 tel . . . 4, die 1001 tel . . . 6, 10001 tel . . . 8 Stellen. — Aus $\frac{10^3 + 1}{u}$ folgt, dass u: 7, 11, 77, 13, 91, 143 und 1001 sein kann, daher haben Brüche, die eine dieser Zahlen als Nenner besitzen, 6 Decimalstellen.

Die für die 7 tel, 11 tel . . . 1001 tel, für die 73 tel, 137 tel und ähnliche Brüche, deren Nenner aliquote Teile von $10^r + 1$ sind, sich ergebende Beurteilung der Stellenzahl, und eine einfache Verwandlungsmethode, fand im 56. Band des Archives [1874], die nötigen Erläuterungen und Begründung.

---

*) Da $1729 = 12^3 + 1$ ist, so haben die 1729 tel im dodekadischen Systeme je 6 Stellen. [Archiv, 56. Band, Seite 96].

Die dort aufgestellte Regel auf die 73tel angewendet, ergibt:

$$\frac{1}{73} = \frac{a+1}{10^r+1},$$

wobei a die halbe Periode und $r = 4$ deren Stellenzahl ist. Löst man diese Gleichung nach a auf, so ist

$$a = \frac{(10^4+1)-73}{73} = \frac{10^4+1}{73} - 1 = 137 - 1 = 136,$$

daher, wenn die Ergänzung zu 9 gebildet wird:

$$\frac{1}{73} = 0\cdot01369863 \ldots$$

Aus der angeführten Abhandlung und aus der im 57. Band des Archives [1875], ergeben sich die einfachsten Methoden für die Berechnung der halben Periode in ganz beliebigen Zahlensystemen, für rein und gemischt periodische Brüche, für den Fall, dass der Nenner ein aliquoter Teil oder ein Vielfaches von 10^r+1 ist. Bei diesen Ableitungen wurde nicht nur die Ergänzung zu neun betrachtet, es wurde vielmehr die Ergänzung zu irgend einer Zahl α angenommen.

Die von Dr. O. Schlömilch in seiner Zeitschrift für Mathematik und Physik im 25. Jahrgange, 6. Heft, Seite 416, im Jahre 1880 erschienene Notiz über gewisse periodische Decimalbrüche, kann demnach nur als eine Specialisirung eines einfachen in den angegebenen Arbeiten entwickelten Falles angesehen werden.

Wird in Gleichung 1) für r geschrieben $p-1$, wobei x prim gegen p ist, so geht aus dieser die Relation

$$x^{p-1} \equiv +1 \,[\mathrm{md}\, p] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 8)$$

der Satz von Fermat, hervor.

Aus 8) folgt

$$x^{p-1} - 1 = (x^{\frac{p-1}{2}} + 1)(x^{\frac{p-1}{2}} - 1) \equiv 0 \,[\mathrm{md}\, p].$$

Es ist sofort ersichtlich, dass entweder der eine oder der andere von den zwei Binomialfactoren durch den Modul p teilbar sein muss, was zur Aufstellung der Congruenz

$$x^{\frac{p-1}{2}} \equiv \pm 1 \,[\mathrm{mod}\, p]$$

berechtigt.

Zur Entscheidung, wann die Congruenz für $+1$ oder für -1

besteht, gilt das folgende bekannte Theorem: Ist p eine Primzahl $> s$, und prim zu x, so besteht die Congruenz

$$x^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \,[\mathrm{md}\, p].$$

Wendet man den Fermat'schen Satz zur Beurteilung der Stellenzahl z. B. der 17tel und 23tel im dek. Systeme an, so ergeben sich die Congruenzen:

$$10^{16} \equiv +1 \,[\mathrm{md}\ 17] \text{ für die 17tel}$$

und

$$10^{22} \equiv +1 \,[\mathrm{md}\ 23] \text{ für die 23tel.}$$

Es ist also

$$10^{16} - 1 = (10^8 + 1)(10^8 - 1) \equiv 0 \,[\mathrm{md}\ 17]$$

und

$$10^{22} - 1 = (10^{11} + 1)(10^{11} - 1) \equiv 0 \,[\mathrm{md}\ 23].$$

Wendet man den oben angegebenen bekannten Satz an, so ist sofort

$$10^8 + 1 \equiv 0 \,[\mathrm{md}\ 17]$$

und

$$10^{11} + 1 \equiv 0 \,[\mathrm{md}\ 23].$$

Da nun 10^8+1 eine Primzahl ist, und da $10^{11}+1$ keinen Factor enthält durch dessen Auslassung die Schlussfolgerung geändert werden müsste, so ergeben sich für 17tel ..., für die 23tel ... 22 Stellen.

Zerlegung des Ausdruckes a^m+1 in Factoren.

Es soll hier zum Schlusse noch die Frage ihre Erledigung finden, wie die gewonnenen Sätze auf die Zerlegung des Ausdruckes

$$a^m + 1$$

in Factoren angewendet werden können.

Schreibt man in 6) für $x = a$ und für $r = m$ die halbe Stellenzahl des im $a$teiligen Systeme geschriebenen Bruches, so ist

$$a^m \equiv -1 \,[\mathrm{md}\, p].$$

Offenbar liegt die Lösung des Problemes in der Beantwortung der Frage, wie viele Stellen im $a$teiligen Systeme die $p$tel liefern, wenn p ein Factor des gegebenen Ausdruckes ist.

Es sei z. B. für $a^{32}+1$ der aliquote Teil p zu finden, so muss

$$a^{32} \equiv -1 \,[\mathrm{md}\, p] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 9)$$

sein, es muss demnach, wenn u irgend eine ganze Zahl vorstellt,

$$\frac{a^{32}+1}{p} = u \text{ sein.}$$

Betrachtet man die einzelnen Factoren des Productes

$$[a^{32}-1][a^{64}+1][a^{512}+a^{384}+a^{256}+a^{128}+1] = n,$$

so ist jeder Factor prim gegen p. Da ähnlich $\frac{a^{32}+1}{p}$ eine ganze Zahl vorstellen soll, so kann $a^{32}-1$ durch $p\,[p>2$ vorausgesetzt$]$ nicht teilbar sein. Da nun $a^{64}-1$ durch p teilbar ist, so ist $a^{64}+1$ prim gegen p.

Durch das Aufsuchen des grössten gem. Masses für den dritten Factor und $a^{32}+1$ wird man sofort überzeugt, dass auch dieser Factor prim gegen p ist.

Werden die zwei letzten Gleichungen durch die Multiplication verbunden, so ist:

$$\frac{(a^{32}+1)(a^{32}-1)(a^{64}+1)(a^{512}+a^{384}+a^{256}+a^{128}+1]}{p} = un.$$

Nach Durchführung der Operationen ist sofort

$$\frac{a^{640}-1}{p} = un$$

eine ganze Zahl, daher ergibt sich augenblicklich

$$a^{640} \equiv +1 \;[\text{md}\, p].$$

Ist nun a prim gegen p, so ist nach Fermat $p = 640+1$, daher

$$a^{640} \equiv +1 \;[\text{md}\, 641].$$

Schreibt man nun noch 2 statt a, so ist sofort ersichtlich, dass

$$\frac{2^{32}+1}{641}$$

eine ganze Zahl vorstellt.

In anderer Form geschrieben ist:

$$2^{32} \equiv -1 \;[\text{md}\, 641],$$

welcher Ausdruck, wenn a statt 2 geschrieben wird, mit (9) übereinstimmt und anzeigt, dass die 641tel im zweiteiligen Systeme $2.32 = 64$ Stellen haben müssen.

Da nun $32 = 2^5$ ist, so ist $2^{32}+1 = 2^{2^5}+1$ ein Vielfaches von 641.

Die Behauptungen von Euler, dass

$$2^{2^\alpha}+1,$$

wenn α eine beliebige ganze Zahl bedeutet, immer eine Primzahl vorstellt, muss für $\alpha = 5$ als unrichtig bezeichnet werden.

Es ist tatsächlich im 2teiligen Systeme für

$$\frac{1}{641} = 0{\cdot}000\,000\,000.11.00.11.000.111.1011\ldots0000000$$

die halbe Periode; der zweite Teil der Periode wird durch die Ergänzung zu eins gebildet, wodurch sich die 64 Stellen ergeben.

IX.

Ellipsoidische Flächenbelegungen, deren Wirkung auf innere Punkte der Richtung und Stärke nach constant ist.

Von

Dr. **Stephan Glaser.**

Gegen Ende vorigen Jahres erschien eine Inaugural-Dissertation von Herrn H. Rolle, in welcher die folgende Aufgabe behandelt ist: Die Fläche eines Rotationsellipsoids soll in solcher Weise mit Masse belegt werden, dass die Wirkung dieser Belegung auf innere Punkte (bei Zugrundelegung des Newton'schen Potentials) ihrer Richtung und Stärke nach constant ist.

Auf Seite 8 bedient sich der Verfasser einer von Herrn Prof. Neumann angegebenen Entwickelung der reciproken Entfernung eines auf der Oberfläche des Ellipsoids gelegenen Punktes von einem beliebigen andern Punkte; er begeht jedoch dabei den Irrtum statt der Darstellung für einen inneren Punkt die für einen äusseren Punkt geltende zu nehmen*).

Ein anderer Fehler findet sich auf Seite 13, woselbst aus dem Umstande, dass nur die Fälle, für welche $i = j$ ist, einen Beitrag geben, geschlossen wird, dass sich auch die Summationen nach m und n vereinigen, während doch der Spielraum von n nur insofern geändert wird, als derselbe sich nicht mehr von 0 bis ∞, sondern nur von j bis ∞ erstreckt.

---

*) cf. Crelle's Journal Bd. XXXVII.

In der folgenden Untersuchung geht der Verfasser von Punkten im Inneren des Ellipsoids zu solchen auf der Oberfläche über, wodurch die Wirkung des ersten Fehlers aufgehoben wird; jedoch wiederholt er den zweiten Fehler auf Seite 15, indem er aus der Bedingung, dass j nur 0 und 1 sein kann, die Folgerung zieht, auch k kann nicht grösser als 1 sein.

In Folge dieser Fehlschlüsse ist das Resultat ein unrichtiges geworden.

Ich erlaube mir hier eine Lösung des allgemeineren Problems mitzuteilen, auf einem dreiaxigen Ellipsoid eine beliebige Menge M so zu verteilen, dass die Kraft im ganzen Inneren einen ebenfalls beliebig gegebenen constanten Wert hat.

Das Potential eines mit Masse von der Dichtigkeit 1 angefüllten Raumes kann dargestellt werden durch den Ausdruck

$$-\int \tfrac{1}{2} \cos(MQ) \, . \, ds,$$

worin MQ den Winkel zwischen der nach aussen gezogenen Normale und der Verbindungslinie mit dem angezogenen Punkte bedeutet, und die Integration über die ganze Oberfläche auszudehnen ist.

Für ein Ellipsoid mit den Halbaxen A, B, C wird hiernach

$$W = -\int \frac{1}{2r} \frac{\dfrac{(\xi - x)x}{A^2} + \dfrac{(\eta - y)y}{B^2} + \dfrac{(\varphi - z)z}{C^2}}{\sqrt{\dfrac{x^2}{A^4} + \dfrac{y^2}{B^4} + \dfrac{z^2}{C^4}}} ds,$$

worin $(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\varphi - z)^2 = r^2$.

Ersetzt man in diesem Ausdruck die im Zähler vorkommenden ξ, η, φ durch 3 andere Grössen a, b, c, so stellt derselbe für constante a, b, c und variable ξ, η, φ das Potential einer Flächenbelegung dar, dessen Dichtigkeit

$$\varrho = -\tfrac{1}{2} \frac{\dfrac{(a - x)x}{A^2} + \dfrac{(b - y)y}{B^2} + \dfrac{(c - z)z}{C^2}}{\sqrt{\dfrac{x^2}{A^4} + \dfrac{y^2}{B^4} + \dfrac{z^2}{C^4}}}$$

ist. Versteht man unter a, b, c die Coordinaten eines Punktes, so ist die Dichte direct proportional dem Lote von (a, b, c) auf die im Punkte (x, y, z) construirte Tangentialebene; sie ist positiv, wenn (a, b, c) mit dem Anfangspunkt auf derselben Seite der Tangential-

ebene liegt, im andern Falle negativ. Die Verteilung ist also gleichartig mit positiver Dichtigkeit, wenn (a, b, c) innerhalb des Ellipsoids liegt; sie ist ungleichartig, sobald (a, b, c) draussen liegt. Legt man im letzteren Falle durch (a, b, c) den Tangentialkegel, so ist in der Berührungslinie die Dichte gleich Null, auf der (a, b, c) zugewandten Seite negativ, auf der abgewandten Seite positiv.

Sofern

$$\begin{aligned} x &= A\cos p \\ y &= B\sin p\cos q \\ z &= C\sin p\sin q \end{aligned}$$

gesetzt wird, ist

$$ds = ABC\sqrt{\frac{x^2}{A^4}+\frac{y^2}{B^4}+\frac{z^2}{C^4}}\,.\sin p\, dp\, dq;$$

die Gesammtmasse, welche bei dieser Belegung zur Verteilung kommt, ist daher

$$M = -\tfrac{1}{2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{(a-x)x}{A^2}+\frac{(b-y)y}{B^2}+\frac{(c-z)z}{C^2}\right]ABC\sin p\, dp\, dq,$$

oder

$$M = -\tfrac{1}{2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\cos p\,\frac{a}{A}+\sin p\cos q\,\frac{b}{B}+\sin p\sin q\,\frac{c}{C}-1\right]ABC\sin p\, dp\, dq$$

und durch Ausführung der Integration

$$M = 2\pi ABC;$$

die Masse ist also unabhängig von a, b, c. Das Potential, welches mit V bezeichnet werden möge, wird ferner durch Einführung des Wertes von ds

$$V = -\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2r}\left[\frac{(a-x)x}{A^2}+\frac{(b-y)y}{B^2}+\frac{(c-z)z}{C^2}\right]ABC\sin p\, dp\, dq,$$

oder

$$V = \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{ABC}{r}\sin p\, dp\, dq - \frac{a}{2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{ABC\sin p\cos p\, dp\, dq}{rA}$$

$$-\frac{b}{2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{ABC\sin p\sin p\cos q\, dp\, dq}{rB} - \frac{c}{2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{ABC\sin p\sin p\sin q\, dp\, dq}{rC}$$

Nun ist aber nach den von Gauss in seiner Abhandlung theoria attractionis (theor. tert.) mitgeteilten Sätzen

$$-\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{ABC\sin p\cos p\,dp\,dq}{rA}=\frac{\partial W}{\partial\xi}$$

$$=-2\pi\xi\int_{0,\sigma}^{\infty}\frac{ABC\,ds}{\sqrt{(A^2+s)(B^2+s)(C^2+s)}}\,\frac{1}{A^2+s},$$

$$-\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{ABC\sin p\sin p\cos q\,dp\,dq}{rB}=\frac{\partial W}{\partial\eta}$$

$$=-2\pi\eta\int_{0,\sigma}^{\infty}\frac{ABC\,ds}{\sqrt{(A^2+s)(B^2+s)(C^2+s)}}\,\frac{1}{B^2+s},$$

$$-\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{ABC\sin p\sin p\sin q\,dp\,dq}{rC}=\frac{\partial W}{\partial\varphi}$$

$$=-2\pi\varphi\int_{0,\sigma}^{\infty}\frac{ABC\,ds}{\sqrt{(A^2+s)(B^2+s)(C^2+s)}}\,\frac{1}{C^2+s},$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{ABC}{r}\sin p\,dp\,dq=\pi\int_{0,\sigma}^{\infty}\frac{ABC\,ds}{\sqrt{(A^2+s)(B^2+s)(C^2+s)}},$$

worin die eine oder andere Integrationsgrenze zu nehmen ist, jenachdem $(\xi,\ \eta,\ \varphi)$ innerhalb oder ausserhalb des Ellipsoids liegt; im letzteren Falle bedeutet σ die reelle positive Wurzel der Gleichung

$$\frac{\xi^2}{A^2+\sigma}+\frac{\eta^2}{B^2+\sigma}+\frac{\varphi^2}{C^2+\sigma}=1.$$

Setzen wir diese Ausdrücke in V ein, so kommt die definitive Gestalt

$$V_{i,a}=\pi\int_{0,\sigma}^{\infty}\frac{ABC\,ds}{\sqrt{(A^2+s)(B^2+s)(C^2+s)}}\left(1-\frac{a\xi}{A^2+s}-\frac{b\eta}{B^2+s}-\frac{c\varphi}{C^2+s}\right)$$

dieselbe zeigt, dass das Potential für innere Punkte $(\xi,\ \eta,\ \varphi)$ linear, also die im Inneren ausgeübte Kraft der Richtung und Stärke nach constant ist.

In diesem Resultate ist eine Lösung der Aufgabe enthalten, ein Ellipsoid so mit Masse zu belegen, dass die Kraft im ganzen Inneren

constant ist. Sind die Componenten der Kraft gleich X, Y, Z gegeben, so bestimmt man vermittelst der Gleichungen

$$X = a\pi \int_0^\infty \frac{ABC\,ds}{\sqrt{(A^2+s)(B^2+s)(C^2+s)}} \frac{1}{A^2+s},$$

$$Y = b\pi \int_0^\infty \frac{ABC\,ds}{\sqrt{(A^2+s)(B^2+s)(C^2+s)}} \frac{1}{B^2+s},$$

$$Z = c\pi \int_0^\infty \frac{ABC\,ds}{\sqrt{(A^2+s)(B^2+s)(C^2+s)}} \frac{1}{C^2+s}$$

die Coordinaten eines Punktes (a, b, c). Wird mit Hülfe dieses Punktes in der früher angegebenen Weise die Fläche mit Materie belegt, so wird das innere Potential nach unsern Entwickelungen dargestellt durch

$$\pi \int_0^\infty \frac{ABC\,ds}{\sqrt{(A^2+s)(B^2+s)(C^2+s)}} \left(1 - \frac{a\xi}{A^2+s} - \frac{b\eta}{B^2+s} - \frac{c\varphi}{C^2+s}\right),$$

die Componenten der Wirkung sind also in der Tat gleich X, Y, Z dabei ist die zur Verteilung kommende Masse gleich $2\pi ABC$.

Eine besondere Beachtung verdient der Fall, dass die Kraft im ganzen Inneren gleich Null ist; dann wird auch $a = b = c = 0$, also die Dichte überall positiv und proportional dem Abstande des Mittelpunktes von der in dem betreffenden Punkte an das Ellipsoid gelegten Tangentialebene; auch hier ist die verteilte Menge gleich $2\pi ABC$.

Natürlich kann man von dieser Lösung leicht zu der Lösung der allgemeinsten Aufgabe übergehen, eine beliebige Menge M so zu verteilen, dass die Kraft im Inneren einen gegebenen constanten Wert hat. Für den Fall, dass dieser constante Wert Null ist, wird die vollständige Lösung

$$\varrho = \frac{M}{4\pi ABC} \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{A^4} + \frac{y^2}{B^4} + \frac{z^2}{C^4}}},$$

$$V_{i,a} = \frac{M}{2} \int_{0,\sigma}^\infty \frac{ds}{\sqrt{(A^2+s)(B^2+s)(C^2+s)}};$$

es ist dieses die Verteilung, welche eintritt, wenn man dem Ellipsoid die Menge M elektrischer Materie mitteilt und dasselbe ohne Influenz sich selbst überlässt.

Im andern Falle bestimmt man wie vorhin die Coordinaten eines Punktes (a, b, c) und verwendet dieselben in der angegebenen Weise zur Construction einer Dichtigkeit; dabei kommt $2\pi ABC$ zur Verteilung. Der Rest $M-2\pi ABC$ wird in der Weise zu einer ferneren Belegung verwandt, dass die Wirkung auf jeden inneren Punkt Null ist; dieselbe bestimmt sich nach dem soeben absolvirten Falle. Demnach lautet die allgemeinste Lösung

$$\varrho = -\tfrac{1}{2}\frac{\frac{(a-x)x}{A^2}+\frac{(b-y)y}{B^2}+\frac{(c-z)z}{C^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{A^4}+\frac{y^2}{B^4}+\frac{z^2}{C^4}}}+\frac{M-2\pi ABC}{4\pi ABC}\,\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{A^4}+\frac{y^2}{B^4}+\frac{z^2}{C^4}}},$$

$$V_{i,a} = \pi\int_{0,\,\sigma}^{\infty}\frac{ABC\,ds}{\sqrt{(A^2+s)(B^2+s)(C^2+s)}}\left(\frac{M}{2\pi ABC}-\frac{a\xi}{A^2+s}-\frac{b\eta}{B^2+s}-\frac{c\varphi}{C^2+s}\right).$$

Düsseldorf im August 1881.

X.

Miscellen.

1.

Zur Gleichung dritten Grades.

Die früher im Archiv von mir auf Gleichungen 4. Grades angewandte Methode will ich jetzt noch auf kubische Gleichungen anwenden, um zu zeigen, wie jeder angenommene Wurzelwert sämmtliche Wurzeln angiebt.

Seien in der reducirten Gleichung

$$\text{I)} \quad x^3+ax+b=0$$

die Wurzeln:

$$x_1 = m+ni$$
$$x_2 = m-ni$$
$$x_3 = p$$

dann ist

$$(x-m-ni)(x-m+ni)(x-p)=0$$

oder

$$\text{II)} \quad x^3-(2m+p)x^2+(m^2+n^2+2mp)x-(m^2+n^2)p=0$$

Ist Gleichung I) mit II) identisch, so ist

$$2m+p=0$$
$$m^2+n^2+2mp=a$$
$$(m^2+n^2)p=-b$$

oder

$$p=-2m$$
$$\text{III)} \quad n^2-3m^2=a$$
$$\text{IV)} \quad m^3+mn^2=\frac{b}{2}$$

Erhebt man die Gleichung III) zur 3. Potenz und die Gleichung IV) zum Quadrat, so erhält man

$$\text{V)}\quad n^6 - 9n^4m^2 + 27m^4n^2 - 27m^6 = a^3$$

$$\text{VI)}\quad n^4m^2 + 2m^4n^2 + m^6 = \frac{b^2}{4}$$

oder

$$\left.\begin{aligned} &\text{V)}\quad \frac{n^6}{27} - \frac{n^4m^2}{3} + m^4n^2 - m^6 = \frac{a^3}{27} \\ &\text{VI)}\quad n^4m^2 + 2m^4n^2 + m^6 = \frac{b^2}{4} \end{aligned}\right\} \text{addirt}$$

$$\frac{n^6}{27} + \frac{2}{3}n^4m^2 + 3n^2m^4 = \frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4}$$

oder

$$\text{VII)}\quad \frac{n^3}{3\sqrt{3}} + nm^2\sqrt{3} = \pm\sqrt{\frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4}}$$

und nach IV)

$$n^2m + m^3 = \frac{b}{2}$$

Beide Gleichungen VII) und IV) addirt und auch subtrahirt giebt

$$\text{VIII)}\quad \left(\frac{n}{\sqrt{3}} + m\right)^3 = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4}} = -v^3$$

$$\text{IX)}\quad \left(\frac{n}{\sqrt{3}} - m\right)^3 = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4}} = u^3$$

folglich ist nach VIII)

$$\left(\frac{n}{\sqrt{3}} + m\right)^3 + v^3 = 0$$

und daher sowohl

$$\frac{n}{\sqrt{3}} + m + v = 0 \quad \text{d. h.} \quad \text{X)}\quad \frac{n}{\sqrt{3}} + m = -v$$

als auch

$$\left(\frac{n}{\sqrt{3}} + m\right)^2 - \left(\frac{n}{\sqrt{3}} + m\right)v + v^2 = 0 \quad \text{d. h.} \quad \text{XI)}\quad \frac{n}{\sqrt{3}} + m = \frac{v}{2} \pm \frac{v}{2}\sqrt{-3}$$

und nach IX) ist

$$\frac{n}{\sqrt{3}} - m - u = 0 \quad \text{d. h.} \quad \text{XII)}\quad \frac{n}{\sqrt{3}} - m = u$$

sowie

$$\left(\frac{n}{\sqrt{3}} - m\right)^2 + \left(\frac{n}{\sqrt{3}} - m\right)u + u^2 = 0 \quad \text{d. h.} \quad \text{XIII)}\quad \frac{n}{\sqrt{3}} - m = -\frac{u}{2} \pm \frac{u}{2}\sqrt{-3}$$

Weil nun nach X)

$$\frac{n}{\sqrt{3}}+m=-v$$

und nach XII)

$$\frac{n}{\sqrt{3}}-m=u$$

so ist

$$-2m=u+v=x_{1a}$$

und

$$\frac{n}{\sqrt{3}}=\frac{u-v}{2}$$

oder

$$ni=\frac{u-v}{2}\sqrt{-3}$$

und weil

$$m=-\frac{u+v}{2}$$

so ist

$$m+ni=-\frac{u+v}{2}+\frac{u-v}{2}\sqrt{-3}=x_{2a}$$

und

$$m-ni=-\frac{u+v}{2}-\frac{u-v}{2}\sqrt{-3}=x_{3a}$$

Ebenso ist nach XI)

$$\frac{n}{\sqrt{3}}+m=\frac{v}{2}\pm\frac{v}{2}\sqrt{-3}$$

und nach XIII)

$$\frac{n}{\sqrt{3}}-m=-\frac{u}{2}\pm\frac{u}{2}\sqrt{-3}$$

folglich

$$-2m=-\frac{u+v}{2}\pm\frac{u-v}{2}\sqrt{-3}=x_{1b} \text{ u. } x_{1c}$$

Addirt man die Gleichungen XI) und XIII), so erhält man

$$\frac{2.n}{\sqrt{3}}=-\frac{u-v}{2}\pm\frac{u+v}{2}\sqrt{-3}$$

oder

$$ni=\mp\frac{3}{4}(u+v)-\frac{u-v}{4}\sqrt{-3}$$

und weil

$$m=\frac{u+v}{4}\mp\frac{u-v}{4}\sqrt{-3}$$

so folgt

$$m+ni=\frac{u+v}{4}(1\mp3)+\frac{u-v}{4}\sqrt{-3}(-1\mp1)$$

und

$$m-ni=\frac{u+v}{4}(1\pm3)+\frac{u-v}{4}\sqrt{-3}(1\mp1)$$

Benutzt man die oberen Vorzeichen dieser letzten Gleichungen, so erhält man

$$m+ni=\frac{u+v}{4}(1-3)+\frac{u-v}{4}(-1-1)\sqrt{-3}$$

und

$$m-ni=\frac{u+v}{4}(1+3)+\frac{u-v}{4}(1-1)\sqrt{-3}$$

oder

$$m+ni=-\frac{u+v}{2}-\frac{u-v}{2}\sqrt{-3}=x_{2b}$$

und

$$m-ni=\quad u+v \quad =x_{3b}$$

Benutzt man die unteren Vorzeichen jener Gleichungen, so erhält man

$$m+ni=\frac{u+v}{4}(1+3)+\frac{u-v}{4}(-1+1)\sqrt{-3}$$

und

$$m-ni=\frac{u+v}{4}(1-3)+\frac{u-v}{4}(1+1)\sqrt{-3}$$

oder

$$m+ni=\quad u+v \quad =x_{2c}$$

und

$$m-ni=-\frac{u+v}{2}+\frac{u-v}{2}\sqrt{-3}=x_{3c}$$

Es ist also

$$x_{1a}=-2m=\quad u+v$$

$$x_{2a}=m+ni=-\frac{u+v}{2}+\frac{u-v}{2}\sqrt{-3}$$

$$x_{3a}=m-ni=-\frac{u+v}{2}-\frac{u-v}{2}\sqrt{-3}$$

ferner

$$x_{1b}=-2m=-\frac{u+v}{2}+\frac{u-v}{2}\sqrt{-3}$$

$$x_{2b}=m+ni=-\frac{u+v}{2}-\frac{u-v}{2}\sqrt{-3}$$

$$x_{3b}=m-ni=\quad u+v$$

und

$$x_{1c}=-2m=-\frac{u+v}{2}-\frac{u-v}{2}\sqrt{-3}$$

$$x_{2c}=m+ni=\quad u+v$$

$$x_{3c}=m-ni=-\frac{u+v}{2}+\frac{u-v}{2}\sqrt{-3}$$

Nach den Gleichungen IX) und VIII) ist

$$u = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4}}}$$

und

$$v = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} \mp \sqrt{\frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4}}}$$

wenn also

$$u = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4}}}$$

so ist

$$v = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4}}}$$

Hamburg, Oktober 1881.

Th. Sinram.

2.

Innere Winkel aller regelmässigen linear begrenzten Figuren von 4 Dimensionen.

Im Arch. LXVII. 420—422 sind die innern Winkel aller 6 regelmässigen Polytope gefunden, mit Ausnahme des Pentatops (der 4dehnigen Pyramide). Drei derselben waren congruent den Centriwinkeln andrer Polytope, zwei andre standen in Relation zu bekannten 4dehnigen Winkeln. Nun zeigt sich aber, dass sich der innere Winkel des Pentatops gleichfalls auf einen bekannten zurückführen lässt, nämlich durch teilweise Integration.

Die Berechnung eines 4dehnigen Winkels geschah in LXVII. 274—276 durch Zerlegung in Tetratope (Winkel zwischen 4 Räumen), welche in Pentatopen von 4 allseitig orthogonalen Kanten am Ende dieser Kantenreihe gebildet werden. Ein solches Elementartetratop war bestimmt durch 3 ebene Winkel α, β, γ und hatte den Ausdruck:

$$W(\alpha, \beta, \gamma) = \tfrac{1}{2}\int_{\delta}^{\beta} \varphi\, \partial\psi$$

wo

$$\frac{\operatorname{tg}^2\varphi}{\operatorname{tg}^2\alpha \sin^2\beta} + \frac{\operatorname{tg}^2\psi}{\operatorname{tg}^2\beta} = 1; \quad \sin\delta = \sin\beta\cos\gamma$$

Nach LXVII. 421 war für das Elementartetratop des innern Winkels J des regelmässigen Pentatops

$$\alpha = \tfrac{2}{3}R; \quad \operatorname{tg}\beta = \sqrt{2}; \quad \operatorname{tg}\gamma = \sqrt{\tfrac{1}{15}}$$

die Anzahl der Elementartetratope = 24, woraus:

$$\operatorname{tg}\delta = \sqrt{\tfrac{5}{3}}$$

Die Relation zwischen φ und ψ geht hier über in

$$\operatorname{tg}^2\varphi + \operatorname{tg}^2\psi = 2$$

Den Werten $\psi = \beta, \delta$ entsprechen die Werte

$$\varphi = 0, \tfrac{1}{3}R$$

folglich ist der innere Winkel

$$J = 24W(\alpha, \beta, \gamma) = 12\int_\delta^\beta \varphi\,\partial\psi$$

$$= 12(0.\beta - \tfrac{1}{3}R\delta + \int_0^{\frac{1}{3}R} \partial\varphi \operatorname{arc tg}\sqrt{2 - \operatorname{tg}^2\varphi})$$

Den Wert dieses Integrals erhält man durch Subtraction der Gl. (35) und (39) in LXVII. 282, welche lauten:

$$\int_{\frac{1}{3}R}^{\frac{1}{2}R} \partial\varphi \operatorname{arc tg}\sqrt{2 - \operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{11R^2}{120}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}R} \partial\varphi \operatorname{arc tg}\sqrt{2 - \operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{7R^2}{24}$$

nämlich:

$$\int_0^{\frac{1}{3}R} \partial\varphi \operatorname{arc tg}\sqrt{2 - \operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{R^2}{5}$$

Demnach ist

$$J = \frac{12R^2}{5} - 4R \operatorname{arc tg}\sqrt{\frac{5}{3}} \tag{1}$$

Ehe wir die Resultate zusammenstellen, sei noch bemerkt, dass

$$\operatorname{arc tg}\sqrt{\frac{5}{3}} + \operatorname{arc tg}\frac{\sqrt{5} - 2}{\sqrt{3}} = \frac{2R}{3}$$

ist. Nach Ersetzung des letztern Arcus durch den erstern und Ergänzung durch (1) lautet die Tabelle (33) nebst den folgenden 2 Gleichungen in LXVII. 422:

$$J(3, 3, 3) = \frac{12R^2}{5} - 4R \operatorname{arc tg}\sqrt{\frac{5}{3}}$$

$$J(4, 3, 3) = \frac{R^2}{3}$$

$$J(5, 3, 3) = -\frac{47R^2}{5} + 20R \operatorname{arc tg}\sqrt{\frac{5}{3}}$$

$$J(3,\ 4,\ 3) = R^2$$

$$J(3,\ 3,\ 4) = \frac{R^2}{2}$$

$$J(3,\ 3,\ 5) = \frac{191R^2}{75}$$

Gemessen durch den 4dehnigen Vollwinkel geben diese Grössen:

$l,\ m,\ n$	$\frac{J}{8R^2}$	$\frac{8R^2}{J}$
3, 3, 3	0,00970 46885	102,2005
4, 3, 3	0,04166 66667	24
5, 3, 3	0,27607 65574	3,6222
3, 4, 3	0,125	8
3, 3, 4	0,0625	16
3, 3, 5	0,31833 33333	3,1414

Aus der letzten Columne ist zu ersehen, dass nicht mehr als 3 Winkel $J(5, 3, 3)$ oder $J(3, 3, 5)$ um eine Ecke liegen können. Da aber zur Begrenzung eines 5dehnigen Winkels mindestens 5 lineare 4dehnungen erforderlich sind, so können die Polytope (5, 3, 3) und (3, 3, 5) nicht Seiten einer regelmässigen 5dehnung sein. Ferner können die Seiten einer regelmässigen 5dehnung nicht in Form dieser zwei Polytope um eine Ecke gruppirt werden, weil dann bzhw. 600 oder 120 Polytope um eine Ecke liegen müssten, während höchstens 102 Platz haben. Folglich haben alle regelmässigen Figuren von mehr als 4 Dimensionen keine Fünfecke mehr zu Flächen.

Hierdurch vereinfacht sich die Untersuchung der regelmässigen Figuren von n Dimensionen dermassen, dass nunmehr die vollständige allgemeine qualitative und quantitative Bestimmung derselben keine Schwierigkeit mehr hat, wie ich in einer spätern Arbeit zeigen will.

R. Hoppe.

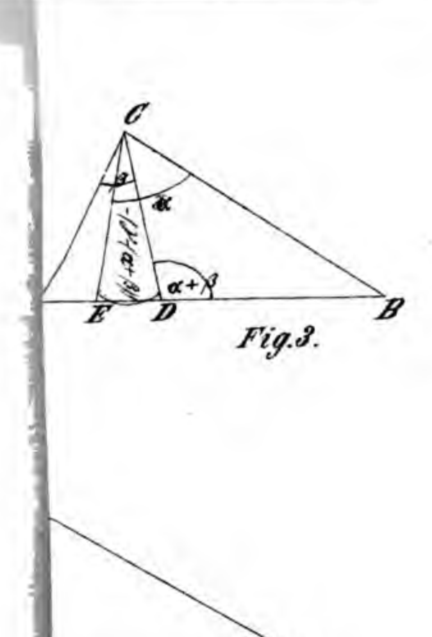


Fig. 3.

B

Fig. 5.

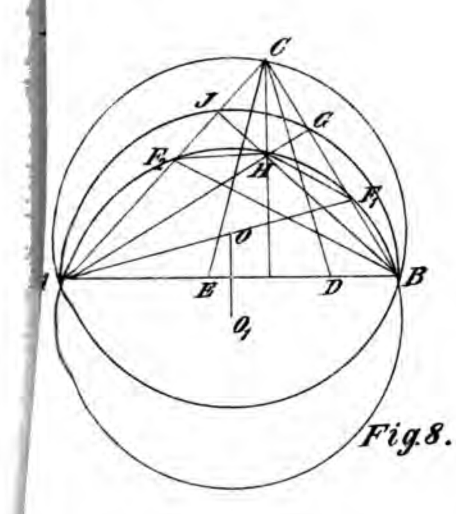


Fig. 8.

…roportionalen des Dreiecks

Steindr. v. F. W. Kunike, Greifsw.

VI. Schiffner: Schraubenregelfläche.

Steindr. v. F. W. Kunike Greifsw.

INHALT.

Greifswald, gedruckt bei F. W. Kunike.

ARCHIV

der

MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Gegründet von

J. A. Grunert,

fortgesetzt von

R. Hoppe.

Achtundsechzigster Teil. Zweites Heft.

(Mit 4 lithographirten Tafeln.)

Leipzig.
C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,
J. Sengbusch.

1882.

XI.

Die Bewegung eines Rotationskörpers in einer incompressibeln Flüssigkeit.

Von

Albert Schülke.

Das Problem der Bewegung eines Rotationskörpers, auf welchen keine Kräfte wirken, in einer incompressibeln Flüssigkeit ist zuerst von Kirchhoff (Borchardt's Journal Bd. 71.) gelöst worden, indem er die elliptischen Integrale, auf welche das Problem führt, aufgestellt und dann die Lösung in 2 speciellen Fällen — 1) wenn der Körper um seine Rotationsaxe nicht rotirt und diese Axe in einer festen Ebene bleibt, und 2) wenn ein Punkt der Rotationsaxe eine Schraubenlinie durchläuft — zu Ende geführt hat. Später hat Köpcke (Math. Annalen Bd. 12.) auch den allgemeinen Fall soweit erledigt, dass er die Variabeln als Functionen der Zeit ausdrückte. Zweck dieser Arbeit ist es nun, zu zeigen, dass 1) die Formeln von Köpcke noch eine Vereinfachung zulassen, und 2) dass man auch ohne dieselben durch kleine Umformungen der von Kirchhoff angegebenen Gleichungen von dem Bewegungsvorgang in allen Fällen ein deutliches Bild gewinnen kann.

§ 1.

Es sei x, y, z ein mit dem Körper fest verbundenes Coordinatensystem, die x Axe falle mit der Rotationsaxe zusammen, und α, β, γ seien die Coordinaten des Anfangspunktes von x, y, z in Bezug auf ein im Raume festes System, dann ist die Lage des Körpers bestimmt, wenn zu jeder Zeit α, β, γ und die Richtungscosinus $abc\ldots$ bekannt sind. Es sei die Determinante

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = +1.$$

Bezeichnet man die Geschwindigkeit des Coordinatenanfangspunktes von x, y, z in der Richtung der Axen x, y, z mit u, v, w und die Drehungsgeschwindigkeit des Körpers

um die x Axe in der Richtung von z nach y mit $+p$
" y " " " " " x " z " $+q$
" z " " " " " y " x " $+r$

so bestehen die Gleichungen:

$$\frac{d\alpha}{dt} = au + bv + cw$$

$$\frac{d\beta}{dt} = a'u + b'v + c'w$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = a''u + b''v + c''w$$

$$\frac{da}{dt} = qc - rb \qquad \frac{db}{dt} = ra - pc \qquad \frac{dc}{dt} = pb - qa$$

$$\frac{da'}{dt} = qc' - rb' \qquad \frac{db'}{dt} = ra' - pc' \qquad \frac{dc'}{dt} = pb' - qa'$$

$$\frac{da''}{dt} = qc'' - rb'' \qquad \frac{db''}{dt} = ra'' - pc'' \qquad \frac{dc''}{dt} = pb'' - qa''$$

Die lebendige Kraft von Körper und Flüssigkeit wird

$$2T = Ap^2 + B(q^2 + r^2) + A_1 u^2 + B_1(v^2 + w^2).$$

Die Differentialgleichungen der Bewegung lauten,

$$A_1 \frac{du}{dt} = B_1(qw - rv)$$

$$B_1 \frac{dv}{dt} = A_1 ru - B_1 pw$$

$$B_1 \frac{dw}{dt} = B_1 pv - A_1 qu$$

$$\frac{dp}{dt} = 0$$

$$B \frac{dq}{dt} = (A - B)pr + (A_1 - B_1)uw$$

$$B \frac{dr}{dt} = (B - A)pq + (B_1 - A_1)uv.$$

Diese 6 Gleichungen verbunden mit den vorigen 12 genügen, um die 18 Variabeln $\alpha\beta\gamma$ abc $a'b'c'$ $a''b''c''$ uvw pqr als Functionen von t darzustellen.

Von diesem System erhält man zunächst 8 Integralgleichungen:

$$1)\quad 2T = \text{Const.} \qquad 2)\quad p = \text{Const.}$$

$$A_1 ua + B_1(vb + wc) = l$$
$$A_1 ua' + B_1(vb' + wc') = m$$
$$A_1 ua'' + B_1(vb'' + wc'') = n$$

$$Apa + B(qb + rc) = \lambda + n\beta - m\gamma$$
$$Apa' + B(qb' + rc') = \mu + l\gamma - n\alpha$$
$$Apa'' + B(qb'' + rc'') = \nu + m\alpha - l\beta.$$

Von den 6 Integrationsconstanten lmn $\lambda\mu\nu$ lassen sich durch passende Verfügung über Richtung und Lage der x Axe $m = n = \mu = \nu = 0$ machen. Die Gleichungen nehmen dann die einfachere Form an:

$$3)\quad A_1 u = la \qquad 6)\quad Apa + B(qb + rc) = \lambda$$
$$4)\quad B_1 v = lb \qquad 7)\quad Apa' + B(qb' + rc') = l\gamma$$
$$5)\quad B_1 w = lc \qquad 8)\quad Apa'' + B(qb'' + rc'') = -l\beta.$$

Ausserdem erhält man noch 4 Variabeln durch Quadraturen:

$$\frac{da}{dt} = qc - rb$$

$$(qc - rb)^2 = (b^2 + c^2)(q^2 + r^2) - (bq + cr)^2$$
$$b^2 + c^2 = 1 - a^2$$

$$q^2 + r^2 = \frac{1}{B}(2T - Ap^2 - A_1u^2 - B_1(v^2 + w^2))$$

$$A_1u^2 + B_1(v^2 + w^2) = \frac{l^2a^2}{A_1} + \frac{l^2}{B_1}(b^2 + c^2)$$
$$= \frac{l^2}{B_1} + \frac{B_1 - A_1}{A_1B_1} l^2a^2$$

$$q^2 + r^2 = \frac{1}{B}\left(2T - Ap^2 - \frac{l^2}{B_1} - \frac{B_1 - A_1}{A_1B_1} l^2a^2\right)$$

$$bq + cr = \frac{1}{B}(\lambda - Apa)$$

$$\frac{da}{dt} = \sqrt{(1 - a^2)\cdot\frac{1}{B}\left(2T - Ap^2 - \frac{l^2}{B_1} - \frac{B_1 - A_1}{A_1B_1} l^2a^2\right) - \frac{1}{B^2}(\lambda - Apa)^2}$$
$$= \sqrt{R}$$

$$9)\quad t = \int \frac{da}{\sqrt{R}} + \text{Const.}$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = au + bv + cw$$

$$= \frac{l}{B_1} + \frac{B_1 - A_1}{A_1 B_1} la^2$$

$$10)\quad \alpha = \frac{l}{B_1} t + \frac{B_1 - A_1}{A_1 B_1} l \int \frac{a^2 da}{\sqrt{R}} + \text{Const.}$$

Setze ich

$$a' = \sqrt{1 - a^2} \cos \vartheta$$
$$a'' = \sqrt{1 - a^2} \sin \vartheta,$$

so ist ϑ der Winkel, den die Projection von x auf die $\beta\gamma$ Ebene mit der β Axe bildet, positiv gerechnet von $+\beta$ nach $+\gamma$.

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{a''}{a'}$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{1}{1 + \frac{a''^2}{a'^2}} \cdot \frac{a' \frac{da''}{dt} - a'' \frac{da'}{dt}}{a'^2}$$

$$= -\frac{qb + rc}{1 - a^2} = \frac{Apa - \lambda}{B(1 - a^2)}.$$

$$11)\quad \vartheta = \int \frac{Apa - \lambda}{B(1 - a^2)} \frac{da}{\sqrt{R}} + \text{Const.}$$

Endlich setze ich

$$b = \sqrt{1 - a^2} \cos \chi$$
$$c = \sqrt{1 - a^2} \sin \chi,$$

dann ist χ der Winkel, den die Projection von α auf die yz Ebene mit der y Axe bildet, positiv gerechnet von y nach z

$$\chi = \operatorname{arc\,tg} \frac{c}{b}$$

$$\frac{dp}{dt} = p - \frac{(qb + rc)a}{1 - a^2}.$$

$$12)\quad \chi = pt + \int \frac{Apa - \lambda}{B(1 - a^2)} \frac{a da}{\sqrt{R}} + \text{Const.}$$

Dies sind die von Kirchhoff aufgestellten Gleichungen, welche die Lösung des Problems enthalten.

Ich will nun die 12 Integrationsconstanten bestimmen. Durch Verfügung über die Richtung und Lage der x Axe war bereits $m = n = \mu = \nu = 0$ gemacht, ich kann noch ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $l > 0$ und für $t = 0$ $a < 0$ ist, dann folgt aus $A_1 u = la$, dass auch $u < 0$ sein muss. Es sei ferner für $t = 0$

5) $x = 0$.

6) β sei parallel zu der durch x und die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit V gelegten Ebene, und zwar sei $a' = +\sqrt{1-a^2}$, dann wird $a'' = 0$ und $\vartheta = 0$.

7) y liege in der Ebene V, x und zwar so, dass $b = -\sqrt{1-a^2}$ ist, dann wird $c = 0$, $\chi = \pi$ und wegen $B_1 w = lc$ auch $w = 0$.

Fällt V mit x zusammen d. h. ist $a = -1$, so will ich über y und z so verfügen, dass $r = 0$, $q > 0$ wird; β soll dann parallel der xy Ebene werden.

8) $\frac{da}{dt} = 0$. Es wird später gezeigt werden[1], dass dies für reelle Werte von a mindestens zweimal eintreten muss, also kann ich noch hinzufügen, dass a wachsen soll.

Endlich seien die Anfangswerte folgender Variabeln gegeben

9) a 10) u 11) p 12) q.

Die beiden ersteren waren negativ angenommen, für p und q bleiben die 4 Möglichkeiten:

$$p > 0 \quad q > 0 \qquad p > 0 \quad q < 0$$
$$p < 0 \quad q > 0 \qquad p < 0 \quad q < 0.$$

Der 3te Fall lässt sich aber auf den 2ten und der 4te auf den ersten dadurch reduciren, dass man γ mit $-\gamma$ vertauscht. Die γ Axe soll nun so gewählt werden, dass $p > 0$ wird, dadurch ist auch die Richtung von z bestimmt.

Die Fälle $l = 0$ d. h. $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$, und $A_1 = B_1$ will ich von der Betrachtung ausschliessen, weil die Bewegung dann ebenso wie im leeren Raume vor sich geht.

§ 2.

Ich will nun den Weg angeben, auf welchem man bei der Darstellung von ϑ und χ als Functionen der Zeit einfachere Formeln erhält als die von Köpcke angegebenen. Es genügt hierzu eine Beschränkung auf den Fall $A_1 < B_1$, weil hieraus durch Transformation der andere Fall hergeleitet werden kann. Dann hat $R=0$ (wie in § 4. gezeigt wird) 4 reelle Wurzeln $a_1 < -1 < a_2 < a_3 < +1 < a_4$, dem absoluten Werte nach ist $a_1 \overset{<}{=} a_4$, $a_2 \overset{>}{=} a_3$ und a liegt zwischen a_2 und a_3. Um daher

$$dt = \frac{da}{\sqrt{R}} = \frac{da}{\sqrt{g'(a-a_1)(a-a_2)(a-a_3)(a-a_4)}}$$

auf die Normalform zu bringen, ist zu setzen

$$x = \frac{a-a_2}{a-a_1} \cdot \frac{a_3-a_1}{a_3-a_2}$$

und

$$k^2 = \frac{a_4-a_1}{a_4-a_2} \cdot \frac{a_3-a_2}{a_3-a_1}.$$

Es wird dann

$$dt = \frac{M}{2} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}}$$

$$x = \sin^2 \text{am} \frac{t}{M} = s^2\tau$$

worin

$$M = \frac{2}{\sqrt{g'(a_4-a_2)(a_3-a_1)}}$$

$$\tau = \frac{t}{M} \text{ ist.}$$

Die Zeit T, in welcher a von a_2 bis a_3 wächst, ist

$$T = MK$$

$$\left[K = \tfrac{1}{2} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}}\right]$$

$$\frac{a_3-a_2}{a_2-a_1} = \varepsilon$$

ist im allgemeinen ein positiver echter Bruch und kleiner als k^2, denn es ist

$$k^2 = \varepsilon \frac{a_4-a_1}{a_4-a_2}$$

$$s^2\tau = \frac{a - a_2}{\varepsilon(a - a_1)}$$

$$a = \frac{a_2 - a_1 \varepsilon\, s^2\tau}{1 - \varepsilon\, s^2\tau} = \frac{a_2 - a_1\, \varepsilon x}{1 - \varepsilon x}$$

Es war

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{Ap\,a - \lambda}{B(1 - a^2)} \qquad \frac{Ap}{B} = h$$

$$= \frac{h + h'a}{1 - a^2} \qquad -\frac{\lambda}{B} = h' \text{ gesetzt}$$

$$= \frac{h + h'}{2(1 - a)} + \frac{h - h'}{2(1 + a)}$$

$$\frac{1}{1-a} = \frac{1}{1-a_1} + \frac{a_2 - a_1}{(1 - a_1)(1 - a_2 - \varepsilon(1 - a_1)x)}$$

$$\frac{1}{1+a} = \frac{1}{1+a_1} - \frac{a_2 - a_1}{(1 + a_1)(1 + a_2 - \varepsilon(1 + a_1)x)}$$

$$dt = \frac{da}{\sqrt{R}} = \frac{M}{2}\frac{dx}{\sqrt{fx}}$$

worin

$$fx = x(1 - x)(1 - k^2x) \text{ ist,}$$

$$d\vartheta = \tfrac{1}{2}\left(\frac{h + h'}{1 - a_1} + \frac{h - h'}{1 + a_1}\right)\frac{M}{2}\frac{dx}{\sqrt{fx}}$$
$$+ \tfrac{1}{2}\left(\frac{(h + h')(a_2 - a_1)}{(1 - a_1)(1 - a_2 - \varepsilon(1 - a_1)x)} - \frac{(h - h')(a_2 - a_1)}{(1 + a_1)(1 + a_2 - \varepsilon(1 + a_1)x)}\right)$$
$$\times \frac{M}{2}\frac{dx}{\sqrt{fx}}$$

$$d\vartheta = \tfrac{1}{2}\left(\frac{h + h'}{1 - a_1} + \frac{h - h'}{1 + a_1}\right)\frac{M}{2}\frac{dx}{\sqrt{fx}}$$
$$+ \frac{a_2 - a_1}{2}\left\{\frac{h + h'}{(1 - a_1)(1 - a_2)} \cdot \frac{1}{1 - \varepsilon\dfrac{1 - a_1}{1 - a_2}x}\right.$$
$$\left. - \frac{h - h'}{(1 + a_1)(1 + a_2)} \cdot \frac{1}{1 - \varepsilon\dfrac{1 + a_1}{1 + a_2}x}\right\}\frac{M}{2}\frac{dx}{\sqrt{fx}}$$

$$\varepsilon\frac{1 - a_1}{1 - a_2} = \eta$$

ist ein echter Bruch und grösser als k^2, denn

$$\frac{1-a_1}{1-a_2} = \frac{1-a_1+a_4-1}{1-a_2+\frac{1-a_2}{1-a_1}(a_4-1)}$$

$$1-a_2 \quad \text{und} \quad \frac{1-a_2}{1-a_1}(a_4-1)$$

sind positive Grössen; wenn ich also den positiven echten Bruch $\frac{1-a_2}{1-a_1}$ durch 1 ersetze, so erhalte ich einen kleineren Wert

$$\frac{1-a_1}{1-a_2} > \frac{1-a_1+a_4-1}{1-a_2+a_4-1} \quad \text{d. i.}$$

$$> \frac{a_4-a_1}{a_4-a_2}$$

auf beiden Seiten mit dem positiven Wert ε multiplicirt giebt

$$\eta > k^2.$$

Aehnlich lässt sich zeigen, dass η ein echter Bruch ist. Es ist

$$\frac{1-a_1}{1-a_2} = \frac{1-a_1+a_3-1}{1-a_2+\frac{1-a_2}{1-a_1}(a_2-1)}, \quad \text{und zwar } 1-a_2 > 0,\; a_3-1 < 0.$$

Der Wert des Bruches wird also vergrössert, wenn ich $\frac{1-a_2}{1-a_1}$ durch 1 ersetze, also

$$\frac{1-a_1}{1-a_2} < \frac{a_3-a_1}{a_3-a_2} = \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\eta = \varepsilon \frac{1-a_1}{1-a_2} < 1$$

$\varepsilon \frac{1+a_1}{1+a_2}$ ist eine stets negative Grösse, ich setze

$$\varepsilon \frac{1+a_1}{1+a_2} = -\zeta,$$

also

$$\zeta > 0$$

$$\vartheta = \frac{1}{2}\left(\frac{h+h'}{1-a_1}+\frac{h-h'}{1+a_1}\right)t + \frac{a_2-a_1}{2}\left\{\frac{h+h'}{1-a_1\,1-a_2}\int \frac{1}{1-\eta x}\frac{dx}{\sqrt{fx}} - \frac{h-h'}{1+a_1\,1+a_2}\int \frac{1}{1+\zeta x}\frac{dx}{\sqrt{fx}}\right\}\frac{M}{2}$$

Ich setze nun

$$\eta = k^2 s^2(ie+K)$$

$$\zeta = -k^2 s^2 iz$$

hierin sind e und r reelle positive Grössen, die ich $< K'$ annehme.

$$\vartheta = \frac{t}{2}\left(\frac{h+h'}{1-a_1}+\frac{h-h'}{1+a_1}\right)$$
$$+\frac{M}{2}(a_2-a_1)\left\{\frac{h+h'}{1-a_1\,1-a_2}\left(\frac{t}{M}+\frac{\mathrm{s}(ie+K)}{\mathrm{c}(ie+K)\delta(ie+K)}\Pi(\tau, ie+K)\right)\right.$$
$$\left.-\frac{h-h'}{1+a_1\,1+a_2}\left(\frac{t}{M}+\frac{\mathrm{s}(iz)}{\mathrm{c}(iz)\,\delta(iz)}\Pi(\tau, iz)\right)\right\}$$

(S. Durège: Theorie der ell. Funct. Absch. XX. auch im folgenden bietet der Gang der Rechnung vielfache Analogien mit der dort behandelten Pendelaufgabe).

$$= \frac{t}{2}\left(\frac{h+h'}{1-a_2}+\frac{h-h'}{1+a_2}\right)$$
$$+\frac{M}{2}(a_2-a_1)\left\{\frac{h+h'}{1-a_1\,1-a_2}\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{c}\delta}(ie+K)\,\Pi(\tau, ie+K)\right.$$
$$\left.-\frac{h-h'}{1+a_1\,1+a_2}\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{c}\delta}(iz)\,\Pi(\tau, iz)\right\}$$

Drückt man die elliptischen Functionen durch η und ζ, und diese wieder durch die a aus, so erhält man

$$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{c}\delta}(ie+K) = \frac{i}{a_2-a_1}\sqrt{\frac{1-a_1\,1-a_2}{1-a_3\,a_4-1}}\sqrt{(a_3-a_1)(a_4-a_2)}$$

$$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{c}\delta}(iz) = \frac{i}{a_2-a_1}\sqrt{-\frac{1+a_1\,1+a_2}{1+a_3\,1+a_4}}\sqrt{(a_3-a_1)(a_4-a_2)}$$

Setzt man dies in die Coefficienten von Π ein, nimmt $(1-a_1)(1-a_2)$ und $(1+a_1)(1+a_2)$ unter's Wurzelzeichen, berücksichtigt aber dabei, dass $1+a_1$ negativ ist, also $= -\sqrt{(1+a_1)^2}$ gesetzt werden muss, dann wird

$$\vartheta = \frac{t}{2}\left(\frac{h+h'}{1-a_2}+\frac{h-h'}{1+a_2}\right)$$
$$+\frac{M}{2}\sqrt{(a_3-a_1)(a_4-a_2)}\left\{\frac{h+h'}{\sqrt{-(1-a_1)(1-a_2)(1-a_3)(1-a_4)}}i\Pi(\tau, ie+K)\right.$$
$$\left.+\frac{h-h'}{\sqrt{-(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)(1+a_4)}}i\Pi(\tau, iz)\right\}$$

Es ist nun

$$\frac{M}{2} = \frac{1}{\sqrt{g'(a_3-a_1)(a_4-a_2)}}$$

und aus der identischen Gleichung

$$R = (1-a^2)(g-g'a^2)-(h+h'a)^2 = g'(a-a_1)(a-a_2)(a-a_3)(a-a_4)$$

folgt für $a = 1$

$$h+h' = \sqrt{-g'(1-a_1)(1-a_2)(1-a_3)(1-a_4)}$$

und für $a = -1$

$$\omega(h-h') = \sqrt{-g'(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)(1+a_4)}$$

für ω ist ± 1 zu setzen, je nachdem $h-h' \gtrless 0$ ist.

Infolge dieser Gleichungen wird

$$\vartheta = \frac{t}{2}\left(\frac{h+h'}{1-a_2}+\frac{h-h'}{1+a_2}\right)+i\Pi(\tau, ie+K)+i\omega\,\Pi(\tau, iz)$$

$$\vartheta = \frac{t}{2}\left(\frac{h+h'}{1-a_2}+\frac{h-h'}{1+a_2}\right)+i\tau(Z(ie+K)+\omega Z(iz))$$
$$+\frac{i}{2}\log\frac{\Theta(\tau-ie-K)}{\Theta(\tau+ie+K)}\left(\frac{\Theta(\tau-iz)}{\Theta(\tau+iz)}\right)^{\omega}$$
$$= \frac{\Theta}{T}t+\frac{i}{2}\log\frac{\Theta(\tau-ie-K)}{\Theta(\tau+ie+K)}\cdot\left(\frac{\Theta(\tau-iz)}{\Theta(\tau+iz)}\right)^{\omega}$$

Der logarithmische Bestandteil von ϑ ist periodisch um $\tau = 2K$ oder $t = 2MK = 2T$, und verschwindet für $\tau = 0, K, 2K \ldots$ resp. $t = 0, T, 2T \ldots$ Für $\tau = 2K-\tau$ nimmt der log das entgegengesetzte Zeichen an. ϑ wächst also im allgemeinen proportional der Zeit, der logarithmische Bestandteil drückt die Abweichung davon aus. Nimmt a von a_3 bis a_2 ab, so findet diese Abweichung im entgegengesetzten Sinne statt, als wenn a von a_2 bis a_3 zunimmt.

Der Wert von Θ lässt sich sich noch vereinfachen

$$\Theta = \frac{T}{2}\left(\frac{h+h'}{1-a_2}+\frac{h-h'}{1+a_2}\right)+iK(Z(ie+K)+\omega Z(iz))$$

Es ist

$$i(Z(ie+K)+\omega Z(iz)) = \frac{\pi}{2KK'}(e+\omega z)-k'^2\frac{\mathrm{sc}}{\delta}(e,k')$$
$$-\omega\frac{\mathrm{s}\delta}{\mathrm{c}}(z,k')+Z(e,k')+\omega Z(z,k')$$

früher war gefunden

$$\frac{M}{2}(a_2-a_1)\frac{h+h'}{(1-a_1)(1-a_2)}\cdot\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{c}\delta}(ie+K) = i$$

$$\frac{M}{2}(a_2-a_1)\frac{h-h'}{(1+a_1)(1+a_2)}\cdot\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{c}\delta}(iz) = -i\omega$$

also

$$k'^2 \frac{sc}{\delta}(e, k') = i \frac{c\delta}{s}(ie + K) = \frac{M}{2}(a_2 - a_1) \frac{h + h'}{(1 - a_1)(1 - a_2)}$$

$$\omega \frac{\delta}{sc}(z, k') = \omega i \frac{c\delta}{s}(iz) = -\frac{M}{2}(a_2 - a_1) \frac{h - h'}{(1 + a_1)(1 + a_2)}$$

mit

$$s^2(z, k') = -\frac{1 + a_1}{1 + a_4} \frac{a_4 - a_2}{a_2 - a_1}$$

multiplicirt,

$$\omega \frac{s\delta}{c}(z, k') = \frac{M}{2}(a_4 - a_2) \frac{h - h'}{(1 + a_2)(1 + a_4)}$$

$$\Theta = \frac{T}{2}\left(\frac{h + h'}{1 - a_2} + \frac{h - h'}{1 + a_2}\right) + \frac{\pi}{2K'}(e + \omega z) + K.(Z(e, k') + \omega Z(z, k'))$$

$$- MK\left(\frac{a_2 - a_1}{2} \frac{h + h'}{(1 - a_1)(1 - a_2)} + \frac{a_4 - a_2}{2} \frac{h - h'}{(1 + a_2)(1 + a_4)}\right)$$

$$\Theta = \frac{T}{2}\left(\frac{h + h'}{1 - a_1} + \frac{h - h'}{1 - a_4}\right) + \frac{\pi}{2K'}(e + \omega z) + K(Z(e, k') + \omega Z(z, k'))$$

Es ist $\omega = \pm 1$, also

$$Z(e, k') + \omega Z(z, k') = Z(e + \omega z, k') + k'^2 s(e) s(\omega z) s(e + \omega z, k')$$

$$k'^2 s(e) s(z) s(e + \omega z) = k'^2 \frac{s^2(e) s(z) c(z) \delta(z) + \omega s^2(z) s(e) c(e) \delta(e)}{1 - k'^2 s^2(e) s^2(z)}$$

$$= \frac{(\eta - k^2)\sqrt{\frac{\zeta(1 + \zeta)}{k^2 + \zeta}} + \omega\zeta\sqrt{\frac{(1 - \eta)(\eta - k^2)}{\eta}}}{\eta + \zeta}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{a_4 - 1}{a_4 + 1}\sqrt{-\frac{g'(1 + a_1)(1 + a_2)(1 + a_3)(1 + a_4)}{g'(a_4 - a_2)(a_3 - a_1)}}\right.$$

$$\left.- \omega \frac{1 + a_1}{1 - a_1}\sqrt{-\frac{g'(1 - a_1) \ldots (1 - a_4)}{g'(a_4 - a_2)(a_3 - a_1)}}\right)$$

$$\omega k'^2 s(e) s(z) s(e + \omega z) = \frac{1}{2}\left(\frac{a_4 - 1}{a_4 + 1}(h - h')\frac{M}{2} - \frac{1 + a_1}{1 - a_1}(h + h')\frac{M}{2}\right)$$

$$\Theta = \frac{T}{2}\left\{\frac{h + h'}{1 - a_1}\left(1 - \frac{1 + a_1}{2}\right) + \frac{h - h'}{1 + a_4}\left(1 + \frac{a_4 - 1}{2}\right)\right\}$$

$$+ \frac{\pi}{2K'}(e + \omega z) + KZ(e + \omega z, k')$$

$$\Theta = \frac{h}{2}T + \frac{\pi}{2K'}(e + \omega z) + K.Z(e + \omega z, k')$$

$$\vartheta = \frac{\Theta}{T}t + \frac{i}{2}\log\frac{\Theta(\tau - ie - K)}{\Theta(\tau + ie + K)} \cdot \left(\frac{\Theta(\tau - iz)}{\Theta(\tau + iz)}\right)^{\omega}$$

Eine Constante ist nicht hinzuzufügen, weil für $t = 0$ und $a > -1$ $\vartheta = 0$ sein sollte.

Noch weiter vereinfacht sich der Ausdruck, wenn für $t = 0$ $a = a_2 = -1$ ist. Dann wird

$$\zeta = \infty \quad z = K' \quad \omega = +1$$

und man erhält

$$\vartheta = \frac{\Theta}{T} t + \frac{i}{2} \log \frac{\Theta(\tau - ie - K)}{\Theta(\tau + ie + K)} + \frac{\pi}{2},$$

hierin ist

$$\Theta = \frac{h}{1 - a_1} T + \frac{\pi e}{2K'} + KZ(e, k')$$

Für $t = 0$ ist ϑ unbestimmt und erleidet eine Unstetigkeit um π. Weil jedoch in diesem Falle der Anfangswert von $q > 0$ angenommen war, so wird in unendlich kleiner Zeit nach Beginn der Bewegung $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ sein. Aus diesem Grunde ist dem Wert für ϑ noch $\frac{\pi}{2}$ hinzugefügt.

Das Integral, welches χ bestimmt, lässt sich auf das oben behandelte zurückführen

$$\chi = pt + \int \frac{Apa - \lambda}{B(1 - a^2)} \frac{ada}{\sqrt{R}} + \text{Const.}$$

$$\int \frac{Apa - \lambda}{B(1 - a^2)} \frac{ada}{\sqrt{R}} = \int \frac{ha + h' - (1 - a^2)h'}{1 - a^2} \frac{da}{\sqrt{R}}$$

$$= -h't + \int \frac{h' + ha}{1 - a^2} \frac{da}{\sqrt{R}}$$

Vertauscht man hierin die Constanten h und h', so erhält man dasselbe Integral wie für ϑ, also wird

$$\int \frac{Apa - \lambda}{B(1 - a^2)} \frac{ada}{\sqrt{R}} = -h't$$

$$+ \left\{ \frac{h'T}{2} + \frac{\pi}{2K'} (e + \omega z) + KZ(e + \omega z, k') \right\} \frac{t}{T}$$

$$+ \frac{i}{2} \log \frac{\Theta(\tau - ie - K)}{\Theta(\tau + ie + K)} \left(\frac{\Theta(\tau - iz)}{\Theta(\tau + iz)} \right)^{\omega}$$

hierin ist $\omega = \pm 1$, je nachdem $h' - h \gtrless 0$ ist.

$$\chi = \left\{ \frac{2B-A}{2B} pT + \frac{\pi}{2K'}(e + \omega z) + KZ(e + \omega z, k'\right\} \frac{t}{T}$$

$$+ \frac{i}{2} \log \frac{\Theta(\tau - ie - K)}{\Theta(\tau + ie + K)} \left(\frac{\Theta(\tau - iz)}{\Theta(\tau + iz)}\right)^{\omega} + \pi$$

χ besteht also ebenso wie ϑ aus einem proportional der Zeit wachsenden und einem periodischen Bestandteil.

§ 3.

Ich will jetzt dazu übergehen die Bewegung des Körpers zu bestimmen. Aus den Gleichungen in § 1. folgt

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{l}{B_1}\left(1 + \frac{B_1 - A_1}{A_1} a^2\right)$$

Die Geschwindigkeit des Körpers parallel der α Axe behält stets dasselbe Zeichen und liegt zwischen den Werten

$$\frac{l}{A_1} = \sqrt{u^2 + \frac{B_1^2}{A_1^2}(v^2 + w^2)}$$

und

$$\frac{l}{B_1} = \sqrt{\frac{A_1^2}{B_1^2} u^2 + v^2 + w^2}$$

welche für $a^2 = 1$ resp. $a^2 = 0$ erreicht werden. α wächst also abgesehen von kleinen Schwankungen proportional der Zeit.

Dagegen können β und γ eine bestimmte Grenze nicht überschreiten, denn quadrirt und addirt man die Gleichungen 6) 7) 8), so erhält man

$$A^2p^2 + B^2(q^2 + r^2) = \lambda^2 + l^2(\beta^2 + \gamma^2)$$

$$q^2 + r^2 = \frac{1}{B}\left(2T - Ap^2 - \frac{l^2}{B_1} - \frac{B_1 - A_1}{A_1 B_1} l^2 a^2\right)$$

$$\frac{l^2}{B^2}(\beta^2 + \gamma^2) = -\frac{A^2p^2 - \lambda^2}{B^2} + \frac{1}{B}\left(2T - Ap^2 - \frac{l^2}{B_1} - \frac{B_1 - A_1}{B_1 A_1} l^2 a^2\right)$$

Hierin ist die rechte Seite constant, abgesehen von dem letzten Gliede, welches den Factor a^2 enthält.

Die Bewegung des Anfangspunktes von x, y, z hat also den Charakter einer Schraubenbewegung, deren Axe die α Axe ist.

Projicirt man die Bahn des Punktes auf die $\beta\gamma$ Ebene, so erhält man dort eine Curve, über die sich folgendes sagen lässt:

$$1)\quad \frac{d\beta}{dt} = a'u + b'v + c'w$$

$$= \frac{l}{A_1} aa' + \frac{l}{B_1}(bb' + cc')$$

$$= \frac{B_1 - A_1}{B_1 A_1} l . aa'$$

$$= \frac{B_1 - A_1}{B_1 A_1} l . a\sqrt{1-a^2}\cos\vartheta$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = a''u + b''v + c''w$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{B_1 - A_1}{B_1 A_1} l . aa''$$

$$= \frac{B_1 - A_1}{B_1 A_1} l . a\sqrt{1-a^2}\sin\vartheta$$

Im allgemeinen ändern $\frac{d\beta}{dt}$ und $\frac{d\gamma}{dt}$ für $a = 0$ und $a = \pm 1$ beide ihr Zeichen, die Curve muss also in beiden Fällen eine Spitze haben.

$$2)\quad \frac{d\gamma}{d\beta} = \frac{\frac{d\gamma}{dt}}{\frac{d\beta}{dt}} = \frac{a''}{a'} = \operatorname{tg}\vartheta$$

ϑ ist aber der Winkel, den die Projection von x mit der β Axe bildet, also ist die Projection von x auf $\beta\gamma$ Ebene stets Tangente an die Curve.

Dasselbe gilt von der Projection der Richtung der Geschwindigkeit

$$V = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$$

auf die $\beta\gamma$ Ebene. Hieraus folgt, dass V und x in einer Ebene liegen, die zu α parallel ist.

3) Aus $l\gamma = Apa' + B(qb' + rc')$ und

$$-l\beta = Apa'' + B(qb'' + rc'')$$

folgt

$$l(a''\gamma + a'\beta) = B(q(a''b' - b''a') + r(a''c' - c''a'))$$

$$= -B(qc - rb)$$

$$l(a''\gamma + a'\beta) = -B\frac{da}{dt}$$

$$\frac{l}{B}\left(\gamma\sin\vartheta + \beta\cos\vartheta\right) = -\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}\frac{da}{dt}$$

Setzt man $\beta = \varrho\cos\varphi$

$\gamma = \varrho\sin\varphi$,

so ist $\varrho = \sqrt{\beta^2+\gamma^2}$ der Radiusvector der Curve und φ der Winkel, den er mit $+\beta$ bildet, positiv gerechnet von $+\beta$ nach $+\gamma$, dann wird die obige Gleichung:

$$\frac{l}{B}\varrho.\cos(\vartheta-\varphi) = -\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}\frac{da}{dt}$$

Hieraus folgt, dass für $\frac{da}{dt} = 0$ entweder $\varrho = 0$ oder $\cos(\vartheta-\varphi)=0$ sein muss. Das Letztere ist der allgemeine Fall und bedeutet, dass für $\frac{da}{dt} = 0$ die Curve senkrecht auf dem Radiusvector steht oder einen mit dem Radiusvector beschriebenen Kreis berührt. Dies ist jedoch nicht mehr der Fall, wenn $\frac{da}{dt}$ verschwindet für $a^2 = 1$.

4) Multiplicirt man die Gleichungen 6), 7), 8) in § 1 der Reihe nach mit a, a', a'' und addirt sie, so erhält man

$$Ap = \lambda a + l(\gamma a' - \beta a'')$$

$$l(\gamma\cos\vartheta - \beta\sin\vartheta) = \frac{Ap-\lambda a}{\sqrt{1-a^2}}$$

$$l.\varrho.\sin(\varphi-\vartheta) = \frac{Ap-\lambda a}{\sqrt{1-a^2}}$$

Wenn $Ap - \lambda a = 0$, so ist $\varrho = 0$ oder $\sin(\varphi-\vartheta) = 0$. Im allgemeinen ist das Letztere der Fall, also ist $Ap - \lambda a = 0$ die Bedingung dafür, dass der Radiusvector die Curve berührt.

Wenn $a^2 = \pm 1$ werden kann, so folgt aus der Betrachtung von

$$\frac{da}{dt} = \sqrt{R} = \sqrt{(1-a^2)(q^2+r^2) - \frac{(\lambda - Apa)^2}{B^2}},$$

dass dann

$$R = 0 \quad \text{und}$$
$$\lambda = Ap$$

sein muss. Es wird also

$$\left(\frac{Ap - \lambda a}{\sqrt{1-a^2}}\right)_{a^2=1} = 0$$

d. h. die Tangente der Spitze, welche die Curve für $a^2 = 1$ hat, liegt in der Richtung des Radiusvector. Bei der Spitze, welche die Curve für $a = 0$ hat, ist dies im allgemeinen nicht der Fall, sondern nur, wenn $p = 0$ ist.

$$5)\quad \frac{d^2\gamma}{d\beta^2} = \frac{d\frac{d\gamma}{d\beta}}{dt}\frac{dt}{d\beta} = \frac{d\,\mathrm{tg}\,\vartheta}{dt}\cdot\frac{1}{l\frac{B_1-A_1}{B_1A_1}aa'}$$

$$= \frac{1}{\cos^2\vartheta}\cdot\frac{d\vartheta}{dt}\,\frac{B_1A_1}{(B_1-A_1)l.aa'}$$

$$= \frac{1-a^2}{a'^2}\cdot\frac{Apa-\lambda}{B(1-a^2)}\cdot\frac{B_1A_1}{(B_1-A_1)\,laa'}$$

$$= \frac{B_1A_1}{(B_1-A_1)l}\cdot\frac{Apa-\lambda}{B\,.\,aa'^3}$$

Die Curve hat einen Wendepunkt, wenn $Apa - \lambda$ verschwindet und nicht gleichzeitig $\frac{da}{dt} = 0$ oder $a = 0$ wird.

Diese Gleichungen ergeben also einige allgemeine Eigenschaften der Curve, welche die Projection der Bahn des Coordinatenanfangspunktes von x, y, z auf die $\beta\gamma$ Ebene bildet; dieselben sind, wie sich später zeigen wird, hinreichend, um in jedem Falle die Gestalt der Curve zu bestimmen. Denkt man sich dann über derselben einen geraden Cylinder errichtet, dessen Axe α ist, so bewegt sich der Coordinatenanfangspunkt schraubenförmig auf diesem Cylinder. Die x Axe ist stets Tangente desselben und bildet mit der α Axe Winkel a, deren Maximal- resp. Minimalwerte durch die Wurzeln der Gleichung $R = 0$ gegeben sind. Die vollständige Bewegung des Körpers erhält man, wenn man sich denselben noch mit der constanten Winkelgeschwindigkeit p um die x Axe gedreht denkt.

Um die Discussion übersichtlicher zu machen, will ich im folgenden die Fälle $A_1 < B_1$ und $A_1 > B_1$ trennen; im ersteren hat der Körper den Charakter eines zugespitzten Rotationskörpers, während er im letzteren sich mehr der Gestalt einer Scheibe nähert.

§ 4.

$A_1 < B_1$.

Ist V die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit, so ist

$$\operatorname{tg}(V,x) = -\frac{v}{u}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha,x) = -\frac{b}{a} = -\frac{\frac{B_1 v}{l}}{\frac{A_1 u}{l}} = \frac{B_1}{A_1}\operatorname{tg}(V,x)$$

Die Richtung von V liegt also zwischen der α Axe und dem Teil der Rotationsaxe, welcher mit α einen spitzen Winkel bildet. Dies gilt für den ganzen Verlauf der Bewegung, weil die Vx Ebene stets parallel α ist. V und α fallen zusammen, wenn $a = 0$ oder $a = \pm 1$ ist; die Abweichung der beiden Richtungen V und α wird am grössten, wenn $\operatorname{tg}(V,\alpha) = \frac{A_1 - B_1}{A_1} \cdot \frac{\operatorname{tg}(V.x)}{1 + \frac{B_1}{A_1}\operatorname{tg}^2(V,x)}$ ein Maximum erreicht.

Es sei Wkl. $V, x = \varepsilon$, dann findet das Maximum statt für

$$\frac{d\operatorname{tg}(V,\alpha)}{d\varepsilon} = \frac{A_1 - B_1}{A_1}\,\frac{1 + \frac{B_1}{A_1}\operatorname{tg}^2\varepsilon - \operatorname{tg}\varepsilon.\frac{2B_1}{A_1}\operatorname{tg}\varepsilon}{\left(1 + \frac{B_1}{A_1}\operatorname{tg}^2\varepsilon\right)^2}\,\frac{1}{\cos^2\varepsilon} = 0$$

$$1 - \frac{B_1}{A_1}\operatorname{tg}^2\varepsilon = 0$$

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \operatorname{tg}(V,x) = \pm\sqrt{\frac{A_1}{B_1}}$$

$$\operatorname{tg}(V,\alpha) = \mp\frac{B_1 - A_1}{2\sqrt{A_1 B_1}}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha,x) = \pm\sqrt{\frac{B_1}{A_1}}$$

$$\cos^2(\alpha,x) = a^2 = \frac{A_1}{A_1 + B_1}$$

Die Richtung der Geschwindigkeit V ist stets Tangente an die Curve, welche der Anfangspunkt von x, y, z bei der Bewegung beschreibt; diese Curve hat also für $a^2 = \frac{A_1}{A_1 + B_1}$ einen Wendepunkt.

Die Werte, welche a annehmen kann, werden bestimmt durch

$$\frac{da}{dt} = \sqrt{(1-a^2)\,\frac{1}{B}\left(2T - Ap^2 - \frac{l^2}{B_1} - \frac{B_1 - A_1}{B_1 A_1} l^2 a^2\right) - \left(\frac{\lambda - Apa}{B}\right)^2} = \sqrt{R}.$$

Setze ich

$$\frac{1}{B}\left(2T - Ap^2 - \frac{l^2}{B_1}\right) = g$$

$$\frac{B_1 - A_1}{B_1 A_1} \cdot \frac{l^2}{B} = g'$$

so ist $g' > 0$, und weil $q^2 + r^2 = g - g'a^2$, so ist auch $g > 0$.

Denkt man sich a als Abscisse und die zugehörigen Werte von $(1 - a^2)(g - g'a^2)$ als Ordinaten aufgetragen, so erhält man eine Curve 4ten Grades, welche die a Axe in den Punkten ± 1 und $\pm \sqrt{\frac{g}{g'}}$ schneidet. $\left(\frac{\lambda - Apa}{B}\right)^2$ in derselben Weise dargestellt giebt eine Parabel, deren Scheitel auf a liegt an der Stelle $a = \frac{\lambda}{Ap}$. Weil im Verlauf der Bewegung stets $-1 \leqq a \leqq +1$ sein muss, so muss die Parabel mit der vorigen Curve mindestens einen Punkt zwischen -1 und $+1$ gemeinsam haben. Die graphische Darstellung ergiebt dann, dass stets noch ein 2ter Schnittpunkt von Parabel und Curve zwischen denselben Grenzen und 2 andere ausserhalb vorhanden sind. Die Gleichung $R = 0$ hat also 4 reelle Wurzeln $a_1\ a_2\ a_3\ a_4$ und zwar ist

$$-\infty < a_1 < -1 < a_2 < a_3 < +1 < a_4 < +\infty.$$

Durch passende Verfügung über die Richtung der x Axe kann man erreichen, dass dem absoluten Werte nach $a_2 \geqq a_3$ wird, oder (was dasselbe bedeutet) dass $\lambda < 0$ ist. Setze ich daher $-\frac{\lambda}{B} = h$ und $\frac{Ap}{B} = h'$, so ist $h > 0$ und $h' > 0$.

a_3 erreicht bei gegebenem a_2 seinen Maximalwert $-a_2$, wenn h oder h' oder beide zusammen verschwinden. Es ist $a_3 \gtreqless 0$, je nachdem $g - h^2 \gtreqless 0$ ist. a_3 kann mit a_2 zusammenfallen, wenn $R = 0$ und $\frac{dR}{da} = 0$ ist. Die Bedingung für $a_2 = -1$ ist $h = h'$, für $a_1 = a_2 = -1$

$$h = h'$$
$$g = g'$$

Während der Bewegung liegen die Werte von a zwischen a_2 und a_3, und es sind folgende Fälle zu unterscheiden:

I) $a_2 > -1$.

I_a) Während der Bewegung ist stets $(h+h'a)^2 > 0$ (die Projection der Bahncurve auf die $\beta\gamma$ Ebene hat keinen Wendepunkt s. § 3. 5)), also ist $\frac{h}{h'} > -a_2$.

Hierin und ebenso im folgenden ist entweder

A) $g-h^2 > 0$, dann wird $a_3 > 0$, und die Projection der Bahncurve hat eine Spitze für $a = 0$; oder

B) $g-h^2 \overline{\leq} 0$, dann ist $a_3 \overline{\leq} 0$, und die Projection der Bahncurve hat keine Spitze. Ein specieller Fall davon ist $a_2 = a_3$.

I_b) $(h+h'a)^2$ verschwindet für einen Wert von a zwischen a_2 und a_3. (Die Projectionscurve hat einen Wendepunkt.)

$$a_2 < -\frac{h}{h'} < a_3.$$

II) $a_2 = -1$, also $h = h'$.

Ein specieller Fall davon ist II^a) $g = g'$, dann ist $a = -1$ eine Doppelwurzel von $R = 0$. Im allgemeinen ist $g > g'$.

I) $a_2 > -1$.

Weil $a_2 < 0$ angenommen war, setze ich $a_2 = -a_0$, dann wird für $t = 0$, $\vartheta = 0$, $\chi = \pi$

$$a = -a_0, \qquad b = -\sqrt{1-a_0^2}$$
$$a' = +\sqrt{1-a_0^2}, \qquad b' = -a_0$$

Ich will zunächst den speciellen Fall $p = 0$, $q_0 = 0$ durchführen. Dann wird

$$h = 0, \qquad h' = 0$$

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{h+h'a}{1-a^2} = 0 & \vartheta = 0 \\ \frac{d\chi}{dt} = p + \frac{h+h'a}{1-a^2}a = 0 & \chi = \pi \end{array}\right\} \text{constant.}$$

Die Rotationsaxe bleibt in der $\alpha\beta$ Ebene, und die Drehungsgeschwindigkeit um dieselbe ist $p = 0$, es ist dies also der von

Thomson und Tait (Treatise on natural philosophy) und Kirchhoff (Borchardts Journal Bd. 71. S. 256—260) behandelte Fall.

$$\frac{da}{dt} = \sqrt{(1-a^2)(g-g'a^2)}$$

a liegt zwischen $-a_0 = a_2 = -\sqrt{\frac{g}{g'}}$ und $a_3 = +\sqrt{\frac{g}{g'}}$

$$g = g'a_0^2$$

$$g' = \frac{B_1 - A_1}{B_1 A_1}\frac{l^2}{B}$$

$$l = \frac{A_1 u_0}{a_0}$$

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{A_1 - B_1}{A_1 B_1}\frac{l^2}{B}ab = g'a\sqrt{1-a^2}$$

$$r = \sqrt{g - g'a^2}$$

$$\beta = -\frac{B}{l}r = -\frac{B}{l}\sqrt{g-g'a^2}$$

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{B_1 - A_1}{B_1 A_1} la\sqrt{1-a^2}$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{l}{B_1}\left(1 + \frac{B_1 - A_1}{A_1}a^2\right)$$

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{B_1 - A_1}{A_1}\frac{a\sqrt{1-a^2}}{1 + \frac{B_1 - A_1}{A_1}a^2}$$

$$\frac{d^2\beta}{d\alpha^2} = \frac{B_1}{A_1}\frac{B_1 - A_1}{l}\frac{\sqrt{g-g'a^2}}{\left(1 + \frac{B_1 - A_1}{A_1}a^2\right)^3}\left(1 - \frac{A_1 + B_1}{A_1}a^2\right)$$

Wenn $a_0^2 < \frac{A_1}{A_1 + B_1}$, dann verschwindet $\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}$ nur für $\sqrt{g-g'a^2} = 0$ d. h. für $a = a_2$ und $a = a_3$. Die Curve, welche die Bahn des Coordinatenanfangspunktes von xy in der $\alpha\beta$ Ebene darstellt, hat nur an diesen Stellen einen Wendepunkt. Die Bewegung geht dann in der Taf. III. Fig. 1. dargestellten Weise vor sich.

Wenn $a_0^2 > \frac{A_1}{A_1 + B_1}$, dann hat die Curve noch einen zweiten Wendepunkt zwischen $a = a_2$ und $a = 0$. (Dies folgt auch aus der

früher gemachten Bemerkung, dass für $a^2 = \frac{A_1}{A_1 + B_1}$ die grösste Abweichung der Richtungen von V und α stattfindet.) Die Bewegung ist Taf. III. Fig. 2. dargestellt.

Hieraus folgt, wenn der Körper bei einer beliebigen Lage in der Flüssigkeit eine Geschwindigkeit erhält, so beginnt er gleichzeitig sich zu drehen und zwar so, dass er sich bestrebt, die Rotationsaxe senkrecht zur Richtung der Bewegung zu stellen.

Ist zur Zeit $t = 0$ ausser der Geschwindigkeit V noch eine Drehungsgeschwindigkeit um die Rotationsaxe p vorhanden, so wird

$$h' = \frac{Ap}{B} \qquad g = g' a_0^2$$

$$h = -\frac{\lambda}{B} = \frac{Apa_0}{B} \qquad g' = \frac{B_1 - A_1}{B_1 A_1} \frac{l^2}{B}$$

$$\frac{da}{dt} = \sqrt{(1-a^2)(g-g'a^2)-(h+h'a)^2} = \sqrt{g'(1-a^2)(a_0^2-a^2)-h'^2(a_0^2+a^2)}$$

a wächst von $a_2 = -a_0$ bis a_3, doch ist $a_3 < a_0$,

$\frac{d\theta}{dt} = \frac{h+h'a}{1-a^2} = \frac{Ap(a_0+a)}{B(1-a^2)}$ kann nicht negativ werden, folglich ist $\theta > 0$.

Die Rotationsaxe bleibt jetzt nicht mehr in der $\alpha\beta$ Ebene, die Projection der Bahn auf die $\beta\gamma$ Ebene ist also nicht mehr wie im vorigen Falle eine gerade Linie, sondern eine Curve, deren Gestalt später angegeben ist. Abgesehen von dieser Abweichung geht die Bewegung in der $\alpha\beta$ Ebene in derselben Weise vor sich wie vorhin, nur hat die Rotationsaxe, weil jetzt der Körper um sie rotirt, das Bestreben, einer Aenderung ihrer Lage Widerstand entgegen zu setzen; a_3 erreicht also nicht mehr den Wert a_0, sondern ist kleiner als a_0.

Ist dagegen zur Zeit $t = 0$ $p = 0$ und $q \gtrless 0$, so wird

$$h' = 0$$

$$h = q\sqrt{1-a_0^2}$$

$$\frac{da}{dt} = \sqrt{(1-a^2)(g-g'a^2)-h^2}$$

$$a_3 = -a_2 = a_0$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{1-a^2} = \frac{q\sqrt{1-a_0^2}}{1-a^2}$$

ϑ wächst, wenn $q > 0$, es nimmt ab, wenn $q < 0$. Es wirken also $p > 0$ und $q > 0$ in demselben Sinne auf ϑ ein, indem beide zur Vergrösserung von ϑ beitragen, dagegen wirken $p > 0$ und $q < 0$ in entgegengesetztem Sinne.

Die beiden Fälle

$$p > 0 \qquad q > 0$$

und

$$p > 0 \qquad q < 0$$

auf die man sich nach § 1 bei Betrachtung des Anfangszustandes beschränken kann, sind identisch mit den beiden, auf welche man bei der Discussion der Gleichung $R = 0$ geführt wird:

I_a) $(h + h'a)^2$ bleibt während der Bewegung grösser als 0,

I_b) $(h + h'a)^2$ verschwindet während der Bewegung.

Denn wenn $p > 0$, $q_0 > 0$, so wird

$$h' = \frac{Ap}{B}$$

$$h = -\frac{1}{B}(Apa + B(qb + rc))$$

$$= \frac{Ap}{B} a_0 + q_0 \sqrt{1 - a_0^2}$$

$$h + h'a = \frac{Ap}{B}(a_0 + a) + q_0 \sqrt{1 - a_0^2}$$

a erreicht für $t = 0$ seinen kleinsten Wert $-a_0$, der obige Ausdruck ist also stets positiv.

Wenn $p > 0$, $q_0 < 0$

$$h = \frac{Ap}{B} a_0 - q_0 \sqrt{1 - a_0^2} > 0$$

$$h + h'a = \frac{Ap}{B}(a_0 + a) - q_0 \sqrt{1 - a_0^2} \text{ ist } < 0 \text{ für } a = -a_0$$
$$\text{und } > 0 \text{ für } a = 0$$

also ist für $a_3 \overline{\underline{>}}\, 0$ die Behauptung erwiesen. Dieselbe muss aber auch für $a_3 < 0$ gültig sein, denn für $a = a_2$ und $a = a_3$ wird $R = 0$, also $(h + h'a)^2 = (1 - a^2)(g - g'a^2)$. Die rechte Seite wächst von $a = a_2$ bis $a = 0$, die linke nimmt ab, so lange $h + h'a$ negativ bleibt, damit für $a = a_3$ die obige Gleichung wieder erfüllt sein kann, muss $h + h'a_3 > 0$ werden, $h + h'a$ also für einen zwischen a_2 und a_3 gelegenen Wert von a verschwinden.

Es genügt jetzt, für den allgemeinen Fall nur die Projection der Bahn auf die $\beta\gamma$ Ebene zu bestimmen, aus dem vorigen erhält man dann in Verbindung mit dem am Schlusse von § 3 Gesagten die vollständige Bewegung des Körpers. Für $t=0$ war nach § 1

$$\frac{da}{dt}=0 \quad a=-a_0 \quad b=-\sqrt{1-a_0^2} \quad c=0 \quad u=-u_0$$

$$a'=\sqrt{1-a_0^2} \quad b'=-a_0 \quad c'=0 \quad l=A_1\frac{u_0}{a_0}$$

$$a''=0 \quad b''=0 \quad c''=1 \quad v=\frac{lb}{B_1}$$

$$=-\frac{A_1}{B_1}\frac{\sqrt{1-a_0^2}}{a_0}u_0$$

$$r=0 \quad \alpha=0 \quad w_0=0$$

$$-l\beta=Apa''+B(qb''+rc'')$$

$$\beta_0=0$$

$$g'=\frac{B_1-A_1}{B_1A_1}\frac{l^2}{B}=\frac{B_1-A_1}{B_1}\frac{A_1}{B}\frac{u_0^2}{a_0^2}$$

$$g-g'a^2=q^2+r^2$$

$$g=q_0^2+g'a_0^2=q_0^2+\frac{B_1-A_1}{B_1}\frac{A_1}{B}u_0^2$$

I$_a$) $p>0, \quad q=+q_0$

$$h'=\frac{Ap}{B}$$

$$h=-\frac{\lambda}{B}=-\frac{1}{B}(Apa+B(qb+rc))$$

$$=\frac{Apa_0}{B}+q_0\sqrt{1-a_0^2}$$

$$l\gamma=Ap\sqrt{1-a_0^2}-Bq_0a_0$$

Man erhält 3 Gattungen von Curven, je nachdem

1) $\gamma=+\gamma_0$
2) $\gamma=0$
3) $\gamma=-\gamma_0$

Davon zerfällt noch jede in 2 Abteilungen

A) $a_3>0$ d. h. $g-h^2>0$

B) $a_3 \overline{\overline{<}} 0$ d. h. $g-h^2 \overline{\overline{<}} 0$

$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{h + h'a}{1 - a^2}$ erreicht für $a = -a_0$ den kleinsten Wert

$$= \frac{q_0 \sqrt{1 - a_0^2}}{1 - a_0^2}$$

Dieser ist grösser als 0, folglich wächst ϑ während der ganzen Bewegung, und weil $\vartheta_0 = 0$, so ist $\Theta > 0$.

In den Fällen A 1), A 2), A 3) ist $g - h^2 > 0$, es kann also h und h' d. h. p und q beliebig klein angenommen werden, folglich kann auch Θ sich der 0 nähern. In den Fällen B 1), B 2), B 3) ist dies im allgemeinen nicht möglich, und die späteren Betrachtungen werden zeigen, dass in B 2) und B 3) $\Theta > \frac{\pi}{2}$ sein muss.

In allen Fällen kann aber Θ beliebig gross werden, denn die Bedingung für $\Theta = \infty$ ist $a_1 = a_2 = -1$ d. h.

$$g = g' \qquad q_0^2 + g'a_0^2 = g'$$

$$h = h' \qquad \frac{Apa_0}{B} + q_0\sqrt{1 - a_0^2} = \frac{Ap}{B}$$

$$4g > h^2 \text{ (s. II}^{\alpha}\text{)} \qquad 4(q_0^2 + g'a_0^2) > \frac{A^2p^2}{B^2}$$

Diese Gleichungen können bis zu beliebiger Genauigkeit dadurch erfüllt werden, dass man q_0 sehr klein im Verhältniss zu u_0 und p und a_0 nahezu $= 1$ macht.

$$\frac{d\beta}{dt} = l \cdot \frac{B_1 - A_1}{B_1 A_1} a\sqrt{1 - a^2} \cos\vartheta$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = l \cdot \frac{B_1 - A_1}{B_1 A_1} a\sqrt{1 - a^2} \sin\vartheta$$

$$\left(\frac{d\beta}{dt}\right)_0 = -u_0 \frac{B_1 - A_1}{B_1} \sqrt{1 - a_0^2}$$

$$\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)_0 = 0$$

$$\frac{d^2\gamma}{d\beta^2} = \frac{B_1 A_1}{(B_1 - A_1)l} \frac{Apa - \lambda}{B a a'^3}$$

$$\left(\frac{d^2\gamma}{d\beta^2}\right)_0 = -\frac{q_0}{u_0} \frac{B_1}{B_1 - A_1} \frac{1}{1 - a_0^2}$$

Hieraus folgt, dass für $t = 0$ γ ein Maximum erreicht, und dass beim Beginn der Bewegung β und γ abnehmen.

$$l^2(\beta^2+\gamma^2) = A^2p^2 - \lambda^2 + B^2(q^2+r^2)$$
$$\beta^2+\gamma^2 = \varrho^2$$
$$q^2+r^2 = g - g'a^2$$
$$\frac{l^2}{B^2}\varrho^2 = h'^2 - h^2 + g - g'a^2$$

In den 3 Fällen A) hat der Radiusvector ϱ für $t=0$ sein Minimum ϱ_2 (weil $\beta_0 = 0$ ist, so ist $\varrho_2 = \gamma_0$), wächst dann bis zum Maximum ϱ_m für $a=0$, und erreicht für $a=a_3$ ein zweites Minimum ϱ_3. Weil jedoch dem absoluten Werte nach $a_2 \geqq a_3$, so ist $\varrho_2 \leqq \varrho_3$. In den Fällen B) liegt die Curve zwischen 2 Kreisen mit den Radien ϱ_2 und ϱ_3. Aus § 3. 3) und 4) folgt, dass die Kreise mit den Radien ϱ_2 und ϱ_3 von der Curve berührt werden, während für $\varrho = \varrho_m$ die Curve eine Spitze hat, welche senkrecht auf dem Kreise steht, wenn $p=0$ ist. Dies kann nur im Falle A 3) eintreten.

Die Bedingung dafür, dass der Radiusvector die Curve berührt, war:

$$Ap - \lambda a = 0 = Ap + (Apa_0 + Bq_0\sqrt{1-a_0^2})a$$

Dieser Ausdruck wird am kleinsten für $a = -a_0$

$$Ap(1-a_0^2) - Bq_0\sqrt{1-a_0^2} = \sqrt{1-a_0^2}\,.\,l\gamma$$

Eine Berührung findet also nur statt im Falle A 3) (und zwar noch bevor $a=0$ wird) und B 3).

$Ap - \lambda a$ verschwindet zwar auch im Falle A 2) und B 2) für $t=0$, doch verschwindet dann auch gleichzeitig der Radiusvector.

Die hauptsächlichsten Gestalten der Curven sind auf Taf. IV. gezeichnet und zwar

I.)

A. $g-h^2>0$		B. $g-h^2<0$	
1) $\gamma_0>0$	Fig. 1—4.	1) $\gamma_0>0$	Fig. 12—14.
2) $\gamma_0=0$	- 5—6.	2) $\gamma_0=0$	- 15.
3) $\gamma_0<0$	- 7—11.	3) $\gamma_0<0$	- 16—17.

Hier und im folgenden entspricht Punkt P $t=0$, Punkt Q $t=T$.

Wenn Θ und π in einem rationalen Verhältniss stehen, so werden die Curven geschlossen, z. B. erhält man in A 3) für $\Theta=\pi$ die Curve Taf. IV. 10.

Fällt in A) die Richtung der Spitze zusammen mit der Richtung des Kreises ϱ_m, so zeigt die Gleichung

$$\frac{l}{B}\varrho\cos(\vartheta-\varphi)=-\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}\cdot\frac{da}{dt}$$

dass dann $\frac{da}{dt}=0$ wird. Es ist also $a=0=a_3$. Man erhält dadurch den Uebergang zu den Curven B).

Der specielle Fall $a_2=a_3$, den Kirchhoff behandelt hat (Borchardts Journal Bd. 71. S. 261—62), kann nur bei B 1) eintreten, denn die Bedingung dafür ist, dass für $t=0$

$$\frac{da}{dt}=\sqrt{R}=0 \text{ und } \frac{dR}{da}=0 \text{ sei.}$$

$$R=(1-a^2)(g-g'a^2)-(h+h'a)^2=0$$

$$\frac{dR}{da}=-a(g+g'-2g'a^2)-h'(h+h'a)=0$$

$$=a_0(q_0^2+(1-a_0^2)g')-\frac{Ap}{B}q_0\sqrt{1-a_0^2}$$

$$=a_0(1-a_0^2)g'-q_0\frac{l}{B}\gamma=0$$

Dies kann nur durch $\gamma>0$ erfüllt werden. Jeder Punkt der Rotationsaxe beschreibt dann mit constanter Geschwindigkeit eine Schraubenlinie, die Projectionscurve in der $\beta\gamma$ Ebene wird also ein Kreis.

I_b) $h+h'a$ verschwindet für einen Wert von a, der zwischen a_2 und a_3 liegt. Dies bedeutet, dass für $t=0$ $q=-q_0$ genommen wird, während die übrigen Variabeln dieselben Werte wie in I_a) behalten. Es ändern sich

$$h=\frac{Ap}{B}a_0-q_0\sqrt{1-a_0^2}>0$$

$$l\gamma=Ap\sqrt{1-a_0^2}+Bq_0a_0>0$$

Es bleiben also jetzt nur die beiden Fälle zu unterscheiden:

A) $a_3>0$ B) $a_3 \leqq 0$

$\frac{d\vartheta}{dt}=\frac{h+h'a}{1-a^2}$ hat seinen kleinsten Wert für $a=-a_0$

$$\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)_0=-\frac{q_0\sqrt{1-a_0^2}}{1-a_0^2}$$

folglich nimmt ϑ beim Beginn der Bewegung ab, muss jedoch später wieder wachsen, weil $h+h'a$ positiv wird.

$$\Theta = \int_{a_2}^{a_3} \frac{h+h'a}{1-a^2} \frac{da}{\sqrt{R}}$$

enthält also positive und negative Bestandteile und es entsteht die Frage, ob Θ auch negative Werte annehmen kann. Aus dem in § 2 abgeleiteten Werte

$$\Theta = \frac{h}{2} T + \frac{\pi}{2K'}(e-s) + K.Z(e-s,\ k')$$

lässt sich nichts schliessen, weil $s > e$ werden kann, (es ist $\omega = -1$ zu setzen, weil $h = h'a_0 - q_0\sqrt{1-a_0^2}$, $h - h' < 0$ ist). Es ist jedoch am Anfange dieses Paragraphen gezeigt, dass von den Anfangswerten p zur Vergrösserung, $-q_0$ zur Verkleinerung von ϑ beiträgt. Θ wird also den kleinsten Wert erhalten, wenn man für p den kleinsten Wert nimmt, der mit der Bedingung, dass h nicht negativ sein soll, verträglich ist. Dieser Wert

$$p = \frac{Bq_0\sqrt{1-a_0^2}}{A.a_0}$$

folgt aus $h = 0$. Dann wird aber

$$-a_2 = a_3$$
$$e = s, \text{ folglich } \Theta = 0.$$

Dies hätte man auch unmittelbar aus $\frac{d\vartheta}{dt}$ schliessen können, denn für $h = 0$ wird

$$d\vartheta = \frac{h'a}{1-a^2} \frac{da}{\sqrt{(1-a^2)(g-g'a^2) - h'^2a^2}}$$

ϑ nimmt von $a = a_2$ bis $a = 0$ in derselben Weise ab, wie es von $a = 0$ bis $a = a_3$ zunimmt.

Θ kann also nur positive Werte annehmen, und diese können beliebig gross werden, denn auch hier kann man sich der Bedingung $g = g'$, $h = h'$ ebenso wie in $\mathrm{I_a}$) beliebig nähern.

Aus den Gleichungen

$$\left(\frac{d\beta}{dt}\right)_0 = -u_0 \frac{B_1 - A_1}{B_1} \sqrt{1-a_0^2}$$

$$\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)_0 = 0$$

$$\left(\frac{d^2\gamma}{d\beta^2}\right)_0 = +\frac{q_0}{u_0}\frac{B_1}{B_1-A_1}\frac{1}{1-a_0^2}$$

folgt, dass für $t=0$ γ ein Minimum erreicht hat, und dass β abnimmt.

Der Radiusvector ändert sich ebenso wie in I_a A) resp. I_a B), doch kann er nie die Curve berühren, denn die Bedingung dafür $Ap-\lambda a = h'+ha = 0$ ist unerfüllbar, weil $h'+ha$ den kleinsten Wert für $a=-a_0$ erreicht und dieser ist $=h'(1-a_0^2)+q_0a_0\sqrt{1-a_0^2} > 0$. Für $h+h'a=0$ haben die Curven einen Wendepunkt. s. Taf. IV.

I_b)

A. $a_3 > 0$	B. $a_3 < 0$
Fig. 18—22.	Fig. 23—24.

In dem speciellen Fall $h=0$ fällt der Wendepunkt mit der Spitze zusammen, es wird dann $-a_2 = a_3$, $\Theta = 0$ und die Curve muss in sich zurücklaufen, weil β und γ nur Functionen von a^2 und ϑ sind, s. Taf. IV. 22.

II) $a_2 = -1$ und es falle keine andere Wurzel von $R=0$ mit a_2 zusammen, also

$$g > g'$$
$$q_0 > 0$$

Ich will zunächst den von Kirchhoff behandelten Fall $h=h'=0$ vorausschicken, weil er darüber Aufschluss giebt, in welcher Weise sich der Körper in der α Richtung bewegt.

Es wird β constant $=0$

$$\gamma = -\sqrt{g-g'a^2}$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = l.\frac{B_1-A_1}{B_1A_1}a\sqrt{1-a^2}$$

$$\frac{d^2\gamma}{da^2} = \frac{B_1}{A_1}\frac{B_1-A_1}{l}\frac{\sqrt{g-g'a^2}}{\left(1+\frac{B_1-A_1}{A_1}a^2\right)^3}\left(1-\frac{A_1+B_1}{A_1}a^2\right)$$

$$\frac{da}{dt} = \sqrt{(1-a^2)(g-g'a^2)} \qquad \text{(s. Taf. III. 3.)}$$

Im allgemeinen Falle $h=h'>0$ wird für $t=0$

$$\begin{array}{llll} a=-1 & b=0 & c=0 & u=-u_0 \\ a'=0 & b'=-1 & c'=0 & l=A_1u_0 \\ a''=0 & b''=0 & c''=1 & v=0 \\ & & & w=0 \end{array}$$

$$\vartheta=\frac{\pi}{2} \qquad \chi=\frac{\pi}{2} \qquad p=+p$$

$$g'=\frac{B_1-A_1}{B_1}\frac{A_1}{B}u_0^2 \qquad q=+q_0 \qquad r=0$$

$$g=q_0^2+g' \qquad h=h'=\frac{Ap}{B}$$

$$\alpha=0$$

$$l\gamma=-Bq_0$$

$$l\beta=0$$

$$\frac{d\vartheta}{dt}=\frac{h(1+a)}{1-a^2}=\frac{h}{1-a}$$

ϑ kann nur positive Werte annehmen. Wenn h d. h. p sehr klein ist, so wird a_3 nahe an $+1$ liegen, es wird also ϑ anfangs sehr klein bleiben und nur in der Nähe von a_3 stark wachsen. Durch Verkleinerung von q_0 nähert g sich g', es kann also Θ beliebig gross werden.

Im Falle A) $a_3>0$ wächst der Radiusvector von ϱ_0 bis ϱ_m (für $a=0$) und nimmt dann bis ϱ_3 (für $a=a_3$) ab, es bleibt jedoch $\varrho_3>\varrho_0$. Im Falle B) $a_3 \overline{\overline{<}} 0$ wächst ϱ_0 bis ϱ_3. Die Curven in der $\beta\gamma$ Ebene berühren den Kreis mit dem Radius ϱ_3, und haben Spitzen, wenn $\varrho=\varrho_m$ oder $=\varrho_0$ ist; die letztere steht senkrecht auf dem Kreise ϱ_0. s. Taf. IV.

II) A. $a_3>0$ B. $a_3<0$
Fig. 25—27. Fig. 28.

II$^\alpha$) $a_2=-1$ ist eine Doppelwurzel von $R=0$, also

$$g=g'$$
$$h=h'$$

Die einzelnen Fälle dieser Gattung bilden den Uebergang zwischen den Bewegungsvorgängen, welche in I) und II) dargestellt wurden.

Wenn $h=h'=0$, so ist für $t=0$ nur eine Geschwindigkeit in der Richtung der Rotationsaxe $-u_0$ vorhanden. Der Körper bewegt sich dann gleichmässig ohne Drehung in dieser Richtung vorwärts, denn die Gleichung

$$\frac{da}{dt} = \sqrt{g}(1-a^2)$$

$$\sqrt{g}t = \int_{-1}^{a} \frac{da}{1-a^2}$$

zeigt, dass eine unendlich grosse Zeit verfliesst, bis a einen andern Wert als -1 annimmt. Denkt man sich jedoch die Rotationsaxe ein wenig aus der ursprünglichen Lage gebracht und gleichzeitig dem Körper eine Drehung um die y-Axe erteilt, so dass $g = g'$ bleibt, dann beginnt er die Taf. III. 4. dargestellte Bewegung, die Rotationsaxe stellt sich senkrecht zu α und wird erst für $t = \infty$ wieder parallel α.

Ist $h = h' > 0$, so besitzt der Körper für $t = 0$ ausser der Geschwindigkeit $-u_0$ noch eine Drehungsgeschwindigkeit p um die Rotationsaxe. Auch jetzt verhält sich um die x-Axe herum alles symmetrisch, es ist also kein Grund dafür vorhanden, dass dieselbe ihre Lage im Raum ändern sollte. Es giebt jedoch hierbei 2 verschiedene Fälle, denn aus der Gleichung

$$R = 0 = (1-a^2)(g-g'a^2)-(h+h'a)^2$$

folgt

$$(1+a)^2\{(1-a)^2g-h^2\} = 0$$

Dies wird erfüllt durch

$$a = \begin{cases} -1 \\ -1 \\ 1+\sqrt{\frac{h^2}{g}} \\ 1-\sqrt{\frac{h^2}{g}} \end{cases}$$

Ist nun 1) $h^2 > 4g$ d. h.

$$\frac{A^2p^2}{B} > \frac{4A_1}{B_1}(B_1-A_1)u_0^2$$

so kann wegen

$$\frac{da}{dt} = (1+a)\sqrt{(1-a)^2g-h^2}$$

a nur den Wert -1 annehmen. Die Rotationsaxe behält also bei hinreichend grosser Rotationsgeschwindigkeit ihre Lage im Raum bei, auch wenn sie etwas aus ihrer ursprünglichen Lage gebracht sein sollte, die Bewegung ist stabil.

Ist dagegen 2) $h^2 < 4g$

$$p^2 < \frac{4A_1B}{A^2B_1}(B_1 - A_1)u_0^2$$

so wird der Körper, sobald a einen von -1 nur wenig verschiedenen Wert erhält, sich spiralförmig von der α-Axe entfernen und sich dabei gleichzeitig drehen, weil

$$\varrho^2 = \frac{B^2}{l^2}g(1-a^2)$$

$$= \frac{B(B_1 - A_1)}{A_1B_1}(1-a^2)$$

$$\Theta = \infty$$

Je nachdem nun $g - h^2 \gtrless 0$ ist, erhält man für die Projection der Bahn des Anfangspunktes von xyz auf die $\beta\gamma$ Ebene die Curven Taf. IV. Fig. 29 und 30.

§ 5.

$A_1 > B_1$.

Weil nach § 3 die Ebene, welche durch die Richtung der Geschwindigkeit V und die Rotationsaxe x gelegt werden kann, stets parallel α ist, so ist

$$\operatorname{tg}(V, x) = -\frac{\sqrt{v^2 + w^2}}{u}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha, x) = -\frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{a} = \frac{B_1}{A_1}\operatorname{tg}(V, x)$$

Die Richtung von α liegt also stets zwischen der von V und dem Teil der Rotationsaxe, welcher mit α einen spitzen Winkel bildet. V und α fallen zusammen, wenn $a = 0$ oder $a^2 = 1$ ist, und die Richtungen von V und x weichen am meisten von einander ab, wenn $a^2 = \frac{A_1}{A_1 + B_1}$ ist. (s. § 4.)

Die Werte, welche a annehmen kann, werden bestimmt durch die Gleichung:

$$\frac{da}{dt} = \sqrt{(1-a^2)\frac{1}{B}\left(2T - Ap^2 - \frac{l^2}{B_1} - \frac{B_1 - A_1}{B_1A_1}l^2a^2\right) - \left(\frac{\lambda - Apa}{B}\right)^2}$$

Setze ich

$$\frac{1}{B}\left(2T - Ap^2 - \frac{l^2}{B_1}\right) = g$$

$$\frac{A_1 - B_1}{A_1B_1}\frac{l^2}{B} = g'$$

so ist stets $g' > 0$, dagegen kann g negativ, 0 und positiv werden, denn es ist $q^2 + r^2 = g + g'a^2$

$$\text{für } t = 0 \text{ also } g = q_0^2 - g'a_0^2.$$

Ferner setze ich

$$-\frac{\lambda}{B} = h$$

$$\frac{Ap}{B} = h'$$

so kann ich mich ebenso wie in § 4 auf die Betrachtung von positiven h und h' beschränken.

Die Lage der Wurzeln von

$$R = (1 - a^2)(g + g'a^2) - (h + h'a)^2$$

findet man am leichtesten durch graphische Darstellung.

Wenn $h = h'$ und $g \leqq 0$, so hat R bei hinreichend kleinem h 4 reelle Wurzeln, und zwar ist

$$a_1 = -1 < a_2 < 0 < a_3 < a_4 < +1$$
$$-a_2 < a_3$$

Wächst h, so fallen zunächst a_3 und a_4 zusammen und werden dann conjugirt imaginär.

Wenn $h = h'$, $g > 0$, $g - g' < 0$ und h von 0 an wächst, so hat $R = 0$ zunächst

1) 2 reelle Wurzeln $a_1 = -1$ und $0 < a_4 < 1$,

dann 2) 4 reelle Wurzeln

$$\begin{array}{ll} a_1 = -1 & 0 < a_2 = a_3 < a_4 < 1 \\ a_1 = -1 & \quad < a_2 < a_3 < a_4 < 1 \\ a_1 = -1 & \quad < a_2 < a_3 = a_4 < 1 \end{array}$$

3) 2 reelle Wurzeln $a_1 = -1$ und $a_2 \lesseqgtr 0$.

Wenn $h = h'$, $g > 0$, $g - g' > 0$, dann treten nur die Fälle 1) und 3) auf. Der Fall 2) kann auch für $g - g' < 0$ wegfallen.

Wenn 4 reelle Wurzeln vorhanden sind, so kann unter der Voraussetzung, dass g, g', h, h' ungeändert bleiben, der Körper verschiedene Bewegungen ausführen, je nachdem a_1 oder a_3 als Anfangslage gewählt wird. Die Bewegungen im letzteren Falle sind jedoch nicht

wesentlich von den unter II_a) angeführten verschieden, sollen also von der Betrachtung ausgeschlossen bleiben. Man erhält also nur die Fälle

I) $h = h'$, $(a_1 = -1)$

A) $g - h^2 \leqq 0$

B) $g - h^2 > 0$

Wenn II) $h \gtrless h'$, so ist noch wie in § 4 zu unterscheiden

II_a) Während der Bewegung bleibt stets $(h + h'a)^2 > 0$, also $h > h'$ oder $1 > \sqrt{-\frac{g}{g'}} \geqq \frac{h}{h'}$

II_b) $(h + h'a)^2$ verschwindet für einen zwischen a_1 und a_2 gelegenen Wert von a.

Hierin kann wieder $g - h^2 \lesseqgtr 0$ sein.

Dem absoluten Werte nach ist $1 > a_1 > a > a_2$.

In dem von Kirchhoff behandelten Falle $h = h' = 0$ bleibt die Rotationsaxe in derselben Ebene und zwar wegen der Annahmen, dass für $t = 0$

$$a = -1 \qquad b' = -1 \qquad c'' = +1$$
$$u = -u_0$$
$$r = 0$$
$$q = +q_0$$

sein soll, in der $\alpha\gamma$ Ebene. Es wird dann

$$l = A_1 u_0 \qquad \vartheta = \frac{\pi}{2}$$

$$g' = \frac{A_1 - B_1}{B_1} \frac{A_1}{B} u_0^2 \qquad \chi = \frac{\pi}{2}$$

$$g = q_0^2 - g' \qquad \beta = 0$$

$$l\gamma = -Bq$$

$$q = \sqrt{g + g'a^2}$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\frac{A_1 - B_1}{B_1} u_0 a \sqrt{1 - a^2}$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{A_1}{B_1} u_0 - \frac{A_1 - B_1}{B_1} u_0 a^2$$

Die Werte, welche a annehmen kann, sind bestimmt durch die Gleichung

$$\frac{da}{dt} = \sqrt{(1-a^2)(g+g'a^2)}$$

Je nachdem also $g \lesseqgtr 0$ ist, erhält man folgende Arten der Bewegung:

1) $g < 0$ d. h. $q_0^2 < \frac{A_1 - B_1}{B_1} \frac{A_1}{B} u_0^2$

a liegt zwischen $a_1 = -1$ und $a_2 = -\sqrt{-\frac{g}{g'}}$

1_a) Wenn $q_0 = 0$, so wird $a_2 = -1$, der Körper bewegt sich ohne Drehung mit gleichförmiger Geschwindigkeit in der Richtung der Rotationsaxe. Die Bewegung ist stabil.

1_b) Wenn $1 > a_2^2 \geqq \frac{A_1}{A_1 + B_1}$, dann hat die Bahncurve einen Wendepunkt für $a = a_2$.

1_c) Wenn $a_2^2 < \frac{A_1}{A_1 + B_1}$, dann kommt noch ein zweiter Wendepunkt für $a^2 = \frac{A_1}{A_1 + B_1}$ hinzu, s. Taf. III. 5. Die Curven in diesem und in dem vorhergehenden Fall unterscheiden sich nicht wesentlich von Taf. III. 2 resp. 1.

Für $a = a_2$ ist $q = 0$, also wenn man dem Körper in beliebiger Anfangslage nur eine fortschreitende Bewegung erteilt, so entsteht dadurch auch eine Drehung, durch welche die Rotationsaxe in die Richtung von α gebracht wird. Daraus folgt in Verbindung mit dem in § 4 Gesagten, dass der Körper stets eine solche Lage einzunehmen sucht, in welcher er der fortschreitenden Bewegung den grössten Widerstand leistet.

2) $g = 0$, $a_2 = a_3 = 0$. Die Rotationsaxe steht nach unendlich langer Zeit senkrecht auf α.

3) $g > 0$. Der Körper dreht sich vollständig um die y-Axe, s. Taf. III. 6.

In ähnlicher Weise ändert sich die Lage der Rotationsaxe zur α-Axe in allen andern Fällen, nur bleibt die Rotationsaxe nicht mehr in derselben Ebene. Die Projection der Bahn auf die $\beta\gamma$ Ebene wird eine Curve, deren Gestalt noch zu bestimmen ist, die vollständige Bahn des Körpers erhält man aus § 3.

I) $h = h' > 0$. Dann ist für $t = 0$

$$\begin{array}{lll} a = -1 & b = 0 & c = 0 \\ a' = 0 & b' = -1 & c' = 0 \\ a'' = 0 & b'' = 0 & c'' = +1 \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} u = -u_0 & p = +p & q = +q_0 & r = 0 \\ v = 0 & h = h' = \dfrac{Ap}{B} & g = q_0^2 - g' & \\ w = 0 & & & \end{array}$$

$$l = A_1 u_0$$

$$g' = \frac{A_1 - B_1}{B_1} \frac{A_1}{B} u_0^2 \qquad \alpha = 0$$

$$\vartheta_0 = \frac{\pi}{2} \qquad \beta = 0$$

$$l\gamma = -Bq_0$$

$$\chi_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{h(1+a)}{1-a^2} = \frac{h}{1-a}$$

ϑ kann nur positive Werte annehmen. Es ist $\Theta = 0$ für $h = 0$, und Θ wächst mit h, so lange jedoch $g - h^2 < 0$ bleibt $\Theta < \frac{\pi}{2}$, wie die Betrachtung des Radiusvector I A) zeigt.

$$\frac{d\beta}{dt} = -\frac{A_1 - B_1}{B_1} u_0 . a\sqrt{1-a^2} \cos\vartheta$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\frac{A_1 - B_1}{B_1} u_0 . a\sqrt{1-a^2} \sin\vartheta$$

$$\frac{l^2}{B^2}(\beta^2 + \gamma^2) = \frac{l^2}{B^2}\varrho^2 = g + g'a^2$$

I A) $g - h^2 \leqq 0$, $a_2 < 0$

Der Radiusvector berührt die Curve für $t = 0$, nimmt dann ab, und wenn $a = a_2$, steht er senkrecht auf der Curve. s. Taf. V. Fig. 1—2.

I B) $g - h^2 > 0$, $a_2 > 0$

Die Curven haben noch Spitzen für $a = 0$, s. Taf. V. 3—4. Wenn $a_2 = a_3$, so wird

$$\Theta = \int_{-1}^{a_2} \frac{h}{1-a} \cdot \frac{da}{(a_2 - a)\sqrt{-g'(a-a_1)(a-a_4)}} = \infty \quad \text{s. Taf. V. 5.}$$

Wählt man a_2 als Anfangswert von a, so wird die Projectionscurve ein Kreis, und die Bewegung schraubenförmig.

II) $h \gtrless h'$, $a_1 > -1$

Für $t = 0$ wird

$$a = -a_0 \qquad b = -\sqrt{1-a_0^2} \qquad c = 0 \qquad u = -u_0$$

$$a' = +\sqrt{1-a_0^2} \qquad b' = -a_0 \qquad c' = 0 \qquad l = A_1 \frac{u_0}{a_0}$$

$$a'' = 0 \qquad b'' = 0 \qquad c'' = 1$$

$$\vartheta = 0 \qquad \chi = \pi \qquad v = -\frac{A_1}{B_1} \frac{\sqrt{1-a_0^2}}{a_0} u_0$$

$$p = +p \qquad q = q \qquad r = 0 \qquad w = 0$$

$$h' = \frac{Ap}{B} \qquad h = \frac{Apa_0}{B} + q\sqrt{1-a_0^2} \qquad g' = \frac{A_1 - B_1}{B_1} \frac{A_1}{B} \frac{u_0^2}{a_0^2}$$

$$g = q_0^2 - g'a_0^2$$

$$\alpha = 0$$

$$\beta = 0$$

$$l\gamma = Ap\sqrt{1-a_0^2} - Bqa_0$$

$$\frac{l^2}{B^2}\varrho^2 = h'^2 - h^2 + g + g'a^2$$

$$\frac{da}{dt} = \sqrt{R} = 0$$

$$\frac{d^2a}{dt^2} = \frac{d\sqrt{R}}{da} \cdot \frac{da}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dR}{da}$$

$$R = (1-a^2)(g+g'a^2) - (h+h'a)^2$$

$$\frac{dR}{da} = -2a(g-g'+2g'a^2) - 2(h+h'a)h'$$

$$\left(\frac{d^2a}{dt^2}\right)_{a=-a_0} = a_0(q_0^2 - g'(1-a_0^2)) - h'(h'a_0 + q\sqrt{1-a_0^2} - h'a_0)$$

$$= -a_0(1-a_0^2)g' - \frac{l}{B} q\gamma$$

Die Anfangswerte von p und q können nicht beliebig angenommen werden, sondern sie müssen nach § 1 die Bedingung $\left(\frac{d^2a}{dt^2}\right)_{a=-a_0} > 0$ erfüllen; dadurch ist z. B. ausgeschlossen, dass für $t = 0$ $p > 0$ und $q = 0$ ist, es wird dann

$$q^2 + r^2 = g + g'a^2 = 0 \qquad -a_2 = \sqrt{-\frac{g}{g'}} = \frac{h}{h'}$$

man erhält diesen Zustand also für $t = T$ in II_a A 2).

$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{h + h'a}{1 - a^2}$ erreicht den kleinsten Wert für $a = -a_0$, nämlich

$$\frac{q\sqrt{1 - a_0^2}}{1 - a_0^2}.$$

II$_a$) Ist nun $q > 0$, so kann $h + h'a$ nicht verschwinden, und ϑ nimmt stets zu.

II$_b$) Ist dagegen $q = -q_0$, so ist $h + h'a$ beim Beginn der Bewegung negativ, und die Betrachtung von $R = 0$ zeigt, dass für $g > 0$ $h + h'a$ für ein zwischen a_1 und a_2 gelegenes a verschwinden muss. Für $g < 0$ gilt dasselbe, eine Ausnahme davon machen nur die Fälle, in denen $-a_2 \overset{=}{>} \sqrt{-\frac{g}{g'}} \overset{=}{>} \frac{h}{h'}$ ist. Dieselben müssen zu II$_a$) gerechnet werden.

II$_a$) $(h + h'a)^2 > 0$

A) $g - h^2 \leq 0$

A 1) $q = +q_0$. Wegen $\left(\frac{d^2a}{dt^2}\right)_{a=-a_0} > 0$ muss $\gamma_0 < 0$ sein.

Die Curven berühren die Kreise mit den Radien ϱ_1 und ϱ_2. Je nach der Lage der Wurzeln von $R = 0$ kann der Radiusvector die Curve berühren oder nicht, die Curven unterscheiden sich nur durch den Anfangspunkt von den § 4. I$_a$ B 1) 2) 3) (Taf. IV. 12—17) angegebenen, weil $\gamma_0 < 0$, $\left(\frac{d\beta}{dt}\right)_0 > 0$ und $\varrho_1 > \varrho_2$.

A 2) $q = -q_0$ und $-a_2 \overset{=}{>} \sqrt{-\frac{g}{g'}} \overset{=}{>} \frac{h}{h'}$

Dann wird $\gamma_0 > 0$, $\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)_0 < 0$, ϑ nimmt ab. $h' + ha$ bleibt stets positiv, die Curven erhalten abgesehen vom Anfangspunkt die Gestalt § 4. I$_a$ B 1). Es kann jedoch auch für $g = h^2 = 0$, $a_2 = a_3 = 0$ $\Theta = -\infty$ werden. $\frac{l^2}{B^2}\varrho^2 = h'^2 + g'a^2$ wird $= h'^2$ für $t = \infty$, s. Taf. V. 6.

B) $g - h^2 > 0$, $q = +q_0$, $a_2 > 0$

Die Curven berühren die Kreise mit den Radien ϱ_1 und ϱ_2, und haben eine Spitze für $a = 0$. Der Radiusvector muss die Curven einmal zwischen $a = a_1$ und $a = 0$ berühren, s. Taf. V. 7—10. In 8. ist $-1 < a_1 < 0 < a_2 = a_3 < a_4$, also $T = \infty$, $\Theta = \infty$, in 10. ist $-a_1 = a_2$ also $p = 0$ angenommen.

II_b) $(h+h'a)^2$ verschwindet für ein zwischen a_1 und a_2 gelegenes a.

Beim Beginn der Bewegung ist $\gamma_0 > 0$, $\frac{d\beta}{dt} > 0$, $\frac{d\gamma}{dt} < 0$, ϑ nimmt ab, Θ kann negativ werden $\left(\text{z. B. wenn } \frac{h}{h'} \text{ nur wenig grösser ist als } \sqrt{-\frac{g}{g'}}\right)$, aber auch positiv unendlich für $a_2 = a_3 > 0$. Es sind also folgende Fälle möglich:

A) $g - h^2 \leqq 0$, s. Taf. V. 11. Die Curven haben also denselben Charakter wie in § 4. I_b B) (Taf. IV. 23—24).

B) $g - h^2 > 0$.

1) $\Theta < 0$, s. Taf. V. 12.

2) $\Theta > 0$, s. Taf. V. 13.

3) $\Theta = \infty$, $a_2 = a_3 > 0$, s. Taf. V. 14.

Fällt der Wendepunkt mit der Spitze zusammen, d. h. wird $h = 0$, so wird auch $\Theta = 0$, die Curve läuft in sich zurück und bildet den Uebergang von B 1) zu B 2), s. Taf. V. 15.

XII.

Die regelmässigen linear begrenzten Figuren jeder Anzahl von Dimensionen.

Von

R. Hoppe.

Eine linear begrenzte $n$dehnung (Figur von n Dimensionen) heisst regelmässig, wenn sie von lauter congruenten regelmässigen linear begrenzten $(n-1)$dehnungen eingeschlossen ist, wenn letztere zu einem gemeinsamen Punkte, dem Mittelpunkte congruente Lage haben und in gleicher Zahl in gleicher regelmässigen Gruppirung um jede Ecke liegen.

Eine Ecke wird gebildet durch den Schnitt von n $(n-1)$dehnungen; es können daher nicht weniger als n Grenz- $(n-1)$dehnungen um eine Ecke liegen.

Da von andern geschlossenen Figuren nicht die Rede sein wird als von regelmässigen linear begrenzten, so wollen wir hier diese beiden Attribute der Kürze wegen weglassen.

§. 1. Allgemeine Sätze über die Zahl und Gruppirung der Grenzfiguren.

Die Gruppirung kann man durch folgende Construction erhalten.

Man schneide die $n$dehnung D durch eine unbegrenzte lineare $(n-1)$dehnung normal zum Radius einer Ecke A, derselben nahe genug, dass keine andern Ecken mit ihr auf dieselbe Seite fallen. Dann ist die Schnittfigur diejenige regelmässige $(n-1)$dehnung, nach

welcher die Umgebung der Ecke gruppirt ist. Durch die $(n-1)$dehnige Grenzfigur, „Seite“ S, und die $(n-1)$dehnige Gruppirungsfigur, „Eckfigur“ G ist die $n$dehnung charakterisirt.

Ebenso ist nun die Seite und die Eckfigur jede durch zwei $(n-2)$dehnige Figuren, jede derselben wieder durch zwei $(n-3)$dehnige Figuren charakterisirt u. s. f. bis man zu den 3dehnigen Figuren, den Polyedern gelangt. Beim Vieleck hört die Verschiedenheit, also die doppelte Bestimmung auf: das Vieleck ist durch die blosse Eckenzahl, gleich Seitenzahl $= k_1$ charakterisirt, das Polyeder durch die Seite, also durch k_1, und durch die Eckfigur, mithin durch eine zweite Zahl k_2, das Polytop durch zwei Polyeder, als Seite und als Eckfigur, was 4 Zahlen ergeben würde, u. s. w. Diese Zahlen reduciren sich aber durch folgende Betrachtung.

Die $(n-1)$dehnung, welche durch ihren Schnitt mit der $n$dehnung dessen Eckfigur bildet, schneidet jede Kante von D in einer Ecke von G, jede Fläche von D in einer Kante von G, u. s. w., überhaupt jede $(\lambda+1)$dehnige Grenzfigur von D in einer λdehnigen Grenzfigur von G. Daher sind die an eine Ecke stossenden Grenzfiguren von D von den Grenzfiguren von G derart abhängig, dass sowol die Anzahl als auch das Angrenzen der erstern übereinstimmt mit der Anzahl und dem Angrenzen der letztern von 1 Dimension weniger.

Um diese Beobachtung in der Formel zu fixiren, bezeichne (n, μ, ν) die Anzahl derjenigen νdehnigen Grenzfiguren einer $n$dehnung, welche an jede μdehnige Grenzfigur stossen. Hier sind μ und ν stets ungleich und nicht $>n$; die Fälle $\mu = \nu$ und $\nu = n$ würden $(n, \mu, \nu) = 1$ ergeben und kommen nicht in Betracht; dagegen ist der Fall $\mu = n$ besonders wichtig.

Ferner bezeichne der Index 1, dass sich die Zahl $(n-1, \mu, \nu)_1$ auf die Eckfigur der $n$dehnung bezieht, während bezüglich auf die Seite kein Index stehe.

Zunächst ist gleich, weil dem Sinne nach identisch:

$$(n, \mu, \nu) = (n-1, \mu, \nu) \text{ für } n > \mu > \nu \geqq 0 \tag{1}$$

Gemäss der obigen Beobachtung ist nun weiter:

$$(n, \mu, \nu) = (n-1, \mu-1, \nu-1)_1 \text{ für } n > \nu > \mu > 0 \tag{2}$$

zu ergänzen durch die Formel:

$$(n, 0, \nu) = (n-1, n-1, \nu-1)_1 \text{ für } n > \nu > 0 \tag{3}$$

Kennt man also die Anzahlen aller Grenzfiguren der 2 bestimmenden $(n-1)$dehnungen, so ergeben sich unmittelbar dieselben für die n-dehnung, mit Ausnahme der Zahlen (n, n, ν).

Unter letzteren müssen sich je zwei, nämlich die Gesammtzahlen der ν- und ν'dehnungen in der ganzen $n$dehnung verhalten wie die Anzahl der an die νdehnung stossenden ν'dehnungen zu der Anzahl der an ν'dehnung stossenden νdehnungen; es muss also sein:

$$(n, n, \nu):(n, n, \mu) = (n, \mu, \nu):(n, \nu, \mu) \tag{4}$$

Das Verhältniss zur Rechten ist aus den Gl. (1) (2) (3) bekannt; dadurch sind die (n, n, ν) auf eine Unbekannte zurückgeführt, die für ungerade n durch den erweiterten Euler'schen Satz (LXVII. 30. 31) bestimmt wird, für gerade n einzeln ermittelt werden muss.

Ferner kann man aus der obigen Betrachtung den Satz herleiten:

Jede $n$dehnung ist charakterisirt durch $n-1$ Zahlen, $k_1, k_2 \ldots k_{n-1}$, ihre Seite durch $k_1, k_2 \ldots k_{n-2}$, ihre Eckfigur durch $k_2, k_3, \ldots k_{n-1}$.

Die Bedeutung dieser Zahlen geht durch successives Aufsteigen in der Dimensionszahl leicht hervor. Für $n = 3$ ist k_1 die Kanten- oder Eckenzahl der Seite, k_2 der Eckfigur, hiernach die Bedeutung von k_1, k_2 für ein Polyeder bekannt. Dieses als Seite, das Polyeder (k_2, k_3) als Eckfigur gedacht, charakterisirt sich die 4dehnung durch k_1, k_2, k_3. Diese wieder als Seite, eine andre k_2, k_3, k_4 als Eckfigur charakterisirt die 5dehnung (k_1, k_2, k_3, k_4), u. s. f. Dass aber in der Eckfigur immer dieselben Zahlen mit Beziehung auf die Grenzfigur von 1 Dimension weniger auftreten müssen, ist oben durch die Betrachtung des Schnittes, welcher die Eckfigur ergiebt, dargetan.

Ferner ist noch folgender Satz zu beweisen.

Je zwei $n$dehnungen $(k_1, k_2 \ldots k_{n-1})$ und $(k_{n-1}, k_{n-2} \ldots k_1)$ sind einander reciprok, in dem Sinne dass jeder $m$dehnigen Grenzfigur der einen eine $(n-m-1)$dehnige Grenzfigur der andern, und jedem zusammengrenzenden System der erstern ein zusammengrenzendes Stystem der letztern entspricht.

Bezeichnet man mit runden und eckigen Klammern die Zugehörigkeit zur einen und zur andern der reciproken $n$dehnungen, so ist die Reciprocität definirt durch die Gleichungen:

$$[n, \mu, \nu] = (n, n-\mu-1, n-\nu-1) \left\{ \begin{array}{l} n > \mu \overline{\overline{>}} 0 \\ n > \nu \overline{\overline{>}} 0 \end{array} \right. \tag{5}$$

$$(n, n, \nu] = (n, n, n-\nu-1) \quad (n > \nu \geqq 0) \tag{6}$$

Nimmt man an, dass diese Bedingungen für die $(n-1)$dehnungen allgemein erfüllt seien, so ist nach Gl. (1) für $n-1 > \mu > \nu \geqq 0$

$$[n, \mu, \nu] = [n-1, \mu, \nu] = (n-1, n-\mu-2, n-\nu-2)_1$$

das ist nach Gl. (2)

$$= (n, n-\mu-1, n-\nu-1)$$

Ferner ist nach Gl. (2) für $n > \nu > \mu > 0$

$$[n, \mu, \nu] = [n-1, \mu-1, \nu-1]_1 = (n-1, n-\mu-1, n-\nu-1)$$

das ist nach Gl. (1)

$$= (n, n-\mu-1, n-\nu-1)$$

Ferner ist nach Gl. (3) für $n > \nu > 0$

$$[n, 0, \nu] = [n-1, n-1, \nu-1]_1 = (n-1, n-1, n-\nu-1)$$

das ist nach Gl. (1)

$$= (n, n-1, n-\nu-1)$$

Hiermit ist Gl. (5), sofern sie für $n = 3$ zutrifft, für jedes n bewiesen. Ferner ist nach (4)

$$[n, n, \nu] : [n, n, \mu] = [n, \mu, \nu] : [n, \nu, \mu]$$

$$(n, n, n-\nu-1) : (n, n, n-\mu-1) = (n, n-\mu-1, n-\nu-1) : (n, n-\nu-1, n-\mu-1)$$

folglich, da die dritten und vierten Glieder, wie eben bewiesen, gleich sind,

$$[n, n, \nu] : [n, n, \mu] = (n, n, n-\nu-1) : (n, n, n-\mu-1)$$

Hiernach können sich die Seiten der Gl. (6) nur durch einen Factor gültig für alle ν unterscheiden. Da aber durch das Verhältniss der betreffenden Zahlen die $n$dehnung bestimmt ist, so kann dieser Factor nur $= 1$ sein. Somit stimmen alle Gleichungen, nach denen die $n$dehnungen hervorgehen, mit der Reciprocität überein.

§. 2. Bestimmung aller verschiedenen $n$dehnungen.

Obgleich die 3- und 4dehnungen bereits bekannt sind, wollen wir sie doch noch einmal herleiten um daran den allgemein aufgestellten Algorithmus zu verdeutlichen.

Aus der Tabelle der Zahlen der zu einander gehörigen Grenzfiguren für 2 Dimensionen

μ	$(2, \mu, 0)$	$(2, \mu, 1)$
0		2
1	2	
2	k_1	k_1

(7)

ergiebt sich für 3 Dimensionen:

	μ	$(3, \mu, 0)$	$(3, \mu, 1)$	$(3, \mu, 2)$	
	0		k_2	k_2	Gl. (3)
Gl. (1)	1	2		2	Gl. (2)
Gl. (1)	2	k_1	k_1		

(8)

$$\left.\begin{array}{l}(3, 3, 0):(3, 3, 1) = 2 : k_2 \\ (3, 3, 1):(3, 3, 2) = k_1 : 2 \\ (3, 3, 0):(3, 3, 2) = k_1 : k_2\end{array}\right\} \text{Gl. (4)}$$

woraus:

$$(3, 3, 0) = \frac{N}{k_2}; \quad (3, 3, 1) = \frac{N}{2}; \quad (3, 3, 2) = \frac{N}{k_1} \tag{9}$$

und nach dem Euler'schen Satze:

$$\frac{N}{k_2} - \frac{N}{2} + \frac{N}{k_1} = 2$$

also

$$N = \frac{2}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} - \frac{1}{2}} \tag{10}$$

Diese Grösse muss positiv und eine ganze Zahl sein, damit das Polyeder existirt. Die Bedingung wird bekanntlich erfüllt durch die Combinationen (3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 3), (5, 3), welche 2 Paare reciproke Polyeder und ein in sich reciprokes Polyeder ergeben.

Aus der Tabelle (8) ergänzt durch (9) erhält man für 4 Dimensionen:

	μ	$(4, \mu, 0)$	$(4, \mu, 1)$	$(4, \mu, 2)$	$(4, \mu, 3)$	
	0		$\frac{N_1}{k_3}$	$\frac{N_1}{2}$	$\frac{N_1}{k_2}$	Gl. (3)
Gl. (1)	1	2		k_3	k_3	Gl. (2)
Gl. (1)	2	k_1	k_1		2	Gl. (2)
Gl. (1)	3	$\frac{N}{k_2}$	$\frac{N}{2}$	$\frac{N}{k_1}$		

(11)

und nach Gl. (4):

$$(4,\ 4,\ 0):(4,\ 4,\ 1) = 2:\frac{N_1}{k_3}$$

$$(4,\ 4,\ 1):(4,\ 4,\ 2) = k_1:k_3$$

$$(4,\ 4,\ 2):(4,\ 4,\ 3) = \frac{N}{k_1}:2$$

$$(4,\ 4,\ 3):(4,\ 4,\ 0) = \frac{N_1}{k_2}:\frac{N}{k_2}$$

$$(4,\ 4,\ 0):(4,\ 4,\ 2) = k_1:\frac{N_1}{2}$$

$$(4,\ 4,\ 1):(4,\ 4,\ 3) = \frac{N}{2}:k_3$$

Alle 6 Proportionen geben identisch: (12)

$$(4,\ 4,\ 0) = \frac{M}{N_1};\quad (4,\ 4,\ 1) = \frac{M}{2k_3};\quad (4,\ 4,\ 2) = \frac{M}{2k_1};\quad (4,4,3) = \frac{M}{N}$$

Der erweiterte Euler'sche Satz

$$\frac{M}{N_1} - \frac{M}{2k_3} + \frac{M}{2k_1} - \frac{M}{N} = 0$$

ist durch die Werte von N, N_1 von selbst erfüllt, M aber bleibt unbekannt.

Die Werte von $M(k_1,\ k_2,\ k_3)$ sind (in LXVII. 38—42) für alle möglichen Combinationen durch Construction der Netz e gefunden Hiernach ist

$$\left.\begin{aligned} &M(3,\ 3,\ 3) = 60 \\ &M(4,\ 3,\ 3) = M(3,\ 3,\ 4) = 192 \\ &M(5,\ 3,\ 3) = M(3,\ 3,\ 5) = 7200 \\ &M(3,\ 4,\ 3) = 576 \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Jetzt erhält man für 5 Dimensionen: (14)

μ	$(5,\ \mu,\ 0)$	$(5,\ \mu,\ 1)$	$(5,\ \mu,\ 2)$	$(5,\ \mu,\ 3)$	$(5,\ \mu,\ 4)$
0		$\frac{M_1}{N_2}$	$\frac{M_1}{2k_4}$	$\frac{M_1}{2k_2}$	$\frac{M_1}{N_1}$
1	2		$\frac{N_2}{k_4}$	$\frac{N_2}{2}$	$\frac{N_2}{k_3}$
2	k_1	k_1		k_4	k_4
3	$\frac{N}{k_2}$	$\frac{N}{2}$	$\frac{N}{k_1}$		2
4	$\frac{M}{N_1}$	$\frac{M}{2k_3}$	$\frac{M}{2k_1}$	$\frac{M}{N}$	

und (4) enthält die 10 Proportionen:

$$(5,\ 5,\ 0):(5,\ 5,\ 1) = 2:\frac{M_1}{N_2}$$

$$(5,\ 5,\ 1):(5,\ 5,\ 2) = k_1:\frac{N_2}{k_4}$$

$$(5,\ 5,\ 2):(5,\ 5,\ 3) = \frac{N}{k_1}:k_4$$

$$(5,\ 5,\ 3):(5,\ 5,\ 4) = \frac{M}{N}:2$$

$$(5,\ 5,\ 4):(5,\ 5,\ 0) = \frac{M_1}{N_1}:\frac{M}{N_1}$$

$$(5,\ 5,\ 0):(5,\ 5,\ 2) = k_1:\frac{M_1}{2k_4}$$

$$(5,\ 5,\ 1):(5,\ 5,\ 3) = \frac{N}{2}:\frac{N_2}{2}$$

$$(5,\ 5,\ 2):(5,\ 5,\ 4) = \frac{M}{2k_1}:k_4$$

$$(5,\ 5,\ 3):(5,\ 5,\ 0) = \frac{M_1}{2k_2}:\frac{N}{k_2}$$

$$(5,\ 5,\ 4):(5,\ 5,\ 1) = \frac{N_2}{k_3}:\frac{M}{2k_3}$$

welche übereinstimmend ergeben:

$$(5,\ 5,\ 0) = \frac{L}{M_1};\quad (5,\ 5,\ 1) = \frac{L}{2N_2};\quad (5,\ 5,\ 2) = \frac{L}{2k_1 k_4}$$

$$(5,\ 5,\ 3) = \frac{L}{2N};\quad (5,\ 5,\ 4) = \frac{L}{M} \tag{15}$$

und nach dem Euler'schen Satze ist hier:

$$\frac{L}{M_1} - \frac{L}{2N_2} + \frac{L}{2k_1 k_4} - \frac{L}{2N} + \frac{L}{M} = 2$$

woraus:

$$L = \frac{2}{\frac{1}{M} + \frac{1}{M_1} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{N} + \frac{1}{N_2}\right) + \frac{1}{2k_1 k_4}} \tag{16}$$

Die Werte des Nenners für alle Combinationen der Grenzpolytope als Seiten und Eckfiguren sind:

$k_1 k_2 k_3 k_4$ $k_4 k_3 k_2 k_1$	$\frac{2}{L}$ (17)	L
3, 3, 3, 3	$\frac{1}{60}+\frac{1}{60}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{12}\right)+\frac{1}{2.3.3}=\frac{1}{180}$	360
3, 3, 3, 4	$\frac{1}{60}+\frac{1}{192}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{24}\right)+\frac{1}{2.3.4}=\frac{1}{960}$	1920
3, 3, 3, 5	$\frac{1}{60}+\frac{1}{7200}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{60}\right)+\frac{1}{2.3.5}=\frac{1}{7200}$	14400
3, 3, 4, 3	$\frac{1}{192}+\frac{1}{432}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{24}\right)+\frac{1}{2.3.3}=0$	
4, 3, 3, 4	$\frac{1}{192}+\frac{1}{192}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{24}+\frac{1}{24}\right)+\frac{1}{2.4.4}=0$	
4, 3, 3, 5	$\frac{1}{192}+\frac{1}{7200}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{24}+\frac{1}{60}\right)+\frac{1}{2.4.5}=-\frac{17}{14400}$	
5, 3, 3, 5	$\frac{1}{7200}+\frac{1}{7200}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{60}+\frac{1}{60}\right)+\frac{1}{2.5.5}=-\frac{13}{3600}$	

Die 4 letzten Combinationen geben keine ganzen Zahlen für L, daher keine regelmässigen Figuren. Den 3 ersten entsprechen die Werte:

$k_1 k_2 k_3 k_4$	(5, 5, 0)	(5, 5, 1)	(5, 5, 2)	(5, 5, 3)	(5, 5, 4)
3, 3, 3, 3	6	15	20	15	6
3, 3, 3, 4	10	40	80	80	32
4, 3, 3, 3	32	80	80	40	10
3, 3, 3, 5	2	120	480	600	240
5, 3, 3, 3	240	600	480	120	2

Die zwei letzten dieser Figuren sind offenbar unmöglich; denn das eine hat nur 2 Ecken, das andre nur 2 Seiten.

Es kann demnach nur 3 verschiedene regelmässige 5dehnungen geben. Infolge dessen kann auch für mehr Dimensionen in der Reihe der k die Zahl 4 nur am Anfang oder Ende stehen. Folglich giebt es für jedes $n > 4$ nur die drei verschiedenen $n$dehnungen

$$(3, 3, 3, \ldots 3, 3, 3)$$
$$(4, 3, 3, \ldots 3, 3, 3)$$
$$(3, 3, 3, \ldots 3, 3, 4)$$

Das Resultat bestätigt sich, wenn man die Grösse der $(n-1)$dehnigen innern Winkel der Seiten in Betracht zieht. Denn damit eine Anzahl $= (n, 0, n-1)$ von $(n-1)$dehnungen mit innern Winkeln

$= J$ einen concaven Winkel an der Ecke der $n$dehnung einschliessen können, muss, wenn W den $(n-1)$dehnigen Vollwinkel bezeichnet,

$$\frac{W}{J} > (n, 0, n-1)$$

sein. Das ist für $n = 5$

$$\frac{8R^2}{J} > (5, 0, 4)$$

Die Werte der linken Seite sind auf Seite 112 angegeben, die der rechten in der ersten Reihe der Tabelle (14). Stellt man sie zusammen, so kommt.

$k_1 k_2 k_3 k_4$	$\frac{8R^2}{J}$	(5, 0, 4)	$k_1 k_2 k_3 k_4$	$\frac{8R^2}{J}$	(5, 0, 4)
3, 3, 3, 3	102,	5	4, 3, 3, 4	16	16
3, 3, 3, 4	102,	16	4, 3, 3, 5	16	600
3, 3, 3, 5	102,	600	5, 3, 3, 3	3,	5
3, 3, 4, 3	24	24	5, 3, 3, 4	3,	16
3, 4, 3, 3	8	8	5, 3, 3, 5	3,	600
4, 3, 3, 3	16	5			

Unter diesen sind drei, welche $\frac{8R^2}{J} = (5, 0, 4)$ ergeben, welche also in eine lineare $(n-1)$dehnung degeneriren, nämlich (3, 3, 4, 3) (3, 4, 3, 3) (4, 3, 3, 4); bei fünf andern ist die erste Zahl $<$ die zweite; es bleiben nur die drei genannten übrig, welche der Bedingung genügen. Diese wollen wir nun für beliebige Dimensionszahl einzeln untersuchen.

Da jetzt alle k ausser dem ersten und letzten $= 3$ sind, so kann man die in Rede stehenden $n$dehnungen kürzer durch $(k_1; k_{n-1})$ bezeichnen.

§. 3. Pyramide.

Für $k_1 = k_2 = \ldots k_{n-1} = 3$, wo $N = N_1 = N_2 = 12$; $M = M_1 = 60$; $L = 360$ wird, ersieht man aus den Tabellen für $n = 2$, 3, 4, 5 leicht, dass bis dahin (in Binomialcoeff. ausgedrückt)

$$(n, \mu, \nu) = (\mu+1)_{\nu+1} \quad \text{für} \quad \mu > \nu \tag{18}$$

$$(n, \mu, \nu) = (n-\mu)_{n-\nu} \quad \text{für} \quad \mu < \nu \tag{19}$$

ist. Setzt man diese Werte für irgend ein $n-1$ voraus und führt sie in die Gl. (1) (2) (3) (4) ein, so kommt:

$$(n,\ \mu,\ \nu) = (\mu+1)_{\nu+1} \quad \text{für} \quad n > \mu > \nu$$
$$(n,\ \mu,\ \nu) = (n-\mu)_{n-\nu} \quad \text{für} \quad n > \nu > \mu > 0$$
$$(n,\ 0,\ \nu) = (n)_\nu \quad \text{für} \quad n > \nu > 0$$

wodurch die Gültigkeit der Werte (18) (19) für $\mu < n$ erhellt, dann:

$$(n,\ n,\ \nu):(n,\ n,\ \mu) = (\mu+1)_{\nu+1}:(n-\nu)_{n-\mu} \quad \text{für} \quad \mu > \nu$$
$$(n,\ n,\ \nu):(n,\ n,\ \mu) = (n-\mu)_{n-\nu}:(\nu+1)_{\mu+1} \quad \text{für} \quad \mu < \nu$$

Zur Bestätigung der Annahme ist also erforderlich:

$$(n+1)_{\nu+1}:(n+1)_{\mu+1} = (\mu+1)_{\nu+1}:(n-\nu)_{n-\mu}$$
$$= (n-\mu)_{n-\mu}:(\nu+1)_{\mu+1}$$

zwei Proportionen die identisch erfüllt sind.

Die Proportionen lassen einen Factor in $(n,\ n,\ \nu)$ unbestimmt, der aber für jedes ν derselbe ist. Er ergiebt sich durch folgende Betrachtung.

Um jede Ecke der n dehnung liegen

$$(n,\ 0,\ 1) = (n)_{n-1} = n$$

Kanten, die in n Ecken endigen. Nimmt man nun an, dass für irgend ein $n-1$ der unbekannte Factor $=1$ sei, so ist die Anzahl von deren Ecken nach (18)

$$(n-1,\ n-1,\ 0) = n$$

folglich sind die Endpunkte jener n Kanten die Ecken einer einzigen $(n-1)$ dehnung, welche die n dehnung abschliesst. Demnach ist die n dehnung (3; 3) eine Pyramide auf der Basis der $(n-1)$ dehnung und hat im ganzen $n+1$ Ecken. Diese Zahl stimmt mit Gl. (18) für n, also ist auch hier der unbekannte Factor $=1$. Für $n=3$ ist die Annahme erfüllt, daher für jedes n.

Die Möglichkeit der Figur (3; 3) liegt nach ihrem Nachweis als Pyramide auf der Hand.

§. 4. Orthogonale Figur.

Für $k_1 = 4$, $k_2 = k_3 = \ldots k_{n-1} = 3$, wo $N = 24$, $N_1 = N_2 = \ldots = 12$, $M = 192$, $M_1 = \ldots = 60$, $L = 1920$, $L_1 = \ldots = 360$ lässt sich gleichfalls aus den Tabellen für $n = 2, 3, 4, 5$ leicht entnehmen:

$$(n,\ \mu,\ \nu) = (\mu)_\nu 2^{\mu-\nu} \quad \text{für} \quad \mu > \nu \tag{20}$$
$$(n,\ \mu,\ \nu) = (n-\mu)_{n-\nu} \quad \text{für} \quad \mu < \nu \tag{21}$$

Gelten diese Werte für irgend ein $n-1$, und führt man sie zur Rechten der Gl. (1) (2) (3) ein, so erhält man für $\mu < n$ die Werte (20) (21) wieder. Die Proportion (4) verlangt nachher, dass

$$(n)_\nu 2^{n-\nu} : (n)_\mu 2^{n-\mu} = (\mu)_\nu 2^{\mu-\nu} : (n-\nu)_{n-\mu}$$
$$= (n-\mu)_{n-\nu} : (\nu)_\mu 2^{\nu-\mu}$$

sei, was identisch stattfindet.

Der unbekannte Factor in (n, n, ν) ergiebt sich, wenn man die Orthogonalität der Figur zur Voraussetzung macht, wofür der Beweis in §. 8. folgen wird. Da nämlich jede der n Dimensionen durch 2 parallele Gegenseiten begrenzt wird, so hat die Figur $2n$ Seiten, daher ist

$$(n, n, n-1) = 2n$$

Dies stimmt mit der Formel überein, mithin ist jener Factor $= 1$, w. z. b. w.

Die Möglichkeit der Figur leuchtet sofort ein, da man die Coordinatengleichungen der Seiten angeben kann, nämlich jede Coordinate einzeln $= \pm 1$ giebt je eine Seite.

§. 5. Reciproke Figur der orthogonalen.

Die Bestimmung der $n$dehnung (3; 4) geht aus der der $n$dehnung (4; 3) durch ihre Reciprocität hervor. Denn nach §. 1. Gl. (5) (6) muss sein

$$[n, \mu, \nu] = (n, n-\mu-1, n-\nu-1)$$

für jedes μ und ν von 0 bis $n-1$, und

$$[n, n, \nu] = (n, n, n-\nu-1)$$

Führt man die Werte (19) (20) zur Rechten ein, wobei 3 Fälle zu unterscheiden sind, so erhält man für die $n$dehnung (3; 4):

$$(n, \mu, \nu) = (\mu+1)_{\nu+1} \quad (n > \mu > \nu) \tag{22}$$
$$(n, \mu, \nu) = (n-\mu-1)_{\nu-\mu} 2^{\nu-\mu} \quad (n > \nu > \mu) \tag{23}$$
$$(n, n, \nu) = (n)_{\nu+1} 2^{\nu+1} \tag{24}$$

§. 6. Mittelpunkt und Radien.

Der normale Abstand des Mittelpunkts C der $n$dehnung von der $m$dehnigen Grenzfigur sei bezeichnet durch $r_n^{(m)}$; es sei also $r_n^{(0)} = r_n$ der Eckradius, r'_n der Kantenradius, r''_n der Flächenradius u. s. w.

Gehen nun von der Ecke A die Kanten AB und AB' aus, welche derselben Fläche angehören, und man legt den Schnitt, welcher die Eckfigur $(k_2 k_3 \ldots k_{n-1})$ bildet, normal zu AC durch B, B' etc., bezeichnet ferner D den Schnittpunkt von AC, und man setzt $AB = 1$, so ist

$$AC = BC = r_n \quad \text{für} \quad (k_1 k_2 \ldots k_{n-1}) \quad (\text{Kante} = 1)$$

$$BD = r_{n-1} \quad \text{für} \quad (k_2 k_3 \ldots k_{n-1}) \quad (\text{Kante} = BB' = b)$$

$$\text{oder} \quad = b r_{n-1} \quad (\text{Kante} = 1)$$

$$AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{1 - b^2 r_{n-1}^2}$$

Da nun

$$AB : AD = AC : \tfrac{1}{2} AB$$

so hat man die recurrente Formel:

$$r_n = \frac{1}{2\sqrt{1 - b^2 r_{n-1}^2}} \tag{25}$$

Die Reduction geschieht in der Reihe der Eckfiguren, also anfangend mit den letzten k und das vorhergehende immer hinzufügend. Daher ist für die Pyramide die Eckfigur stets Pyramide, $k = 3$, die Fläche BAB' ein Dreieck, $b = 1$; für die Orthogonale die Eckfigur bis zur $(n-1)$ten Dimension Pyramide, $b = 1$, am Schluss aber ist BAB' ein Quadrat, $b = \sqrt{2}$; für die Reciprok-Orthogonale ist die Eckfigur stets Reciprok-Orthogonale, BAB' ein Dreieck, $b = 1$.

Für die Pyramide hat man also:

$$4 r_n^2 (1 - r_{n-1}^2) = 1 \tag{26}$$

Diese Gleichung wird erfüllt durch

$$r_n^2 = \frac{n}{2(n+1)} \tag{27}$$

das ist für $n = 2$

$$r_2 = \sqrt{\tfrac{1}{3}}$$

wie es beim Dreieck stattfindet, folglich der Wert allgemein gültig.

Hieraus folgt für die Pyramide:

$$r_{n-1}^2 = \frac{n-1}{2n}$$

anwendbar auf die Eckfigur der Orthogonalen, aus diesem Werte wieder nach (25) $(b^2 = 2)$:

$$r_n^2 = \frac{1}{4(1 - 2 r_{n-1}^2)} = \frac{n}{4} \tag{28}$$

Für die Reciprok-Orthogonale gilt wieder Gl. (25) und zwar mit der Lösung

$$r_n^2 = \tfrac{1}{2} \tag{29}$$

was auch für $n = 2$, d. i. für ein Quadrat stimmt.

Fällt man nun von C ein Lot CE auf die $m$dehnige Grenzfigur, welche die Ecke A hat, so ist das Dreieck ACE rechtwinklig in E, und

$$\left.\begin{array}{l} AC = r_n \\ CE = r_n^{(m)} \end{array}\right\} \text{ bezüglich auf } (k_1 k_2 \ldots k_{n-1})$$

$$AE = r_m, \text{ bezüglich auf } (k_1 k_2 \ldots k_{m-1})$$

also

$$[r_n^{(m)}]^2 = r_n^2 - r_m^2 \tag{30}$$

das ist für Pyramide nach (27)

$$[r_n^{(m)}]^2 = \frac{n}{2(n+1)} - \frac{m}{2(m+1)} = \frac{n-m}{2(n+1)(m+1)} \tag{31}$$

für Orthogonale nach (28):

$$[r_n^{(m)}]^2 = \frac{n}{4} - \frac{m}{4} = \frac{n-m}{4} \tag{32}$$

für Reciprok-Orthogonale nach (29) und (27):

$$[r_n^{(m)}]^2 = \tfrac{1}{2} - \frac{m}{2(m+1)} = \frac{1}{2(m+1)} \tag{33}$$

§. 7. Inhalt und Umgrenzung.

Die $n$dehnung, deren Inhalt J_n, ist umgrenzt von $(n, n, n-1)$ Seiten, deren jede $= J_{n-1}$; daher ist die Umgrenzung

$$U_n = (n, n, n-1) J_{n-1} \tag{34}$$

Lässt man die Umgrenzung, indem sie sich ähnlich bleibt, den Inhalt J_n erzeugen, während der Seitenradius $r_n^{(n-1)}$ von 0 bis $r_n^{(n-1)}$ wächst, und beachtet, dass alsdann U_n proportional $[r_n^{(n-1)}]^{n-1}$ variirt, so erhält man durch Integration:

$$J_n = \frac{1}{n} r_n^{(n-1)} U_n = \frac{1}{n}(n, n, n-1) r_n^{(n-1)} J_{n-1} \tag{35}$$

Für Pyramide ist nach Gl. (18)

$$(n, n, n-1) = (n+1)_n = n+1 \tag{36}$$

und nach Gl. (31)

$$r_n^{(n-1)} = \sqrt{\frac{1}{2n(n+1)}}$$

daher

$$J_n = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{n+1}{2n}}J_{n-1}$$

$$= \frac{1}{3.4 \ldots n}\sqrt{\frac{n+1}{2^{n-2}.3}}J_2$$

Nun ist das Dreieck $J_2 = \frac{1}{4}\sqrt{3}$, folglich

$$J_n = \frac{\sqrt{n+1}}{n!\,2^{\frac{1}{2}n}} \tag{37}$$

woraus weiter:

$$J_{n-1} = \frac{\sqrt{n}}{(n-1)!\,2^{\frac{1}{2}(n-1)}} \tag{38}$$

und nach Gl. (34) (36)

$$U_n = \frac{n+1}{(n-1)!}\sqrt{\frac{n}{2^{n-1}}} \tag{39}$$

übereinstimmend mit dem Resultat von §. 5. in T. LXIV. S. 200.

Für Orthogonalfigur, deren Grenzfiguren sämmtlich solche sind, giebt Gl. (20):

$$(n,\ n,\ n-1) = 2n$$

Gl. (32):

$$r_n^{(n-1)} = \frac{1}{2}$$

daher Gl. (35):

$$J_n = J_{n-1}$$

und, da das Quadrat $J_2 = 1$ ist,

$$J_n = 1; \quad U_n = 2n \tag{40}$$

Für die Reciproke der vorigen ist J_{n-1} Pyramide, dagegen nach Gl. (24)

$$(n,\ n,\ n-1) = (n)_n 2^n = 2^n$$

also nach Gl. (34) (39)

$$U_n = 2^n\frac{\sqrt{n}}{(n-1)!\,2^{\frac{1}{2}(n-1)}} = \frac{\sqrt{n.2^{n+1}}}{(n-1)!} \tag{41}$$

und nach Gl. (35), wo nach Gl. (33)

$$r_n^{(n-1)} = \sqrt{\frac{1}{2n}}$$

zu setzen ist,

$$J_n = \frac{2^{\frac{1}{2}n}}{n!} \tag{42}$$

§. 8. Ebener Winkel zwischen zwei an einander grenzenden Seiten.

Fällt man vom Mittelpunkt C auf die Seiten S und S', welche sich in der $(n-2)$dehnung T schneiden, die Lote CB und CB' und auf T das Lot CA, so ist $ABCB'$ ein ebenes Viereck, rechtwinklig in B und B', das von der Diagonale AC symmetrisch geteilt wird, so dass der Winkel $BAB' = \vartheta$, welcher die Neigung der Seiten S, S' gegen einander darstellt, von ihr halbirt wird. Man hat dann:

$$AB = r_{n-1}^{(n-2)}; \quad AC = r_n^{(n-2)}; \quad BC = r_n^{(n-1)}$$

daher zur Bestimmung von ϑ

$$\cos\frac{\vartheta}{2} = r_{n-1}^{(n-2)} : r_n^{(n-2)}$$

$$\sin\frac{\vartheta}{2} = r_n^{(n-1)} \quad : r_n^{(n-2)}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2} = r_n^{(n-1)} \quad : r_{n-1}^{(n-2)}$$

das ist nach §. 6. für Pyramide

$$\cos\frac{\vartheta}{2} = \sqrt{\frac{n+1}{2n}}; \quad \sin\frac{\vartheta}{2} = \sqrt{\frac{n-1}{2n}}; \quad \cos\vartheta = \frac{1}{n} \tag{43}$$

für Orthogonalfigur

$$\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2} = 1; \quad \vartheta = \mathrm{R}$$

für die Reciproke derselben, deren Seite Pyramide,

$$\cos\frac{\vartheta}{2} = \sqrt{\frac{1}{n}}; \quad \sin\frac{\vartheta}{2}\sqrt{\frac{n-1}{n}}; \quad \cos\vartheta = \frac{2}{n} - 1 \tag{47}$$

Der Wert $\vartheta = \mathrm{R}$ beweist nachträglich die in §. 4. gemachte Annahme der Orthogonalität der $n$dehnung (4: 3), von welcher §. 6. unabhängig ist.

Die Werte der ϑ für die 4dehnungen sind in LXVII. S. 37. Gl. 19. durch gemeinsame Formel dargestellt.

XIII.

Zur Kardioide.

Diese Linie, als ein geometrischer Ort. Ein Verfahren zur mechanischen Construction derselben.

Von

Herrn **Josef Pleyl,**

Assistent an der k. k. technischen Hochschule in Wien.

I. (Fig. 1.)

Ein Kreis K ist gegeben; sein Radius:

$$UM = a.$$

Wir ziehen in demselben eine Sehne UR, die unter dem Winkel φ gegen den Durchmesser UU_1 geneigt ist, und senkrecht zu ihr den Durchmesser QQ_1. Dadurch entsteht das gleichschenklige Dreieck URQ, dessen gleiche Seiten wir über die Spitze hinaus um ihre eigene Länge fortsetzen. Wir kommen dadurch zu einem dem früher bezeichneten congruenten Dreiecke PWQ, respective zu zwei Punkten P und W.

Aendern wir den Winkel φ stetig, so ändert sich auch die Sehne UR, und wir erhalten eine continuirliche Aufeinanderfolge von Punkten P und W, vorausgesetzt, dass für jeden Wert von φ oben bezeichnete Construction neuerlich durchgeführt wird.

Das gibt zwei Curven, deren eine die Gesammtheit aller unmittelbar auf einander folgenden Punkte P, deren andere den geometrischen Ort aller Punkte W bildet.

Um Einiges über diese beiden Linien zu erfahren, wollen wir aus den angegebenen Bedingungen ihre Gleichungen abzuleiten versuchen.

Es ist zunächst:

$$NQ = NM + MQ = a.\mathrm{Sin}\,\varphi + a = a(1 + \mathrm{Sin}\,\varphi) \qquad (1)$$

$$UN = a.\mathrm{Cos}\,\varphi \qquad (2)$$

$$\frac{r_1}{2} = UQ = \sqrt{\overline{UN}^2 + \overline{NQ}^2} = a\sqrt{\mathrm{Cos}^2\varphi + (1 + \mathrm{Sin}\,\varphi)^2}$$

oder

$$\frac{r_1}{2} = a\sqrt{2(1 + \mathrm{Sin}\,\varphi)}$$

daher

$$UW = 2UQ = r_1 = 2a\sqrt{2(1 + \mathrm{Sin}\,\varphi)} \qquad (I)$$

Das gilt für jeden Punkt W.

Verbinden wir P mit U und nennen die Verbindungsgerade r, so ist r gleich und parallel NN_1; und da $NN_1 = 2.NQ$, erhalten wir:

$$r = 2.NQ = 2a(1 + \mathrm{Sin}\,\varphi) \qquad (II)$$

für jeden Punkt P giltig.

Führen wir in den erhaltenen Gleichungen (I) und (II) statt des Winkels φ einen anderen Winkel θ ein, so dass

$$\varphi = (\theta - 90^0),$$

so gehen dieselben in folgende über:

$$r_1 = 2a\sqrt{2(1 - \mathrm{Cos}\,\theta)} \quad \text{oder} \quad r_1 = 4a.\mathrm{Sin}\,\frac{\theta}{2} \qquad (A)$$

und

$$r = 2a[1 - \mathrm{Cos}\,\theta] \quad \text{oder} \quad r = 4a.\mathrm{Sin}^2\frac{\theta}{2} \qquad (B)$$

und wir wollen nun jede dieser beiden Gleichungen gesondert betrachten.

II.

$$r = 2a[1 - \mathrm{Cos}\,\theta] \qquad (B)$$

Legen wir dem Winkel θ alle Werte von 0 bis π bei, so durchläuft die Function $\cos\theta$ das ganze Intervall von $(+1)$ bis (-1), und der von ihr abhängige Radiusvector r nimmt alle möglichen verschiedenen Werte an, deren er anzunehmen fähig ist. Da ferner für negativ gezählte Winkel θ die Function $\cos\theta$, also auch r, dem Zeichen und Werte nach unverändert bleibt, so schliessen wir daraus, dass die Curve — welche durch die Gleichung (B) repräsentirt ist,

und die als die Gesammtheit aller unmittelbar auf einander folgenden Punkte P erscheint — durch die beiderseitig verlängerte Gerade UM in zwei symmetrische Hälften geteilt wird, ferner, dass sie eine geschlossene Curve sein muss, weil r für keinen Wert von θ unendlich gross wird. Es ist

$$r = 2a(1 - \cos\theta)$$

die Gleichung jener Curve, bezogen auf ein Polarcoordinaten-System mit dem Pole U, der beiderseits verlängerten Geraden UM als Polarachse und dem Winkel θ — von der Polarachse an in der Richtung des Pfeiles positiv gerechnet — als Polarwinkel oder Amplitude.

Versuchen wir, diese Gleichung durch rechtwinklige Coordinaten x und y auszudrücken, so ermöglichen das die beiden bekannten Relationen:

$$x = r \,.\, \mathrm{Cos}\,\theta \tag{3}$$

$$y = r \,.\, \mathrm{Sin}\,\theta \tag{4}$$

Wir erhalten nach Substitution des Wertes von r aus (B):

$$x = 2a(1 - \mathrm{Cos}\,\theta)\,\mathrm{Cos}\,\theta \tag{5}$$

$$y = 2a(1 - \mathrm{Cos}\,\theta)\,\mathrm{Sin}\,\theta \tag{6}$$

daraus:

$$\frac{x}{y} = \mathrm{ctg}\,\theta,$$

daher:

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \tag{7}$$

Quadriren wir und addiren dann die Gleichungen (5) und (6), so ergibt sich nach erfolgter Substitution des Wertes von $\cos\theta$ aus (7) und nochmaligem Quadriren die verlangte Gleichung:

$$(x^2 + y^2)^2 + 4ax(x^2 + y^2) = 4a^2y^2 \tag{III}$$

bezogen auf die Polarachse als Abscissenachse und den Pol U als Ursprung eines rechtwinkligen Coordinatensystems.

Zu weiteren Untersuchungen wollen wir uns jedoch der Polargleichung (B) bedienen.

Bekanntlich geben die Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ — die aus (III) abgeleitet werden könnten — in Polarcoordinaten die Ausdrücke:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dr}{d\theta}\,\mathrm{Sin}\,\theta + r \,.\, \mathrm{Cos}\,\theta}{\frac{dr}{d\theta}\,\mathrm{Cos}\,\theta - r \,.\, \mathrm{Sin}\,\theta} \tag{8}$$

und

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{r^2+2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2-r\frac{d^2r}{d\theta^2}}{\left(\frac{dr}{d\theta}\operatorname{Cos}\theta-r.\operatorname{Sin}\theta\right)^3} \tag{9}$$

In diese beiden Gleichungen sind die aus (B) folgenden Werte der Differentialquotienten $\frac{dr}{d\theta}$ und $\frac{d^2r}{d\theta^2}$ zu substituiren. Es ist

$$\frac{dr}{d\theta}=2a.\operatorname{Sin}\theta$$

und

$$\frac{d^2r}{d\theta^2}=2a.\operatorname{Cos}\theta;$$

wir erhalten nach einigen Reductionen:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\operatorname{Cos}\theta-\operatorname{Cos}2\theta}{\operatorname{Sin}2\theta-\operatorname{Sin}\theta} \tag{IV}$$

und

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{3(1-\operatorname{Cos}\theta)}{2a(\operatorname{Sin}2\theta-\operatorname{Sin}\theta)^3} \tag{V}$$

Für die in Bezug auf die Polarachse am höchsten und tiefsten gelegenen Punkte der in Rede stehenden Curve muss

$$\frac{dy}{dx}=0,$$

für die am weitesten rechts und links gelegenen aber

$$\frac{dy}{dx}=\infty$$

werden. Ersteres tritt ein, wenn der Zähler der rechten Seite von (IV), also:

$$\operatorname{Cos}\theta-\operatorname{Cos}(2\theta)=0, \tag{10}$$

letzteres, wenn der Nenner

$$\operatorname{Sin}2\theta-\operatorname{Sin}\theta=0 \tag{11}$$

wird.

Die Gleichung (10) gibt in der Schreibweise:

$$2\operatorname{Sin}^2\frac{\theta}{2}\left(3\operatorname{Cos}^2\frac{\theta}{2}-\operatorname{Sin}^2\frac{\theta}{2}\right)=0$$

die von einander verschiedenen Auflösungen:

$$\operatorname{Sin}^2\frac{\theta}{2}=0,\qquad \text{also}\qquad \theta_1=0,\qquad \text{und}$$

$$\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2} = 3, \quad \text{also}$$

$$\frac{\theta}{2} = \pm\frac{\pi}{3} \qquad \text{oder} \qquad \theta_{2,3} = \pm\frac{2\pi}{3}.$$

Die Gleichung (11) gibt in der Schreibweise:

$$\operatorname{Sin}\theta(2.\operatorname{Cos}\theta - 1) = 0$$

die von einander verschiedenen Auflösungen:

$$\operatorname{Sin}\theta = 0, \quad \text{also} \quad \theta_1 = 0 \quad \text{und} \quad \theta_2 = \pi,$$

$$\operatorname{Cos}\theta = \frac{1}{2}, \quad \text{also} \quad \theta_{3,4} = \pm\frac{\pi}{3}.$$

Für den Wert des Polarwinkels $\theta = 0$ wird mithin der Zähler und der Nenner gleich der Null, und für diesen Wert erscheint sonach der Wert von $\frac{dy}{dx}$ in der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$, welche durch das bekannte Verfahren der Differentiation sowol des Zählers für sich als auch des Nenners beseitigt werden kann.

$$\frac{dy}{dx} = \left.\frac{-\operatorname{Sin}\theta + 2\operatorname{Sin}2\theta}{2\operatorname{Cos}2\theta - \operatorname{Cos}\theta}\right\}_{\theta=0} = \frac{0}{1} = 0$$

Auch der zweite Differential-Quotient $\frac{d^2y}{dx^2}$ erhält für $\theta = 0$ die Form $\frac{0}{0}$ und erst nach zweimaliger Anwendung des eben bezeichneten Verfahrens resultirt der bestimmte Wert, und zwar

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \infty$$

Da weiter für den Wert $\theta = +\frac{2\pi}{3}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\sqrt{3}}{4a}, \text{ also negativ,}$$

für $\theta = -\frac{2\pi}{3}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = +\frac{\sqrt{3}}{4a}, \text{ also positiv ist,}$$

so zeigt die Curve in den diesen Werten entsprechenden Punkten beziehungsweise ein Maximum und ein Minimum.

Dieses Alles im Verein mit dem früher allgemein über diese Curve Bemerkten lässt nun folgende übersichtliche Zusammenstellung zu.

Für	erhält man			
$\theta =$	$\frac{dy}{dx} =$	$\frac{d^2y}{dx^2} =$	$r =$	besondere Punkte, u. z.
0	0	∞	0	Rückkehrpunkt I Art: U
$\pm\frac{\pi}{3}$	∞	∞	a	die am weitesten links gelegenen Punkte: P_1 und P_2
$\pm\frac{\pi}{2}$	∓ 1	$\mp\frac{3}{2a}$	$2a$	die Punkte P_3 und P_4, deren Tangenten mit der Polarachse Winkel von 45^0 einschliessen
$\pm\frac{2\pi}{3}$	0	$\mp\frac{\sqrt{3}}{4a}$	$3a$	Maximum und Minimum: P_5 und P_6
$\pm\pi$	∞	∞	$4a$	den am weitesten rechts gelegenen Punkt P_7

Die in Frage stehende krumme Linie kann nun leicht gezeichnet werden. Sie ist die Herzlinie oder Kardioide.

III.

Man kann den Ursprung U als Träger eines Strahlenbüschels betrachten, dessen Ebene die Curvenebene ist, und dessen Elemente ausser U noch je zwei Punkte mit der Herzlinie gemeinschaftlich haben. Der Strahl, der dem Polarwinkel

$$\theta = +\frac{2\pi}{3}$$

entspricht, geht durch den höchsten Curvenpunkt P_5, enthält aber auch, da er gleichzeitig dem Polarwinkel

$$\theta = -\frac{\pi}{3}$$

entspricht, einen der am weitesten links gelegenen Punkte, u. z. P_2.

Weil der Radiusvector $UP_5 = 3a$ und $UP_2 = a$ ist, so ist die Entfernung der zwei auf einem Strahle gelegenen Curvenpunkte P_5, P_2, nämlich

$$P_2P_5 = 4a.$$

Die in diesen zwei Punkten an die Kardioide gezogenen Tangenten sind beziehungsweise horizontal und vertical, stehen daher auf einander senkrecht.

Es fragt sich nun, ob dieselben Verhältnisse auch für jeden anderen Strahl des bezeichneten Büschels, resp. für die ausser dem Ursprunge U auf ihm liegenden Punkte der Herzlinie — die wir von nun an kurz „zusammengehörige Punkte" nennen wollen — gelten.

Der Abkürzung wegen wollen wir auch die Tangenten und Normalen zweier zusammengehöriger Punkte der Kardioide beziehungsweise „zusammengehörige Tangenten" und „zusammengehörige Normalen" nennen.

Betrachten wir nun allgemein den dem Polarwinkel θ entsprechenden Strahl s. Derselbe enthält die zusammengehörigen Punkte P und S; es ist UP Radiusvector der Kardioide, daher

$$UP = 2a(1 - \cos\theta) \tag{12}$$

Der ebenfalls auf s liegende Radiusvector US entspricht einem negativen Polarwinkel ψ, wobei

$$\psi = (\theta - \pi),$$

daher

$$US = 2a[1 - \cos(\theta - \pi)] = 2a(1 + \cos\theta) \tag{13}$$

Adddiren wir die Gleichungen (12) und (13), so erhalten wir sogleich

$$UP + US = SP = 4a.$$

Dadurch ist der erste Teil der Frage beantwortet.

Es bleibt noch zu erörtern übrig, ob auch die Tangenten in diesen auf dem beliebig gewählten Strahl s liegenden Punkten P und S auf einander senkrecht stehen. Nennen wir dieselben beziehungsweise T und T_1:

Der Winkel τ, welchen die Tangente T mit der Polarachse oder der zur letzteren parallelen Geraden PZ einschliesst, ist bestimmt durch den Differential-Quotienten $\frac{dy}{dx}$ in der Weise, dass

$$\operatorname{tg}\tau = \frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{Cos}\theta - \operatorname{Cos}2\theta}{\operatorname{Sin}2\theta - \operatorname{Sin}\theta};$$

ebenso der Winkel τ_1, den die Tangente T_1 mit der PZ bildet, nur haben wir in dem Ausdrucke für $\operatorname{tg}\tau_1 = \frac{dy}{dx}$ statt der dem Punkte P entsprechenden Amplitude θ die dem Punkte S zugehörige

$$\psi = (\theta - \pi)$$

zu substituiren. Also

$$\operatorname{tg}\tau_1 = \frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{Cos}(\theta-\pi)-\operatorname{Cos}(2\theta-2\pi)}{\operatorname{Sin}(2\theta-2\pi)-\operatorname{Sin}(\theta-\pi)} = -\frac{\operatorname{Cos}\theta+\operatorname{Cos}2\theta}{\operatorname{Sin}2\theta+\operatorname{Sin}\theta}.$$

Sei der Winkel, den T und T_1 mit einander einschliessen, μ genannt; dann ist, wie leicht aus der Figur zu ersehen ist,

$$\mu = \tau_1 - \tau,$$

daher

$$\operatorname{tg}\mu = \operatorname{tg}(\tau_1 - \tau) = \frac{\operatorname{tg}\tau_1 - \operatorname{tg}\tau}{1+\operatorname{tg}\tau_1 . \operatorname{tg}\tau}.$$

Nach Substitution der oben für $\operatorname{tg}\tau$ und $\operatorname{tg}\tau_1$ gefundenen Werte geht diese Gleichung über in folgende:

$$\operatorname{tg}\mu = -\frac{\dfrac{\operatorname{Cos}\theta+\operatorname{Cos}2\theta}{\operatorname{Sin}2\theta+\operatorname{Sin}\theta}+\dfrac{\operatorname{Cos}\theta-\operatorname{Cos}2\theta}{\operatorname{Sin}2\theta-\operatorname{Sin}\theta}}{1-\dfrac{\operatorname{Cos}\theta+\operatorname{Cos}2\theta}{\operatorname{Sin}2\theta+\operatorname{Sin}\theta}\cdot\dfrac{\operatorname{Cos}\theta-\operatorname{Cos}2\theta}{\operatorname{Sin}2\theta-\operatorname{Sin}\theta}}$$

Wir erhalten nach entsprechender Reduction

$$\operatorname{tg}\mu = -\frac{2\operatorname{Sin}\theta}{1-1} = -\infty,$$

d. h. der Winkel μ ist ein rechter Winkel, die in Rede stehenden Tangenten stehen ebenfalls aufeinander senkrecht.

Dadurch ist der zweite Teil obiger Frage beantwortet.

Aus all diesem folgt: „Jede durch den Rückkehrpunkt der Kar-„dioide gehende Gerade hat mit der Curve noch zwei Punkte gemein-„schaftlich, deren Entfernung $4a$ beträgt und deren zugehörige Tan-„genten aufeinander senkrecht stehen."

Man kann mithin das Coordinatensystem — Polar- oder rechtwinkliges — beliebig in der Curvenebene wählen, stets wird einem Maximum (oder Minimum) der auf dieses System bezogenen Kardioide ein in Bezug auf seine unmittelbaren Nachbarpunkte am weitesten rechts oder links gelegener Punkt entsprechen, der mit dem Maximum (oder Minimum) auf einer durch den Rückkehrpunkt der Herzlinie gehenden Geraden liegt.

Eine Ausnahme hiervon tritt nur dann ein, wenn die Polar-respective Abscissenachse parallel zur Tangente im Punkte P_7 angenommen wird. Dann ist der zu P_7 gehörige Punkt U kein am weitestens rechts oder links gelegener Curvenpunkt, sondern mit P_7 zugleich ein Maximum oder ein Minimum.

IV.

Da je zwei zusammengehörige Tangenten aufeinander senkrecht stehen, so müssen es auch die entsprechenden beiden Normalen, und bilden diese vier Linien also immer ein Rechteck, dessen Diagonale gleich der Entfernung zweier zusammengehöriger Punkte der Herzlinie, mithin gleich dem vierfachen Radius des gegebenen Kreises K ist. Das Rechteck, gebildet von den Tangenten T und T_1 und den zugehörigen Normalen N_n und N_n', heisse $I\ II\ III\ IV$, und sind II und III zugleich die Punkte der Kardioide P und S.

Da ausserdem die Diagonale des bezeichneten Rechtecks für jede Lage desselben eine constante Länge $4a$ besitzt, so liegt die Frage nahe, in welcher Curve sich der Schnittpunkt zweier zusammengehöriger Normalen — I — und in welcher Bahn sich der Schnittpunkt der zusammengehörigen Tangenten — IV — bewege.

Die bei der Ableitung der Gleichungen (A) und (B) benutzte Kreissehne war

$$UR = 2UN = 2a.\mathrm{Cos}\,\varphi,$$

oder, durch θ ausgedrückt,

$$UR = 2a.\mathrm{Cos}(\theta - 90^0) = 2a.\mathrm{Sin}\,\theta \tag{14}$$

Aus der Gleichung der Kardioide folgt:

$$\frac{dr}{d\theta} = 2a.\mathrm{Sin}\,\theta \tag{15}$$

Weil aber $\frac{dr}{d\theta}$ die Länge der Subnormale vorstellt, so sehen wir, dass oben bezeichnete Sehne UR, da sie gleichzeitig auf dem Radiusvector des Punktes P senkrecht, selbst die Subnormale, folglich die Gerade RP die Normale der Kardioide im Punkte P bildet.

Setzen wir in der Gleichung (15) statt θ einen Winkel $(\theta - 180^0)$, so erhalten wir

$$\frac{dr}{d\theta} = -2a.\mathrm{Sin}\,\theta \tag{16}$$

Der Ausdruck rechterseits,

$$-2a.\mathrm{Sin}\,\theta,$$

stellt aber, wie leicht einzusehen, die Subnormale des zu P gehörigen Punktes S dar, welche Subnormale mithin dieselbe absolute Länge wie UR besitzt. Es ist demnach klar, dass diese beiden Subnormalen zusammenfallen, und dass ihr gemeinschaftlicher Endpunkt R der Schnittpunkt beider zusammengehöriger Normalen N_n, N_n' ist. Dieser

Schnittpunkt ist aber zugleich der Eckpunkt I des Rechtecks $I\,II\,III\,IV$, und da er stets auf der Peripherie des Kreises K liegt, so erscheint diese Kreislinie als die Gesammtheit aller stetig auf einander folgenden Schnittpunkte je zweier zusammengehöriger Normalen.

Dadurch ist der eine Teil der letzt gestellten Frage beantwortet.

Da der Winkel bei R, den die Geraden N_n und N_n' miteinander einschliessen, ein rechter ist und N_n durch den Endpunkt Q des Durchmessers QQ_1 geht, so muss N_n' durch den zweiten Endpunkt Q_1 desselben gehen.

Ferner ist QQ_1 parallel SP resp. parallel $II\,III$, daher

$$\text{Dreieck } IQ_1Q \text{ ähnlich } I\,II\,III.$$

Mithin muss, da die Diagonale $II\,III$ von der zweiten Diagonale $I\,IV$ halbirt wird, die Gerade $I\,IV$ auch durch den Halbirungspunkt des Durchmessers QQ_1 — also durch den Kreismittelpunkt M — gehen.

Weil endlich

$$I\,IV = II\,III = 4a,$$

$$MI = a$$

ist, so ist

$$MIV = 3a \tag{17}$$

Die Diagonale $I\,IV$ geht also für alle Lagen des Rechtecks $I\,II\,III\,IV$ durch den Mittelpunkt M und wird von demselben im Verhältnisse

$$1:3$$

geteilt.

Wir ziehen daraus als Antwort auf den zweiten Teil der letzt gestellten Frage den Schluss:

„Alle Schnittpunkte je zweier zusammengehöriger Tangenten der „Kardioide liegen in ihrer unmittelbaren Aufeinanderfolge auf der „Peripherie eines Kreises K_1, der aus dem Mittelpunkte M mit dem „Radius $3a$ beschrieben wird.“

V.

Nun wollen wir die Gleichung (A) näher untersuchen; sie lautet:

$$UW = r_1 = 4a.\operatorname{Sin}\frac{\theta}{2}.$$

Verlegen wir den Ursprung des Polarcoordinaten-Systems in den mit U auf demselben Durchmesser von K liegenden Punkt U_1, so erhalten wir mit Hilfe des Carnot'schen Lehrsatzes den auf das neue Coordinatensystem bezogenen Radiusvector U_1W oder r_2:

$$r_2 = \sqrt{\overline{UU_1}^2 + r_1^2 - 2 . UU_1 . r_1 . \cos\alpha}$$

oder

$$r_2 = \sqrt{4a^2 + 16a^2 . \mathrm{Sin}^2\frac{\theta}{2} - 16a^2 . \cos\alpha . \mathrm{Sin}\frac{\theta}{2}}$$

Aus dem gleichschenkligen Dreiecke *UMQ* folgt:

$$\text{Wkl. } \alpha = 90^0 - \frac{\beta}{2}, \quad \text{und da Wkl. } \beta = \theta, \quad \text{so ist}$$

$$\text{Wkl. } \alpha = 90^0 - \frac{\theta}{2}, \quad \text{also} \quad \mathrm{Cos}\,\alpha = \mathrm{Sin}\frac{\theta}{2}.$$

Dieser letztere Wert von $\mathrm{Cos}\,\alpha$ in den Ausdruck für r_2 eingesetzt, gibt:

$$r_2 = \pm 2a.$$

Das ist aber die Polargleichung eines Kreises, dessen Radius gleich $2a$ und dessen Mittelpunkt der Ursprung des Coordinatensystems ist. Dieser Kreis K_2 ist mithin der geometrische Ort aller unmittelbar auf einander folgenden Punkte W.

Die Grundlinie PW des mit dem gleichschenkligen Dreiecke URQ congruenten Dreiecks QPW steht immer senkrecht auf der Symmetrale NN_1, also auch auf dem mit NN_1 stets parallelen Radius r_2 des Kreises K_2 und aus demselben Grunde auf dem Radiusvector r des Punkses P der Kardioide.

PW ist mithin Tangente des Kreises K_2, und der Punkt P der Fusspunkt des zu PW stets normalen Radiusvectors r.

Daraus erhellt unmittelbar, dass die Kardioide zugleich die Fusspunktcurve des Kreises K_2 — bezogen auf den Pol U — ist.

VI.

Die Ergebnisse des IV. Teiles vorliegender Abhandlung lassen sich noch weiter verfolgen. Aus der gegenseitigen Lage der Diagonalen des Rechtecks *I II III IV* in den verschiedenen Stadien der Kardioiden-Construction ergibt sich unmittelbar ein Verfahren, die Herzlinie mechanisch zu construiren.

Das Instrument, welches dazu dienen soll, zweckentsprechend herzustellen, auf dass es überall, besonders in der unmittelbaren Nähe des Rückkehrpunktes U, sowie der Punkte P_3 und P_4, scharf und sicher functionire, bleibt dem Mechaniker überlassen, und sind in der weiteren Auseinandersetzung diesbezüglich nur einige Andeutungen eingeflochten, um Hauptmängel desselben von vornherein hintan zu halten.

Das Princip des oben angedeuteten Verfahrens soll im Nachfolgenden wiedergegeben werden.

Denken wir uns die beiden Diagonalen *I IV* und *II III* durch zwei gleich lange Stäbe aus irgend einem Materiale — z. B. aus Holz — repräsentirt. Der eine davon — *I IV* — geht stets durch den Punkt *M* und wird von demselben in allen Lagen im Verhältnisse von 1:3 geteilt. Die Endpunkte *I* und *IV* beschreiben mithin, während sich der Stab um einen in *M* senkrecht zur Zeichenfläche befestigten Stift dreht, die beiden concentrischen Kreise beziehungsweise K und K_1.

Der zweite Stab *II III* hat mit dem ersten stets einen Punkt *O* der Peripherie des Kreises *K* gemeinschaftlich. Da in diesem Punkte beide Stäbe halbirt erscheinen, so können sie in diesem gemeinschaftlichen Mittelpunkte durch einen zur Zeichenfläche senkrechten Stift beweglich verbunden werden.

Das untere Ende dieses Stiftes wird — über die Zeichenfläche gleitend — mit dem Punkte *I* gleichzeitig die Peripherie des Kreises *K* beschreiben.

Der zweite Stab *II III* geht überdies immer durch den Ursprung *U*, wird aber von demselben nicht in einem gleichbleibenden Verhältnisse geteilt. Im Gegenteile, bei fortgesetzter Drehung der Diagonale *I IV* um den Punkt *M* rückt der Punkt *O* auf der Peripherie des Kreises *K* immer mehr nach rechts (beziehungsweise links), die Endpunkte *II* und *III* beschreiben Teile der Herzlinie, und der Stab *II III* dreht sich dabei um den Punkt *U*. Gleichzeitig mit dieser Drehung erfolgt aber auch ein stetiges Annähern (beziehungsweise Entfernen) des Punktes *II* an den Ursprung *U*.

Diese doppelte Bewegung könnte auf folgende Weise geregelt werden.

(Fig. 2). Im Punkte *U* befestige man einen zur Zeichenfläche senkrechten Stift und bringe in seinem oberen Teile einen um ihn leicht drehbaren Ring *R* an, dessen mittlere Durchschnittsebene die Mittellinie des Stiftes in sich enthält.

Der Ring dient zur Aufnahme des Stabes *II III*, und zwar in der Hälfte *II O*.

Aber auch dadurch, dass die untere Fläche eben bezeichneten Stabes, entlang seiner Mittellinie, von *II* bis *O* mit einer mehr oder weniger tiefen Rinne versehen wird, die das obere, glatt abgerundete Ende des in *U* fixirten Stiftes aufzunehmen die Bestimmung hat, würde ein Gleiten dieses Stabes über den Ursprung *U* hin bei gleichzeitiger Drehung desselben um diesen Punkt *U* ermöglicht.

Dabei entfällt der oben erwähnte Ring R und mit ihm ein mehr oder weniger grosses Bewegungshinderniss für den Stab $I\ IV$, was besonders für jene Lage der beiden Diagonalen gilt, in welcher der Punkt O mit dem Ursprunge zusammengefallen ist.

Es bleibt jetzt nur noch Einiges über den Vorgang bei der Beschreibung der Herzlinie durch eben geschildertes Instrument zu erwähnen übrig. Das geschieht am einfachsten, indem wir mehrere auf einander folgende Positionen desselben, die besondere Aufmerksamkeit verdienen, betrachten.

Nur in den zur Position II gehörigen Figuren 2 und 4 erscheinen die Stäbe gezeichnet, für alle übrigen sind dieselben nur durch gerade, stärker ausgezogene Linien angedeutet.

(Fig. 3). Position I: die Anfangsstellung der beiden Stäbe; der Punkt O fällt mit dem Ursprunge zusammen, der Stab $I\ IV$ mit der Polarachse, und der zweite steht auf ihm senkrecht. II und III sind Punkte der Kardioide und zwar die Punkte P_3 und P_4 (Fig. 1). — Für diese und die Position IV ist der in Fig. 2 und Fig. 4 ersichtlich gemachte Ausschnitt mn angebracht.

Nun lassen wir den Punkt O durch Drehung des Stabes $I\ IV$ um den festen Punkt M auf der Peripherie des Kreises K nach rechts aufwärts fortrücken und gelangen in die Position II, in welcher die Stäbe einen spitzen Winkel einschliessen. (Fig. 4).

Von hier aus rückt O weiter auf K nach rechts, der von den Stäben eingeschlossene Winkel wird immer kleiner und endlich gleich Null in der

Position III (Fig. 5), wenn O mit U_1 zusammengefallen ist. Die beiden Stäbe liegen genau übereinander, der Punkt II ist mit U, III mit P_7 zusammengefallen.

Die Drehung des Stabes $I\ IV$ fortgesetzt, geht O auf die untere Hälfte der Kreislinie K über und gelangt endlich nach einer Gesammtdrehung von 360^0 wieder nach U, womit die letzte, die

Position IV (Fig. 6) erreicht ist. Dieselbe unterscheidet sich von Position I dadurch, dass die Endpunkte des Stabes $II\ III$ ihre Plätze gewechselt haben.

Damit ist aber auch die ganze Kardioide beschrieben, u. z. der Teil $P_3P_7P_4$ von P_3 aus durch den Endpunkt III, — der übrige Teil P_4UP_3 von P_4 aus gleichzeitig durch den Endpunkt II.

Der Punkt IV hat dabei die Kreislinie K_1, die Punkte O und I haben gleichzeitig die Kreislinie K beschrieben.

Bei näherer Betrachtung der Lageuverhältnisse in Position III gelangt man schliesslich noch zu einigen Bemerkungen.

Der Stab *II III* wird zweckmässig über dem Stabe *I IV* angebracht werden müssen, damit der im Punkte *M* normal zur Zeichenfläche fixirte Stift ein Weiterbewegen dieses erstgenannten Stabes nicht verhindere. Ferner müsste *I IV* entweder etwas kürzer als *II III* oder vielleicht mit mehr oder weniger langen, zurückstellbaren Endteilen versehen sein; denn unter der Annahme, dass die Endpunkte der Stäbe mit Zeichenstiften versehen sind — siehe Fig. 2 — würden sich diese Stifte beim Passiren der Position III gegenseitig im Wege stehen.

In Fig. 5 sind diese zurückstellbaren Endteile durch die unter den Winkeln α und β gegen die gemeinschaftliche Richtung der beiden Stäbe, UP_7, geneigten Strecken xI, yIV angedeutet.

Zum Schlusse sei nochmals die Bemerkung wiederholt, dass im Vorausgegangenen nur das Princip des Verfahrens zur mechanischen Construction der Kardioide gegeben sein soll, während die bezüglich der Herstellung eines dazu passenden Instrumentes eingestreuten Bemerkungen keineswegs als unbedingt zweckentsprechend zu betrachten seien.

XIV.

Ein Beitrag zum Rationalmachen einer Summe von 2^qten Wurzeln.

Von

Herrn **Stanislaus Rychlicki**

aus Schneidemühl.

Man ist in Bezug auf das vorliegende Problem, eine Summe von n Wurzelgrössen, deren Wurzelexponent die Form 2^q hat, rational zu machen, fast allgemein der Ansicht, dass höchstens die Summe von 4 Quadratwurzeln [1]) rational gemacht werden kann.

Bei höheren Wurzelexponenten müsste demnach die Anzahl der Summanden noch erheblich reducirt werden, um das Rationalmachen ausführen zu können. Diese, wie sich im Laufe dieser Arbeit zeigen wird, durchweg irrtümliche Meinung beruht darauf, dass sich beim Rationalmachen eines Ausdruckes von 5 Quadratwurzeln:

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}+\sqrt{e}=0$$

die Anzahl der Wurzeln durch das wiederholte Quadriren nicht nur nicht mindert, sondern sogar vergrössert. Denn schreibt man die vorstehende Function der Grössen a. b, c, d, e in der für das Rationalmachen geeignetsten Form:

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=-(\sqrt{d}+\sqrt{e})$$

---

1) Ich werde im Laufe der Arbeit oft „Quadratwurzel" statt „Wurzelgrösse mit dem Exponenten 2" schreiben.

und quadrirt dieselbe, so erhält man 4 Wurzelgrössen und einen rationalen Term, d. h. zusammen fünf Glieder. Schafft man nun die vier Wurzelgrössen auf die eine, den rationalen Term dagegen auf die andere Seite und quadrirt, so erhält man sieben Glieder, d. h. sechs neue Wurzelgrössen und einen rationalen Term, d. h. die Zahl der auftretenden Wurzelgrössen wird immer grösser. Der erste meines Wissens', der zwar sich nicht direct darüber ausgesprochen hat, ob ein Ausdruck von der Form:

$$\sqrt[2q]{a}+\sqrt[2q]{b}+\sqrt[2q]{c}+\ldots=\sum_{1}^{n}\sqrt[2q]{a_i}=0$$

rational gemacht werden kann, doch einen ebenso eigenen, wie eigentümlichen Weg hierfür angegeben hat, war Schlömilch in seiner algebraischen Analysis p. 412. et seq. Seine Methode beruht auf den Eigenschaften der n verschiedenen Wurzeln von $\sqrt[n]{1}$. Da dieselbe wohl nicht allgemein genug bekannt ist, so werde ich mich derselben zur Prüfung der Resultate bei drei verschiedenen Fällen bedienen.

§ 1.

Es sei vorgelegt:

$$\text{I.}\quad \sqrt{a}+\sqrt{b}=0,$$

so erhalten wir, wenn wir eine Wurzelgrösse auf die andere Seite transponiren und quadriren, die Gleichung:

$$a=b \quad \text{oder} \quad a-b=0.$$

Dasselbe Resultat liefert uns:

$$\text{II.}\quad \sqrt{a}-\sqrt{b}=0,$$

mithin muss auch das Product beider zum Ziele führen. Bilden wir nun dieses Product, so folgt:

$$\text{I. II.} = (\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}) = a-b = 0,$$

d. h. dasselbe Resultat wie oben. Dieses ± 1, wodurch sich die Wurzelgrösse $\sqrt{b}$ in I. und II. unterscheidet, sind gerade die Wurzeln von $\sqrt{1}$, worauf eben die Methode von Schlömilch beruht.

Wir haben also folgenden Satz: Macht man die a l g e b r a i s c h e Summe von zwei Quadratwurzeln rational, so erhält man als Resultat eine Function ersten Grades in den Radicanden.

§ 2.

Ist jetzt die Summe von drei Wurzelgrössen gegeben:

$$\text{III.} \quad \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=0$$

und substituiren wir in III. $\sqrt{b}+\sqrt{c}=\sqrt{b_1}$, so geht der Ausdruck über in:

$$\sqrt{a}+\sqrt{b_1}=0,$$

welcher nach § 1. rational gemacht,

$$a-b_1=0$$

liefert; hieraus ist wegen der vorstehenden Substitution:

$$a=b_1=(\sqrt{b}+\sqrt{c})^2=b+c+2\sqrt{bc},$$

mithin:

$$\sqrt{bc}=\tfrac{1}{2}f_1$$

und

$$(3) \quad bc=\tfrac{1}{4}f_1^2,$$

wenn

$$f_1=a-b-c$$

gesetzt wird.

Für $c=0$ erhalten wir:

$$0=(a-b)^2, \quad \text{d. h.} \quad 0=a-b,$$

also die Bestätigung des § 1.

Um sich dagegen zu überzeugen, dass (3) das gesuchte Resultat ist, substituiren $a=b$, dann geht III. über in:

$$2\sqrt{a}=-\sqrt{c} \quad \text{oder} \quad 4a=c$$

und (3) in:

$$ac=\tfrac{1}{4}c^2$$

d. h. beide Resultate sind identisch.

Die letzten Resultate brauchen aber nicht identisch zu sein, es genügt nämlich vollständig, wenn gezeigt wird, dass die Wurzeln des einen den anderen befriedigen, d. h. dass beide einen gemeinschaftlichen Teiler haben.

Da nun im Resultat $\sqrt{b_1}$ im Quadrate vorkommt, so könnte auch ursprünglich $-(\sqrt{b}+\sqrt{c})=\sqrt{b_1}$ gegeben worden sein, d. h. es könnten in III. zwei Wurzelgrössen negativ sein und der Ausdruck würde doch dasselbe Resultat liefern. Es kann aber auch nur eine Wurzel negativ sein ohne das Resultat zu stören, denn durch Multiplication mit -1 erhalten wir den so eben besprochenen Fall.

Hieraus folgt unmittelbar, dass das Resultat immer dasselbe bleibt, welches Vorzeichen auch immer die Wurzeln haben. Ausser

$$\text{III.} \quad \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=0$$

genügt also auch:

$$\text{III}'. \quad \sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c}=0$$
$$\text{III}''. \quad \sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}=0$$
$$\text{III}'''. \quad -\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=0,$$

mithin auch das Product:

$$\text{III. III}'. \text{ III}''. \text{ III}'''. = 0.$$

Bildet man dasselbe, so folgt:

$$0=(\sqrt{a}+\sqrt{c}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})(\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a})(\sqrt{b}+\sqrt{a}+\sqrt{c})$$
$$0=(a-[\sqrt{c}-\sqrt{b}]^2)([\sqrt{b}+\sqrt{c}]^2-a)$$
$$0=(a-c-b+2\sqrt{bc})(b+c-a+2\sqrt{bc})$$

oder:

$$0=4bc-(b+c-a)^2,$$

oder:

$$0=4bc-(a-b-c)^2,$$

mithin dasselbe Resultat wie oben.

Dieses Resultat können wir noch durch eine andere Methode erlangen. Quadriren wir nämlich III., so folgt:

$$a+b+c+2(\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc})=0,$$

oder da aus III.

$$\sqrt{b}+\sqrt{c}=-\sqrt{a} \quad \text{ist,}$$
$$a+b+c+2(\sqrt{a}(\sqrt{b}+\sqrt{c})+\sqrt{bc})=0$$
$$a+b+c+2(-a+\sqrt{bc})=0,$$

mithin:

$$\sqrt{bc}=\tfrac{1}{2}f_1 \quad \text{oder} \quad bc=\tfrac{1}{4}f_1^2.$$

Dieses Resultat erhielten wir, indem wir die schon gegebene Gleichung noch einmal als Substitution benutzten; es könnte also scheinen, dass das so erlangte Resultat eine Identität ist, was ja in jedem anderen Falle bewiesen werden muss. Hier ist dieser Beweis unnötig, weil das Gegenteil einleuchtend ist.

Wir erwähnen noch, dass die Function (3) in folgenden 3 Doppel-Formen geschrieben werden kann:

$$0 = 4ac - (\pm b \mp a \mp c)^2$$
$$0 = 4bc - (\pm a \mp b \mp c)^2$$
$$0 = 4ab - (\pm c \mp b \mp a)^2$$

weil sie identisch sind mit:

$$0 = 2(ab + bc + ca) - (a^2 + b^2 + c^2).$$

Aus den bisherigen Betrachtungen folgt der Satz:

> Macht man die algebraische Summe von drei Wurzelgrössen rational, so erhält man als Resultat eine homogene Function zweiten Grades in den Radicanden, die also nur die Quadrate und die Producte zu je zweien derselben enthält.

§ 3.

Es soll nun die Summe von vier Wurzelgrössen rational gemacht werden. Es sei also vorgelegt:

$$\text{IV.} \quad \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d} = 0.$$

Setzen wir hier $\sqrt{c} + \sqrt{d} = \sqrt{c_1}$ und substituiren diesen Wert in IV., so geht dies über in:

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c_1} = 0,$$

was nach § 2. rational gemacht:

$$0 = 4ab - (c_1 - a - b)^2$$

liefert. Mithin ist:

$$2\sqrt{ab} = c_1 - a - b = c + d - a - b + 2\sqrt{cd}$$

oder:

$$\sqrt{ab} - \sqrt{cd} - \tfrac{1}{2}(c + d - b - a) = 0.$$

Diese Functionen können wir als eine Summe von drei Wurzelgrössen betrachten, die also nach dem vorhergehenden § rational gemacht in folgende Function übergeht:

$$0 = 4abcd - \{\tfrac{1}{4}(c + d - b - a)^2 - ab - cd\}^2$$

oder:

$$0 = 64abcd - \{(c + d - b - a)^2 - 4(ab + cd)\}^2.$$

Für $d = 0$ erhalten wir:

$$0 = -\{(c - b - a)^2 - 4ab\}^2$$

oder:

$$0 = 4ab - (c - b - a)^2,$$

also wie in § 2.

Schon aus der Substitution $\sqrt{c_1} = \sqrt{c} + \sqrt{d}$ ergibt sich, dass Analoges hier über die Vorzeichen gilt, was in § 1. und 2. darüber ausgesagt wurde. Ausser IV. befriedigen also unser Resultat

$$\begin{array}{ll} \text{IV}'. & -\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}=0 \\ \text{IV}''. & \sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}=0 \\ \text{IV}'''. & \sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}+\sqrt{d}=0 \\ \text{IV}''''. & \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a}=0. \end{array}$$

Bilden wir analog wie oben das Product dieser 4 Functionen, so ergibt sich:

$$0=(\sqrt{c}+\sqrt{d}+\sqrt{b}-\sqrt{a})(\sqrt{c}+\sqrt{d}-\sqrt{b}+\sqrt{a})(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}+\sqrt{d})$$
$$(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{d})$$

$$0=\{(\sqrt{c}+\sqrt{d})^2-(\sqrt{b}-\sqrt{a})^2\}.\{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(\sqrt{d}-\sqrt{c})^2\}$$

$$0=\{c+d-b-a+2(\sqrt{cd}+\sqrt{ab})\}.\{a+b-c-d+2(\sqrt{cd}+\sqrt{ab})\}$$

$$=4(cd+ab+2\sqrt{abcd})-(c+d-b-a)^2.$$

Hieraus ist:

$$8\sqrt{abcd} = (c+d-a-b)^2-4(cd+ab),$$

mithin:

$$64abcd = \{(c+d-a-b)^2-4(cd+ab)\}^2$$

d. h. wie oben.

Analoges Resultat erhalten wir mit Hilfe unserer zweiten Methode. Aus IV. folgt nämlich:

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} = -\sqrt{d};$$

dies quadrirt gibt:

$$a+b+c+2(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}) = d,$$

oder:

$$\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac} = \tfrac{1}{2}f_1,$$

wenn

$$f_1 = d-a-b-c$$

gesetzt wird. Erhebt man die letzte Gleichung in's Quadrat, so ergibt sich:

$$ab+bc+ca+2(\sqrt{ab^2c}+\sqrt{a^2bc}+\sqrt{abc^2}) = \tfrac{1}{4}f_1^2,$$

woraus:

$$\sqrt{abc}\{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\} = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{4}f_1^2-f_2),$$

wenn

$$f_2 = ab+bc+ca$$

ist. Nun ist aus IV.:

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} = -\sqrt{d}.$$

Substituiren wir diesen Wert hinein, so erhalten wir:

$$-\sqrt{abcd} = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{4}f_1^2 - f_2),$$

mithin:

$$abcd = \tfrac{1}{4}\{\tfrac{1}{4}f_1^2 - f_2\}^2$$

oder:

$$(4) \quad 64\,abcd = \{(d-a-b-c)^2 - 4(ab+bc+ca)\}^2,$$

ein Resultat, welches identisch ist mit dem ersten. Auch hier haben wir eine schon vorgelegte Gleichung zur Elimination von Wurzeln benutzt, es könnte somit erscheinen, dass das Resultat (4) eine Identität wird. Es ist aber nicht, weil es nur eine Umformung des ersten Resultats ist. Doch wir können leicht auch das Gegenteil beweisen. Würde die Function (4) eine Identität, dann müssten sich alle Glieder zerstören, welche Werte auch immer die Grössen a, b, c, d annehmen. Setzen wir also $a = b = c = 0$, so müsste $0 = d^4$ sein, was unmöglich.

Wir wollen noch beweisen, das (4) wirklich das gesuchte Resultat ist. Der Einfachheit wegen setzen wir $a = b = c$, dann geht IV. über in:

$$3\sqrt{a} = -\sqrt{d}, \quad \text{d. h.} \quad 9a = d.$$

Das rationale Resultat dagegen wird:

$$64a^3d - \{(d-3a)^2 - 4.3a^2\}^2 = 0$$

oder:

$$64a^3d - \{d^2 - 6ad - 3a^2\}^2 = 0$$

d. h.

$$d^4 - 12ad^3 + 30a^2d^2 - 28a^3d + 9a^4 = 0 = (9a-d)\{a^3 - 3a^2d + 3ad^2 - d^3\}.$$

Beide Resultate haben also einen gemeinschaftlichen Teiler vom ersten Grade, d. h. eine Wurzel gemeinschaftlich. Das eine Resultat befriedigt demnach das andere, mithin ist es das verlangte.

Wir können dieses Resultat in folgenden 7 Doppelformen schreiben:

$$0 = 64abcd - \{(\pm c \pm d \mp a \mp b)^2 - 4(cd+ab)\}^2$$
$$0 = 64abcd - \{(\pm c \pm b \mp a \mp d)^2 - 4(bc+ad)\}^2$$
$$0 = 64abcd - \{(\pm c \pm a \mp b \mp d)^2 - 4(ac+bd)\}^2$$
$$0 = 64abcd - \{(\pm d \mp a \mp b \mp c)^2 - 4(ab+bc+ca)\}^2$$
$$0 = 64abcd - \{(\pm c \mp a \mp b \mp d)^2 - 4(ab+bd+da)\}^2$$
$$0 = 64abcd - \{(\pm b \mp a \mp c \mp d)^2 - 4(ac+cd+da)\}^2$$
$$0 = 64abcd - \{(\pm a \mp b \mp c \mp d)^2 - 4(bc+bd+dc)\}^2,$$

weil ja alle diese Formen identisch sind mit:

$$0 = 64abcd - \{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2(ab + bc + ca + ad + db + dc)\}^2$$

oder **ausgeschrieben:**

$$\begin{aligned}0 = a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 6(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + a^2d^2 + d^2b^2 + d^2c^2)\\ -4(a^3c + a^3b + a^3d + b^3a + b^3c + b^3d + c^3a + c^3b + c^3d\\ + d^3a + d^3b + d^3c)\\ + 4(a^2bc + a^2bd + a^2cd + b^2ac + b^2ad + b^2cd + c^2ab + c^2ad + c^2db\\ + d^2ab + d^2ac + d^2cb - 40abcd.\end{aligned}$$

Hieraus schliessen wir folgenden Satz:

> Macht man die algebraische Summe von 4 Wurzelgrössen rational, so erhält man als Resultat eine homogene Function 4ten Grades in den Radicanden.

§ 4.

Wir schreiten nun an die Summe von 5 Wurzelgrössen:

$$\text{V.} \quad \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d} + \sqrt{e} = 0.$$

Substituiren wir $\sqrt{d} + \sqrt{e} = \sqrt{d_1}$, so erhalten wir eine Summe von 4 Wurzeln, die nach § 3. rational gemacht folgenden Wert liefert:

$$0 = 64abcd_1 - \{(c + d_1 - a - b)^2 - 4(ab + cd_1)\}^2.$$

Ersetzen wir darin d_1 durch seinen Wert, so folgt:

$$\begin{aligned}0 = 64abe(d + e + 2\sqrt{de})\\ -\{(c + d + e + 2\sqrt{de} - a - b)^2 - 4(ab + c[e + d + 2\sqrt{de}]\}^2\\ = 64abc(d + e + 2\sqrt{de})\\ -\{4\sqrt{de}[c + d + e - a - b - 2c]\\ + (c + d + e - a - b)^2 + 4[de - ab - cd - ce]\}^2.\end{aligned}$$

Oder:

$$\begin{aligned}0 = 64abc(d + e - 2\sqrt{de})\\ -\{16de[d + e - a - b - c]^2\\ + [(c + d + e - a - b)^2 + 4(de - ab - cd - ce]^2\\ + 8\sqrt{de}[d + e - a - b - c][(c + d + e - a - b)^2 + 4(de - ab - cd - de)]\}\end{aligned}$$

Mithin:

$$\begin{aligned}8\sqrt{de}\{[d + e - a - b - c][(c + d + e - a - b)^2 + 4(de - ab - cd - ce)] - 16abc\}\\ = -\{16de[d + e - a - b - c]^2 + [(c + d + e - a - b)^2 + 4(de - ab - cd - ce)]^2\\ - 64abc(d + e)\};\end{aligned}$$

folglich erhält man durch Quadriren:

$$64de\{[d+e-a-b-c][(c+d+e-a-b)^2+4(de-ab-cd-ce]-16abc\}^2$$
$$=\{16de[d+e-a-b-c]^2+[(c+d+e-a-b)^2+4(de-ab-ce)]$$
$$-64abc(d+e)\}^2$$

als Resultat des Rationalmachens von V.

Setzt man hier $e=0$, so ergibt sich:

$$0=\{(c+d-b-a)^2-4(ab+cd)\}^2-64abcd$$

also dasselbe Resultat wie im § 3. und zugleich eine Prüfung des Ausdruckes auf die Richtigkeit, welches die Radicanden im 8. Grade enthält.

Dasselbe Resultat nur in anderer Form erhalten wir durch unsere zweite Methode. Aus V. folgt nämlich:

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}=-\sqrt{e}.$$

Quadrirt man diese Gleichung und transponirt dann die rationalen Glieder, so erhält man:

$$\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}+\sqrt{ad}+\sqrt{bd}+\sqrt{cd}=\tfrac{1}{2}f_1,$$

wo

$$f_1=e-a-b-c-d$$

ist. Verfährt man mit dieser Gleichung analog, so folgt:

$$a(\sqrt{bc}+\sqrt{bd}+\sqrt{cd})$$
$$+b(\sqrt{ac}+\sqrt{ad}+\sqrt{dc})$$
$$+c\sqrt{ab}+\sqrt{ad}+\sqrt{bd})$$
$$+d(\sqrt{ac}+\sqrt{ab}+\sqrt{bc})+3\sqrt{abcd}=\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{4}f_1^2-f_2),$$

wenn

$$f_2=ab+bc+cd+da+ac+bd$$

gesetzt wird.

Macht man nun dieselbe Operation an der vorliegenden Gleichung, so erhält man, nachdem die Glieder zusammengezogen werden:

$$A+6abcd+2\sqrt{abcd}[ab+bc+cd+da+ac+bd]=\tfrac{1}{2}\{\tfrac{1}{4}(\tfrac{1}{4}f_1^2-f_2)^2-f_4\}$$

wo

$$f_4=a^2(bc+bd+cd)+b^2(ad+ac+dc)+c^2(bd+ad+ab)$$
$$+d^2(ac+ab+bc)+9abcd$$

und

$$A = \begin{cases} \sqrt{cd}[a^2b + 5abd + 5abc + b^2a + acd + cbd] \\ + \sqrt{bd}[a^2c + 5abc + 5acd + c^2a + abd + bdc] \\ + \sqrt{ad}[b^2c + 5abc + 5bcd + c^2b + abd + acd] \\ + \sqrt{ac}[b^2d + 5abd + 5bcd + d^2b + abc + acd] \\ + \sqrt{ab}[c^2d + 5acd + 5bcd + cd^2 + abd + abc] \\ + \sqrt{bc}[a^2d + 5acd + 5abd + d^2a + abc + bcd] \end{cases}$$

Analog wie bei § 2. und § 3. handelt es sich auch hier darum, die linke Seite der vorstehenden Gleichung so zusammenzuziehen, dass sie nur eine Wurzelgrösse enthält, und zwar $\sqrt{abcd}$, weil diese sich schon dort befindet.

Das System A lässt sich nun zerlegen in:

$$A = B + (abc + acd + abd + cbd)$$
$$\times (\sqrt{cd} + \sqrt{bd} + \sqrt{ad} + \sqrt{ac} + \sqrt{ab} + \sqrt{bc}),$$

wo

$$B = \begin{cases} ab\sqrt{cd}(a + 4c + 4d + b) + ac\sqrt{bd}(a + 4b + 4d + c) \\ + bc\sqrt{ad}(4a + b + c + 4d) + bd\sqrt{ac}(4a + b + 4c + d) \\ + dc\sqrt{ab}(4a + 4b + c + d) + da\sqrt{bc}(a + 4b + 4c + d). \end{cases}$$

Das System B dagegen lässt sich zerlegen in:

$$B = \sqrt{abcd}[a+b+c+d][\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{cd}+\sqrt{da}+\sqrt{bd}+\sqrt{ac}] + C$$

und

$$C = 3\sqrt{abcd}\,(a[\sqrt{bc} + \sqrt{bd} + \sqrt{cd}] + b[\sqrt{ad} + \sqrt{ac} + \sqrt{cd}]$$
$$+ c[\sqrt{bd} + \sqrt{ad} + \sqrt{ba}] + d[\sqrt{ac} + \sqrt{ab} + \sqrt{bc}]).$$

Demnach wird:

$$A = f_3(\sqrt{cd} + \sqrt{bd} + \sqrt{ad} + \sqrt{ac} + \sqrt{ab} + \sqrt{bc})$$
$$+ \sqrt{abcd}[a + b + c + d][\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{cd} + \sqrt{da} + \sqrt{bd} + \sqrt{ac}]$$
$$+ 3\sqrt{abcd}\{a[\sqrt{bc} + \sqrt{bd} + \sqrt{cd}] + 6[\sqrt{ad} + \sqrt{ac} + \sqrt{cd}]$$
$$+ c[\sqrt{bd} + \sqrt{ad} + \sqrt{ba}] + d[\sqrt{ac} + \sqrt{ab} + \sqrt{bc}]\}$$
$$= \tfrac{1}{2} f_3 \cdot f_1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{abcd}[a + b + c + d] \cdot f_1 + \tfrac{3}{2}\sqrt{abcd}(\tfrac{1}{2} f_1^2 - f_2) - 9abcd,$$

indem wir statt der verschiedenen Summen der Wurzeln die soeben berechneten Werte eingesetzt und

$$f_3 = abc + abd + acd + cbd$$

gesetzt haben. Mit Hilfe dieser Transformation geht unser bisheriges Resultat über in:

$$\tfrac{1}{2}f_3 . f_1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{abcd}.(a+b+c+d)f_1 + \tfrac{3}{2}\sqrt{abcd}(\tfrac{1}{2}f_1{}^2 - f_2)$$
$$-3abcd + 2\sqrt{abcd}.f_2 = \tfrac{1}{2}\{\tfrac{1}{4}(\tfrac{1}{2}f_1{}^2 - f_2)^2 - f_4\}.$$

Zieht man die Glieder zusammen, so folgt:

$$\sqrt{abcd}\{\tfrac{1}{2}f_1(a+b+c+d) + \tfrac{3}{2}(\tfrac{1}{2}f_1{}^2 - f_2) + 2f_2\}$$
$$= \tfrac{1}{2}[\tfrac{1}{4}(\tfrac{1}{2}f_1{}^2 - f_2)^2 - f_4] - \tfrac{1}{2}f_3 . f_1 + 3abcd,$$

mithin resultirt durch Quadriren:

$$abcd\{\tfrac{1}{2}f_1(a+b+c+d) + \tfrac{3}{2}(\tfrac{1}{2}f_1{}^2 - f_2) + 2f_2\}^2$$
$$= \tfrac{1}{4}\{\tfrac{1}{4}[\tfrac{1}{2}f_1{}^2 - f_2]^2 - f_4 - f_3 . f_1 + 6abcd\}^2,$$

ein rationaler Ausdruck vom achten Grade.

Dies einfache Resultat erhielten wir, indem wir zunächst 3 mal hinter einander quadrirten, dann zur Elimination der auftretenden Summen von Wurzelgrössen die in derselben Rechnung vermittelten Werte anwandten und dann zum vierten Male in's Quadrat erhoben. Es könnte also leicht scheinen, dass das letzte Resultat eine vollkommen identische Relation ist, in der sich ohne weiteres alle Glieder zerstören. Wir beweisen, dass dieser Ausdruck keine Identität in diesem Sinne ist. Denn identisch sind so zu sagen alle diese Resultate, die wir bis jetzt ermittelten, aber nur für solche Werte von a, b, ..., die den Gleichungen I., II., III., ... genügen. Für andere Werte sind sie es nicht! Sollte also das letzte Resultat eine Identität sein, so müssten sich die Glieder zerstören für jede noch so beliebige Werte von a, b, c, ..., also auch für $a = b = c = d = e$. Substituiren wir diese Werte in unser Resultat, so wird, wenn wir zunächst die Grösse e nicht $= a$ setzen, $f_1 = e - 4a$, $f_2 = 6a^2$, $f_3 = 4a^3$, $f_4 = 21a^4$, und unser Resultat wird demnach:

$$a^2\{\tfrac{1}{2}(e-4a).4a + \tfrac{3}{2}[\tfrac{1}{2}(e-4a)^2 - 6a^2] + 12a^2\}$$
$$= \tfrac{1}{2}[\tfrac{1}{4}\{\tfrac{1}{2}(e-4a)^2 - 6a^2\}^2 - 21a^4] - \tfrac{1}{2}a^3(a-4a) + 3a^4$$

Setzen wir noch $e = a$, so müsste

$$a^4\left\{-6 - \frac{45}{3} + 12\right\} = a^4 . \frac{1}{2}\left\{\frac{15^2}{16} - 21 + 12 + 6\right\}$$

d. h. es müsste

$$\tfrac{9}{8} = \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{16}.277 \quad \text{oder} \quad 12 = 277$$

sein, was nicht möglich.

Es bleibt uns noch zu beweisen, dass dieser Ausdruck auch die verlangte Eigenschaft besitzt. Wir beweisen dies dadurch, dass wir zeigen, die Gleichung V. habe mit unserem Resultat eine Wurzel gemeinschaftlich.

Der Einfachheit setzen wir $a = b = c = d$, $e = e$, dann erhalten wir aus V.:

$$16a = e,$$

das Resultat dagegen geht gerade in die vorstehende Gleichung über.

Setzen wir darin $e = 16a$, so erhalten wir:

$$a^4\{2.12 + \tfrac{3}{2}(\tfrac{1}{4}.12^2 - 6) + 12\} = \frac{a^4}{2}[\tfrac{1}{4}(\tfrac{1}{4}.12^2 - 6)^2 - 21] - \tfrac{1}{2}.4.12 + 3$$

oder:

$$a^4\{24 + 45 + 12\} = \frac{a^4}{2}.162 = a^4.81, \quad \text{q. e. d.}$$

Schliesslich müssen wir noch zeigen, dass unser Resultat eine homogene Function der Grössen a, b, ... ist. Zu diesem substituiren wir

$$\begin{aligned} a &= \varrho a_1 \\ b &= \varrho b_1 \\ c &= \varrho c_1 \\ d &= \varrho d_1 \\ e &= \varrho e_1, \end{aligned}$$

dann lässt sich auf beiden Seiten der Factor ϱ^8 herausziehen, woraus folgt, dass dies eine homogene Function ist.

Wir haben also folgenden Satz:

> Macht man die algebraische Summe von 5 Quadratwurzeln rational, so erhält man als rationales Resultat eine Function, die homogen ist und die Radicanden im 8ten Grade enthält.

§. 5.

Hiermit wäre nachgewiesen, dass die Summe von 5 Wurzelgrössen rational gemacht werden kann. Dasselbe gilt aber unbedingt von jeder höheren Anzahl von Wurzeln. Denn sind zunächst 6 Wurzelgrössen gegeben, so bringen wir diese Anzahl durch die oben erwähnte Substitution auf 5; das rationale Resultat dieser 5 Wurzelgrössen wird aber nur eine Quadratwurzel enthalten und wird selbst vom 8ten Grade sein. Transponirt man nun diese Quadratwurzel

auf die linke Seite und erhebt in's Quadrat, so erhält man als rationales Resultat eine homogene Function der 6 Radicanden vom 16ten Grade.

Indem wir analog fortfahren, können wir folgenden Satz aussprechen:

Die Summe von n Quadratwurzeln $\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\ldots+\sqrt{a_n}=0$ lässt sich rational machen und liefert als Resultat eine homogene Function der Radicanden $a_1 \ldots a_n$ vom Grade 2^{n-2}. Setzen wir der Einfachheit wegen $m=2^{n-2}$, so wird die ganze Anzahl der Glieder $=\frac{n.(n+1)(n+2)\ldots(n+m-1)}{m!}$ und die Function selbst wird folgende Form haben:

$$0=\Sigma a_i^m+A_1\Sigma a_i^{m-1}a_k+A_2\Sigma A_i^{m-2}a_k^2+\ldots+A_{\frac{m}{2}}\Sigma a_i^{\frac{m}{2}}a_k^{\frac{m}{2}}$$
$$+B_2\Sigma a_i^{m-2}a_k a_l+B_3\Sigma a_i^{m-3}a_k^2 a_l+\ldots+B_{\frac{m}{2}}\Sigma a_i^{\frac{m}{2}}a_k^{\frac{m-2}{2}}a_l$$
$$+C_3\Sigma a_i^{m-3}a_k a_l a_p+\ldots \text{ etc.}$$

D. h. wir erhalten die einzelnen Glieder, indem wir die n Elemente $a_1 a_2 \ldots a_p$ zur $m$ten Classe mit Wiederholungen combiniren; die gleichartigen Glieder werden dann als Summanden zusammen geschrieben und davor ein Coefficient gesetzt, z. B.

$$A_1\Sigma a_i^{m-1}a_k.$$

Die Anzahl der Coefficienten stimmt vollständig überein mit der Anzahl der verschiedenen Coefficienten, die in

$$(a_1+a_2+\ldots a_n)^m=\Sigma a_i^m+m\Sigma a_i^{m-1}a_k+\ldots$$

enthalten ist, wie ja die Gestalt der beiden Functionen zeigt.

Was nun die Bestimmung dieser Coefficienten angeht, so lassen sich die Coefficienten $A_1 \ldots A_{\frac{m}{2}}$ ohne weiteres bestimmen. Setzt man nämlich $a_3=a_4=\ldots=a_n=0$, so bleibt nur eine homogene Function $m$ten Grades in a_1 und a_2. Dies Resultat aber muss übereinstimmen mit dem von $\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}=0$, d. h. mit $a_1-a_2=0$; es ist also gleich der $m$ten Potenz von (a_1-a_2), mithin sind $A_1 \ldots A_m$ die Binominalcoefficienten von $(h_1-a_2)^m$, was ja mit dem früheren übereinstimmt.

Die zweite Reihe in B_i lässt sich bestimmen durch die Substitution $a_4=a_5=\ldots=a_n=0$, das zugehörige Resultat dieser Substitution muss dann übereinstimmen mit

$$\{a_1^2+a_2^2+a_3^2-2(a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1)\}^{\frac{m}{2}},$$

woraus sich dann die Werte der Coefficienten ergeben.

Diese Methode der Bestimmung der Coefficienten ist insofern nicht praktisch, weil durch ähnliche Substitutionen viele Coefficienten verschwinden. Wir können also folgende Methode vorschlagen; substituirt man:

$$a_1 = a_1; \quad a_2 = a_3 = a_4 = \ldots a_n,$$

dann bleiben alle Coefficienten erhalten, und dieser Ausdruck muss identisch sein mit

$$\{a_1-(n-1)^2a_2\}^m = 0.$$

Dann setzen wir

$$a_1 = a_2, \quad a_3 = a_4 = \ldots a_n$$

mithin muss das Resultat übereinstimmen mit:

$$\{4a_1-(n-2)^2a_3\}^m = 0 \quad \text{etc.}$$

Durch diese und ähnliche Substitutionen können wir es soweit bringen, dass die Anzahl der Coefficienten mit der der Gleichungen übereinstimmt, woraus dann die Coefficienten bestimmt werden können.

Haben wir nun:

$$\sqrt[4]{a_1}+\sqrt[4]{a_2}+\sqrt[4]{a_3}+\ldots+\sqrt[4]{a_n} = 0$$

und soll die vorliegende Summe rational gemacht werden, so substituiren wir:

$$\sqrt{a_i} = A_i$$

und erhalten:

$$\Sigma\sqrt{A_i} = 0,$$

welcher Ausdruck rational gemacht, eine homogene Function in A_i vom $m$ten $= 2^{n-2}$ten Grade liefert:

$$\varphi(A_i^m \ldots) = 0.$$

Ersetzen wir darin die A_i durch a_i, so erhalten wir eine Summe von $2m-1$ Quadratwurzeln in Radicanden $m$ten Grades und eine Summe von rationalen Gliedern $\frac{m}{2}$ten Grades, die als eine Quadratwurzel bezeichnet werden kann. Zusammen erhält man $2m$ Quadratwurzeln, deren Radicanden vom $m$ten Grade sind.

Diese Summe: $\sum\limits_{i=1}^{i=2m}\sqrt{B_i}$, wo

$$B_i = \psi(a_i^m \ldots)$$

ist, rational gemacht liefert eine homogene Function:

$$\Psi(B_i^p) = 0,$$

in welcher die Radicanden B_i im $p$ten $= 2^{2(m-1)}$ten Grade erscheinen. Nun sind die B_i selbst in den Grössen a_i vom $m$ten Grade, mithin ist $\Psi = 0$ eine homogene Function der Radicanden vom $m.2^{2(m-1)}$ten Grade.

Hieraus folgt der Satz:

> Die Summe von n Biquadratwurzeln lässt sich rational machen und liefert als Resultat eine homogene Function in den Radicanden vom $m.2^{2(m-1)}$ten Grade, wo $m = 2^{n-2}$ ist.

Durch analoge Substitution lässt sich die Summe

$$\sum_1^n \sqrt[8]{a_i} = 0$$

reduciren auf

$$\sum_1^n \sqrt[4]{A_i} = 0,$$

die nach dem so eben Besprochenen rational gemacht eine homogene Function der A_i bildet. Ersetzen wir darin die A_i durch die a_i, so erhalten wir Glieder, die rational sind, und einen Teil, der mit der Quadratwurzel behaftet erscheint. Diese Summe von Quadratwurzeln wird auf die bekannte Weise rational gemacht und als Resultat folgt eine homogene Function in den Radicanden.

Dies gilt evident für jeden Wurzelexponenten von der Form $2^q = p$. Wir können demnach folgenden allgemeinen Satz aussprechen:

> Die Summe von n Wurzeln von der Form:
>
> $$\sum_1^n \sqrt[p]{a_i} = 0, \quad \text{wo} \quad p = 2^q \quad \text{ist},$$
>
> lässt sich immer (theoretisch) rational machen.

Als Resultat erhält man eine homogene Function in den Radicanden. Der Grad dieser Function hängt ab sowohl von $p = 2^q$, als auch von $n =$ der Anzahl der Summanden. Für $q = 1$ ist dieser Grad

$$m = 2^{n-2}, \quad \text{für} \quad q = 2,$$
$$m' = m.2^{2(m-1)}.$$

Für $q = 3$ wird $p = 8$, und da zwischen $p = 8$ und $p = 4$ die-

selbe Beziehung herrscht wie zwischen $p = 4$ und $p = 2$, so wird für $p = 8$ resp. $q = 3$:

$$m'' = m' . 2^{2(m'-1)},$$

mithin allgemein: für $q = q$ ist

$$m^{(q-1)} = m^{(q-2)} . 2^{2(m^{(q-2)}-1)}.$$

Hiermit ist nachgewiesen, dass sich jede Summe von Wurzelgrössen, deren Wurzelexponent die Form hat: $p = 2^q$, rational machen lässt. Die Form und Anzahl der Glieder der resultirenden Function sind bekannt. Die Coefficienten dagegen müssen für jeden speciellen Fall auf die angedeuteten Arten bestimmt werden.

XV.

Beziehungen zwischen den Periodicitätsmoduln der Abel'schen Integrale.

Von

Norbert Herz.

Herr Königsberger stellt in der fünften Vorlesung seiner „Vorlesungen über die Theorie der hyperelliptischen Integrale" Beziehungen zwischen den Periodicitätsmoduln der allgemeinsten hyperelliptischen Integrale, welche in gegebenen Punkten wie gegebene Functionen unendlich werden sollen, auf. Dieselben Betrachtungen lassen sich auch auf allgemeine Abel'sche Integrale übertragen, wobei aber zu beachten ist, dass im Unendlichkeitspunkte die Fläche aus mehreren Blättern besteht, von denen einige getrennt, andere in Verzweigungspunkten zusammenhängend sein können, so dass man für die Abel'schen Integrale ausser den in der Endlichkeit gegebenen Punkten auch noch, wenn man das allgemeinste Abel'sche Integral behandeln will, die Annahme machen muss, dass im Unendlichkeitspunkte die Function auf einigen Blättern, auf denen sie eindeutig ist, unendlich werden soll und ebenso in einigen von den in der Unendlichkeit liegenden Verzweigungspunkten. Dieser Fall soll nun im Folgenden behandelt werden.

Wenn die gegebene n-blättrige Riemannsche Fläche der durch die Gleichung

$$f(x, y) = 0$$

definirten Function y π Verzweigungspunkte hat, welche resp. m_1-, m_2- ... m_π-blättrig sind, und man bezeichnet die Summe (nach σ genommen)

$$\sum_1^\pi (m_\sigma - 1) = w$$

so ist die Fläche $w-2n+3$-fach zusammenhängend*) und diese Zahl muss stets ungerade sein, also die Anzahl der zu ziehenden Querschnitte eine gerade; sie sei gleich $2p$. Man kann dieselben nun in folgender Weise ziehen:

Eine in sich geschlossene Linie a_1, die einen Flächenteil nicht vollständig begrenzt und die immer gezogen werden kann, da die Fläche mehrfach zusammenhängend ist, bildet den ersten Querschnitt, indem zwei Punkte der Begrenzung (ein Punkt M der Fläche) mit einander verbunden sind. Verbindet man nun zwei gegenüberliegende Punkte dieses Querschnittes durch eine Linie b_1 (und dies ist immer möglich, da a_1 einen Flächenteil nicht vollständig begrenzt), so kann diese als zweiter (zugehöriger) Querschnitt aufgefasst werden. Ist hierdurch die Fläche noch nicht einfach zusammenhängend, so muss sich noch ein zweites System a_2 und b_2 ziehen lassen. Verbindet man nun a_2 und b_1 durch eine Linie c_1, so bilden c_1 und b_2 zusammen einen neuen Querschnitt, da dieser Linienzug von einem Punkte der neuen Grenze (des zweiten Querschnittes) beginnt und bei einem früheren Punkte des dritten endet; b_2 bildet dann den zugehörigen vierten Querschnitt. In dieser Weise fortfahrend kömmt man zu einem letzten Systeme $c_{p-1}\,a_p$ und b_p, denn es muss stets zwei zusammengehörige Querschnitte geben, da die Anzahl aller eine gerade Zahl sein muss.

Sei nun

$$\Pi_1(x, X_\beta, x_\varrho\,\alpha_\varkappa) = \Pi_1(x)$$

ein Abelsches Integral, das in den Punkten

$$X_1X_2 \ldots X_\mu x_1x_2 \ldots x_m \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_\omega$$

unendlich werden soll wie die Functionen

$$A_1\log(x-X_1)+A_{11}(x-X_1)^{-1}+A_{12}(x-X_1)^{-2}+\ldots+A_{1k_1}(x-X_1)^{-k_1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A_\mu\log(x-X_\mu)+A_{\mu1}(x-X_\mu)^{-1}+A_{\mu2}(x-X_\mu)^{-2}+\ldots+A_{\mu k_\mu}(x-X_\mu)^{-k_\mu}$$

$$B_1\log(x-x_1)+B_{11}(x-x_1)^{-1}+B_{12}(x-x_1)^{-2}+\ldots+B_{1l_1}(x-x_1)^{-l_1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$B_m\log(x-x_m)+B_{m1}(x-x_m)^{-1}+B_{m2}(x-x_m)^{-2}+\ldots+B_{ml_m}(x-x_m)^{-l_m}$$

$$a_1\log(x-\alpha_1)^{\frac{1}{\tau_1}}+b_{11}(x-\alpha_1)^{-\frac{1}{\tau_1}}+b_{12}(x-\alpha_1)^{-\frac{2}{\tau_1}}+\ldots+b_{1\eta_1}(x-\alpha_1)^{-\frac{\eta_1}{\tau_1}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_\omega\log(x-\alpha_\omega)^{\frac{1}{\tau_\omega}}+b_{\omega1}(x-\alpha_\omega)^{-\frac{1}{\tau_\omega}}+b_{\omega2}(x-\alpha_\omega)^{-\frac{2}{\tau_\omega}}+\ldots+b_{\omega\eta_\omega}(x-\alpha_\omega)^{-\frac{\eta_\omega}{\tau_\omega}}$$

---

*) S. Neumann „Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale"; Achte Vorlesung.

$\Pi_1(x)$ möge ferner in den Unendlichkeitspunkten $C_1 C_2 \ldots C_\varkappa$ und $D_1 D_2 \ldots D_\lambda$, welche keine Verzweigungspunkte sind, unendlich werden wie die Functionen

$$C_1 \log x + C_{11} x + C_{12} x^2 + \ldots + C_{1c_1} x^{c_1}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$C_\varkappa \log x + C_{\varkappa 1} x + C_{\varkappa 2} x^2 + \ldots + C_{\varkappa c_\varkappa} x^{c_\varkappa}$$

$$D_1 \log x + D_{11} x + D_{12} x^2 + \ldots + D_{1d_1} x^{d_1}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$D_\lambda \log x + D_{\lambda 1} x + D_{\lambda 2} x^2 + \ldots + D_{\lambda d_\lambda} x^{d_\lambda}$$

und ferner in den im Unendlichkeitspunkte liegenden Verzweigungspunkten $E_1 E_2 \ldots E_o$ wie

$$E_1 \log x^{\frac{1}{\vartheta_1}} + E_{11} x^{\frac{1}{\vartheta_1}} + E_{12} x^{\frac{2}{\vartheta_1}} + \ldots + E_{1e_1} x^{\frac{e_1}{\vartheta_1}}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$E_o \log x^{\frac{1}{\vartheta_o}} + E_{o1} x^{\frac{1}{\vartheta_o}} + E_{o2} x^{\frac{2}{\vartheta_o}} + \ldots + E_{oe_o} x^{\frac{e_o}{\vartheta_o}}$$

Es sei ferner ein Integral

$$\Pi_2(x\; X_\beta\; \xi_\sigma\; \alpha_\chi) = \Pi_2(x)$$

gegeben, das in den Punkten

$$X_1 X_2 \ldots X_\mu\; \xi_1 \xi_2 \ldots \xi_n\; \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_\omega$$

unendlich werde wie die Functionen

$$A_1' \log(x - X_1) + A_{11}'(x - X_1)^{-1} + A_{12}'(x - X_1)^{-2} + \ldots + A_{1'k_1'}(x - X_1)^{-k_1'}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A_\mu' \log(x - X_\mu) + A_{\mu 1}'(x - X_\mu)^{-1} + A_{\mu 2}'(x - X_\mu)^{-2} + \ldots + A_{\mu' k_\mu'}(x - X_\mu)^{-k_\mu'}$$

$$B_1' \log(x - \xi_1) + B_{11}'(x - \xi)^{-1} + B_{12}'(x - \xi_1)^{-2} + \ldots + B_{1' l_1'}(x - \xi_1)^{-l_1'}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$B_n' \log(x - \xi_n) + B_{n1}'(x - \xi_n)^{-1} + B_{n2}'(x - \xi_n)^{-2} + \ldots + B_{n' l_n'}(x - \xi_n)^{-l_n'}$$

$$a_1' \log(x - \alpha_1)^{-\frac{1}{\tau_1}} + b_{11}'(x - \alpha_1)^{-\frac{1}{\tau_1}} + b_{12}'(x - \alpha_1)^{-\frac{2}{\tau_1}} + \ldots + b_{1' \eta_1'}(x - \alpha_1)^{-\frac{\eta_1'}{\tau_1}}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_\omega' \log(x - \alpha_\omega)^{\frac{1}{\tau_\omega}} + b_{\omega 1}'(x - \alpha_\omega)^{-\frac{1}{\tau_\omega}} + b_{\omega 2}'(x - \alpha_\omega)^{-\frac{2}{\tau_\omega}} + \ldots + b_{\omega' \eta_\omega'}(x - \alpha_\omega)^{-\frac{\eta_\omega'}{\tau_\omega}}$$

$\Pi_2(x)$ möge ferner in den Unendlichkeitspunkten $C_1 C_2 \ldots C_\varkappa D_1' D_2' \ldots D_\nu'$, welche keine Verzweigungspunkte sind, unendlich werden wie

$$C_1' \log x + C_{11}' x + C_{12}' x^2 + \ldots + C_1'{}_{c_1'} x^{c_1'}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$C_\varkappa' \log x + C_{\varkappa 1}' x + C_{\varkappa 2}' x^2 + \ldots + C_\varkappa'{}_{c_\varkappa'} x^{c_\varkappa'}$$

$$D_1' \log x + D_{11}' x + D_{12}' x^2 + \ldots + D_1'{}_{d_1'} x^{d_1'}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$D_\nu' \log x + D_{\nu 1}' x + D_{\nu 2}' x^2 + \ldots + D_\nu'{}_{d_\nu'} x^{d_\nu'}$$

und ferner in den im Unendlichkeitspunkte liegenden Verzweigungspunkten $E_1 E_2 \ldots E_o$ wie

$$E_1' \log x^{\frac{1}{\vartheta_1}} + E_{11}' x^{\frac{1}{\vartheta_1}} + E_{12}' x^{\frac{2}{\vartheta_1}} + \ldots + E_1'{}_{e_1'} x^{\frac{e_1'}{\vartheta_1}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$E_o' \log x^{\frac{1}{\vartheta_o}} + E_{o1}' x^{\frac{1}{\vartheta_o}} + E_{o2}' x^{\frac{2}{\vartheta_o}} + \ldots + E_o'{}_{e_o'} x^{\frac{e_o'}{\vartheta_o}}$$

Für die Existenz der beiden hier angenommenen Abel'schen Integrale muss aber sein

(1)

$$A_1 + \ldots + A_\mu + B_1 + \ldots + B_m + a_1 + \ldots + a_\omega - C_1 - \ldots - C_\varkappa - D_1 - \ldots - D_\lambda - E_1 - \ldots - E_o = 0$$

$$A_1' + \ldots + A_\mu' + B_1' + \ldots + B_n' + a_1' + \ldots + a_\omega' - C_1' - \ldots - C_\varkappa' - D_1' - \ldots - D_\nu' - E_1' - \ldots - E_o' = 0$$

Denn verbindet man z. B. für das erste Integral alle Unstetigkeitspunkte, nachdem man sie durch kleine Kreise ausgeschlossen hat, mit demselben Punkte eines Querschnittes und integrirt über dieselben, so wird das Integral um jene Unstetigkeitspunkte, die keine Verzweigungspunkte sind, $\Sigma_\varrho 2\pi i (A_\varrho + B_\varrho)$. In einem τ_ϱ-blättrigen Verzweigungspunkte ist die Entwicklung von $\dfrac{d\Pi_1(x)}{dx}$

$$\frac{1}{\tau_\varrho} a_\varrho (x - \alpha_\varrho)^{-1} - \frac{1}{\tau_\varrho} b_{\varrho 1} (x - \alpha_\varrho)^{-\frac{\tau_\varrho + 1}{\tau_\varrho}} - \ldots$$
$$+ \frac{1}{\tau_\varrho} c_{\varrho 1} (x - \alpha_\varrho)^{-\frac{\tau_\varrho - 1}{\tau_\varrho}} + \ldots$$

also das Integral um diesen Punkt zusammengesetzt aus

$$\frac{1}{\tau_\varrho} a_\varrho \int_{(\alpha_\varrho)} (x - \alpha_\varrho)^{-1} dx \quad \text{und} \quad M \int_{(\alpha_\varrho)} (x - \alpha_\varrho)^{\frac{\sigma}{\tau_\varrho}} dx, \quad \sigma \gtrless \tau_\varrho$$

jedes dieser Integrale in einem τ_ϱ-fach um α_ϱ gewundenen Kreise zu nehmen. Durch die Substitution

$$(x-\alpha_\varrho)^{\frac{1}{\tau_\varrho}} = (\xi - \alpha_\varrho') = re^{i\varphi}$$

für welche die Integrale nach φ von 0 bis 2π zu nehmen sind, weil durch diese Substitution der τ_ϱ-blättrige Verzweigungspunkt einblättrig abgebildet wird, und einem τ_ϱ-fachen Umkreisen von α_ϱ ein einfaches Umkreisen von α_ϱ' entspricht, überzeugt man sich, dass alle Integrale bis auf das erste verschwinden und das erste $2\pi i a_\varrho$ ist. Die Summe der Integrale um die Verzweigungspunkte ist also $\Sigma 2\pi i a_\varrho$. Dasselbe gilt für die Unendlichkeitspunkte; da aber ein unendlich kleiner Kreis um den Unendlichkeitspunkt identisch ist mit einem unendlich grossen um den Nullpunkt, und wenn ersterer im positiven Sinne durchlaufen wird, der letztere im negativen Sinne umzogen wird, weil die beiden Kreise die zu entgegengesetzten Seiten der Peripherie liegenden Flächenstücke umschliessen, so wird durch die Substitution $x = re^{i\varphi}$ resp. $x^{\frac{1}{\vartheta_\varrho}} = re^{i\varphi}$ der unendlich kleine Kreis um den Punkt m_ϱ im negativen Sinne durchlaufen, wenn φ von 0 bis 2π wächst, weshalb das Integral um diesen Punkt $-M_\varrho . 2\pi i$ ist, also um die sämmtlichen in der Unendlichkeit liegenden Unstetigkeitspunkte (Σ hier wie weiterhin stets auf ϱ bezogen)

$$-\Sigma 2\pi i (C_\varrho + D_\varrho + E_\varrho)$$

Die Summen der drei hier erhaltenen Ausdrücke

$$\Sigma 2\pi i (A_\varrho + B_\varrho) + \Sigma 2\pi i a_\varrho - \Sigma 2\pi i (C_\varrho + D_\varrho + E_\varrho)$$

giebt das Integral in einer geschlossenen Curve, weil die durch das Ueberschreiten des Querschnittes hinzukommenden Teile wegfallen, da der Querschnitt zweimal und zwar in entgegengesetzter Richtung überschritten wird. Dieses Integral auf einer geschlossenen Curve in der einfach zusammenhängenden Fläche genommen muss aber Null sein, was die erste der Bedingungen (1) giebt.

Betrachten wir nun das Integral

$$\int \Pi_1(x)\, d\Pi_2(x)$$

Für dasselbe sind die sämmtlichen Unstetigkeitspunkte beider Functionen auszuschliessen und mit demselben Punkte A eines Querschnittes zu verbinden. Die Aufeinanderfolge der Verbindungslinien von A mit denselben ist ganz beliebig und soll so gewählt werden, dass (in der Richtung der positiven Integration) erst die sämmtlichen X, dann die ξ, die x, die Verzweigungspunkte und endlich die unendlich entfernten Punkte mit A verbunden sind.

Integrirt man zunächst über die den beiden Functionen gemein-

schaftlichen Unstetigkeitspunkte, so hat man zu beachten, dass in der Umgebung von X_1

$$\Pi_1(x) = A_1 \log(x - X_1) + A_{11}(x - X_1)^{-1} + \ldots + A_{1k_1}(x - X_1)^{-k_1}$$
$$+ m_{10} + m_{11}(x - X_1) + m_{12}(x - X_1)^2 + \ldots$$

$$\frac{d\Pi_2(x)}{dx} = A_1'(x - X_1)^{-1} - A_{11}'(x - X_1)^{-2} - 2A_{12}'(x - X_1)^{-3} - \ldots$$
$$- k_1' A_1'{}_{k_1'}(x - X_1)^{-k_1'-1} + n_{11} + 2n_{12}(x - X_1) + 3n_{13}(x - X_1)^2 + \ldots$$

Das Integral

$$\int\limits_{(x_1)} \Pi_1(x)\, d\Pi_2(x)$$

besteht demnach aus Einzelintegralen von der Form

$$\int\limits_{(X_1)} \log(x - X_1) \,.\, (x - X_1)^\sigma dx, \quad \int\limits_{(X_1)} (x - X_1)^\sigma dx$$

Substituirt man nun $x - X_1 = re^{i\varphi}$, so wird das erste Integral gleich

$$ir^{\sigma+1} \log r \int\limits_0^{2\pi} e^{(\sigma+1)i\varphi}\, d\varphi - r^{\sigma+1} \int\limits_0^{2\pi} e^{(\sigma+1)i\varphi}\, d\varphi$$

Für positive σ und $\sigma = 0$ verschwinden diese Integrale, für negative würden sie unendlich. Treten aber in die Beziehung zwischen den Periodicitätsmoduln solche unendliche Grössen, so wird diese Beziehung nichts aussagen und man muss sich daher auf jene Fälle beschränken, wo dieses nicht eintritt; dann dürfen aber Integrale von der Form $\int \log(x - X_1) \,.\, (x - X_1)^{-\sigma} dx$ nicht vorkommen, d. h. es muss entweder $A_1' = A_{11}' = A_{12}' = \ldots = A_1'{}_{k_1'} = 0$ oder $A_1 = 0$ sein. Im ersten Falle wäre $\Pi_2(x)$ in X_1 gar nicht unendlich, und da dann $\Pi_1(x)$ allein daselbst unendlich würde, so würde X_1 gar nicht in diese Gruppe, sondern in die der x_ϱ gehören. Es muss also $A_1 = 0$, d. h. $\Pi_1(x)$ darf in den Punkten, in denen beide Integrale unendlich werden, nur algebraisch unendlich werden und diese Form von $\Pi_1(x)$ soll fortan beibehalten werden. Dann sind die Integrale der ersten Gruppe 0; die der zweiten sind es für $\sigma \gtrless -1$ auch, und für $\sigma = -1$ ist es $2\pi i$; der Coefficient der (-1)ten Potenz von $\Pi_1(x)\dfrac{d\Pi_2(x)}{dx}$ ist aber

$$A_{11}n_{11} + 2A_{12}n_{12} + \ldots + k_1 A_{1k_1} n_{1k_1} + A_1' m_{10} - A_{11}' m_{11}' - \ldots - k_1' A_1'{}_{k_1'} m_{1k_1'}$$

also das Integral um diesen Punkt

$$2\pi i[A_{11}n_{11}+2A_{12}n_{12}+\ldots+k_1A_{1k_1}n_{1k_1}+A_1'm_{10}-A_{11}'m_{11}'-\ldots -k_1'A_1'{}_{k_1'}m_{1k_1'}]$$

Bei der Umkreisung von X_1 hat sich aber weder $\Pi_1(x)$ geändert [da $A_1=0$ ist] noch $\frac{d\Pi_2(x)}{dx}$, welches daselbst auch nur algebraisch unendlich ist. Zu den beiden Seiten der Verbindungslinie von X_1 mit A sind also die Functionalwerte dieselben, die Integrationsrichtung die entgegengesetzte, also fallen diese Teile des Integrales weg und die Integration um X_2 beginnt mit demselben Werte von $\Pi_1(x)$ und $\frac{d\Pi_2(x)}{dx}$. Für jeden der Punkte X_ϱ entsteht ein solcher Teil, daher ist das Integral $\int \Pi_1(x)\,d\Pi_2(x)$, erstreckt über alle X-Punkte, gleich

$$2\pi i\sum_1^\mu [A_{\varrho 1}n_{\varrho 1}+2A_{\varrho 2}n_{\varrho 2}+\ldots+k_\varrho A_{\varrho k_\varrho}n_{\varrho k_\varrho} +A_\varrho' m_{\varrho 0}-A_{\varrho 1}'m_{\varrho 1}-2A_{\varrho 2}'m_{\varrho 2}-\ldots-k_\varrho' A_\varrho'{}_{k_\varrho'}m_{\varrho k_\varrho'}] \quad (2)$$

wo $m_{\varrho\sigma}n_{\varrho\sigma}$ die Coefficienten von $(x-X_\varrho)^\sigma$ in der Entwicklung von $\Pi_1(x)$ und $\Pi_2(x)$ in der Umgebung von X_ϱ sind. Am Schlusse dieses Teiles der Integration langten $\Pi_1(x)$ und $\frac{d\Pi_2(x)}{dx}$ mit den ursprünglichen Werten in A an, und man kann nun mit diesen die Integration nach den ξ fortsetzen. Die Entwicklung von $\Pi_1(x)$ ist in der Umgebung von ξ_1

$$\Pi_1(x)=p_{10}+p_{11}(x-\xi_1)+p_{12}(x-\xi_1)^2+\ldots$$

und

$$\frac{d\Pi_2(x)}{dx}=B_1'(x-\xi_1)^{-1}-B_{11}'(x-\xi_1)^{-2}-2B_{12}'(x-\xi_1)^{-3}-\ldots -l_1'B_1'{}_{l_1'}(x-\xi_1)^{-l_1'-1}+[x-\xi_1]$$

also das um ξ_1 genommene Integral gleich $2\pi iC$, wenn C der Coefficient der (-1)ten Potenz von $(x-\xi_1)$ im Producte $\Pi_1(x)\frac{d\Pi_2(x)}{dx}$ ist, also

$$2\pi i[B_1'p_{10}-B_{11}'p_{11}-2B_{12}'p_{12}-\ldots-l_1'B_1'{}_{l_1'}p_{1l_1'}]$$

Bei der Umkreisung von ξ_1 haben aber weder das daselbst endlich bleibende Integral $\Pi_1(x)$ noch die algebraisch unendlich werdende Function $\frac{d\Pi_2(x)}{dx}$ ihren Wert geändert, daher zerstören sich die Integrale zu beiden Seiten der Verbindungslinie $A\xi_1$ und man hat mit dem Anfangswerte über ξ_2 weiter zu integriren. Hier wiederholt

sich das Gesagte und dieser Teil der Integration giebt für das Resultat

$$2\pi i \sum_1^n [B_\varrho' p_{\varrho 0} - B_{\varrho 1}' p_{\varrho 1} - 2B_{\varrho 2}' p_{\varrho 2} - \ldots - l_\varrho' B_{\varrho' l_\varrho'} p_{\varrho l_\varrho'}] \quad (3)$$

wo $p_{\varrho\sigma}$ der Coefficient von $(x - \xi_\varrho)^\sigma$ in der Entwicklung von $\Pi_1(x)$ in der Umgebung von ξ_ϱ ist.

Mit den Anfangswerten von $\Pi_1(x)$ und $\frac{d\Pi_2(x)}{dx}$ in A angelangt, kann man jetzt um die x-Punkte integriren. In der Umgebung von x_1 sei

$$\Pi_2(x) = q_{10} + q_{11}(x - x_1) + q_{12}(x - x_1)^2 + \ldots$$

also

$$\frac{d\Pi_2(x)}{dx} = q_{11} + 2q_{12}(x - x_1) + \ldots$$

und da ferner

$$\Pi_1(x) = B_1 \log(x - x_1) + B_{11}(x - x_1)^{-1} + B_{12}(x - x_1)^{-2} + \ldots + B_{1l_1}(x - x_1)^{-l_1} + [x - x_1]$$

ist, so wird das Integral um diesen Punkt

$$2\pi i [B_{11} q_{11} + 2B_{12} q_{12} + \ldots + l_1 B_{1l_1} q_{1l_1}]$$

Bei einer Umkreisung von x_1 hat aber $\Pi_1(x)$ vermöge des logarithmischen Gliedes um $2\pi i B_1$ zugenommen und das Integral längs Ax_1 ist also

$$\int_A^{x_1} \Pi_1(x) d\Pi_2(x) + \int_{x_1}^A [\Pi_1(x) + 2\pi i B_1] d\Pi_2(x) = -2\pi i B_1 \int_A^x d\Pi_2(x)$$

Mit dem Werte $\Pi_1(x) + 2\pi i B_1$ hat nun die Integration um x_2 stattzufinden. Das Integral um diesen Punkt wird also

$$\int_{(x_2)} \Pi_1(x) d\Pi_2(x) + 2\pi i B_1 \int_{(x_2)} d\Pi_2(x)$$

Da aber $\frac{d\Pi_2(x)}{dx}$ in diesem Punkte endlich bleibt, so wird das zweite Integral verschwinden, das erste liefert einen, dem obigen analogen Ausdruck und da bei der Umkreisung von x_2 wieder $\Pi_1(x) + 2\pi i B_1$ um $2\pi i B_2$ gewachsen ist, so ist das Integral längs Ax_2:

$$\int_A^{x_2} [\Pi_1(x) + 2\pi i B_1] d\Pi_2(x) + \int_{x_2}^A [\Pi_1(x) + 2\pi i B_1 + 2\pi i B_2] d\Pi_2(x) = -2\pi i B_2 \int_A^{x_2} d\Pi_2(x)$$

Hieraus sieht man schon, dass die aus der Integration um die x_ϱ-Punkte sich ergebenden Teile

$$2\pi i \sum_1^m [B_{\varrho 1} q_{\varrho 1} + 2B_{\varrho 2} q_{\varrho 2} + \ldots + l_\varrho B_{\varrho l_\varrho} q_{\varrho l_\varrho}] - 2\pi i \sum_1^m B_\varrho \int_A^{x_\varrho} d\Pi_2(x) \quad (4)$$

werden, wenn $q_{\varrho\sigma}$ der Coefficient von $(x-x_\varrho)^\sigma$ in der Entwicklung von $\Pi_2(x)$ in der Umgebung von x_ϱ ist. Zu bemerken ist hier, dass $\frac{d\Pi_2(x)}{dx}$ nach der Umkreisung aller dieser Punkte den Anfangswert behalten hat, während $\Pi_1(x)$ den Wert

$$\Pi_1(x) + 2\pi i (B_1 + B_2 + \ldots + B_m)$$

erhalten hat.

Mit diesen Functionswerten hat man nun die Integration um die einzelnen Verzweigungspunkte fortzusetzen. Um α_1 wird sich demnach das Integral aus den beiden Teilen zusammensetzen:

$$\int_{(\alpha_1)} \Pi_1(x) d\Pi_2(x) \quad \text{und} \quad 2\pi i (B_1 + B_2 + \ldots + B_m) \int_{(\alpha_1)} d\Pi_2(x)$$

Nun ist in der Umgebung von α_1

$$\Pi_1(x) = a_1 \log(x-\alpha_1)^{\frac{1}{\tau_1}} + b_{11}(x-\alpha_1)^{-\frac{1}{\tau_1}} + b_{12}(x-\alpha_1)^{-\frac{2}{\tau_1}} + \ldots$$
$$+ b_{1\eta_1}(x-\alpha_1)^{-\frac{\eta_1}{\tau_1}} + \mu_1 + \mu_{11}(x-\alpha_1)^{\frac{1}{\tau_1}} + \mu_{12}(x-\alpha_1)^{\frac{2}{\tau_1}} + \ldots$$

und

$$\frac{d\Pi_2(x)}{dx} = \frac{1}{\tau_1} a_1'(x-\alpha_1)^{-\frac{\tau_1}{\tau_1}} - \frac{1}{\tau_1} b_{11}'(x-\alpha_1)^{-\frac{\tau_1+1}{\tau_1}} - \frac{2}{\tau_1} b_{12}'(x-\alpha_1)^{-\frac{\tau_1+2}{\tau_1}} - \ldots$$
$$- \frac{\eta_1'}{\tau_1} b_{1\eta_1'}(x-\alpha_1)^{-\frac{\tau_1+\eta_1'}{\tau_1}} + \frac{1}{\tau_1}\nu_{11}(x-\alpha_1)^{-\frac{\tau_1-1}{\tau_1}} + \frac{2}{\tau_1}\nu_{12}(x-\alpha_1)^{-\frac{\tau_1-2}{\tau_1}} + \ldots$$

Folglich setzt sich das erste Integral aus Teilintegralen der Form

$$\int_{(\alpha_1)} \log(x-\alpha_1)^{\frac{1}{\tau_1}} . (x-\alpha_1)^{\frac{\sigma}{\tau_1}} dx, \quad \int_{(\alpha_1)} (x-\alpha_1)^{\frac{\sigma}{\tau_1}} dx, \quad \int_{(\alpha_1)} (x-\alpha_1)^{-\frac{\tau_1}{\tau_1}} dx$$

jedes dieser Integrale τ_1-fach um α_1 gewunden, zusammen. Setzt man in diesen $(x-\alpha_1)^{\frac{1}{\tau_1}} = z$, so entspricht einer τ_1-fachen Umkreisung des Punktes $x = \alpha_1$ eine einfache Umkreisung von $z = 0$; die Integrale gehen aber dann über in

$$\tau_1 \int_{(0)} \log z . z^{\sigma+\tau_1-1} dz; \quad \tau_1 \int_{(0)} z^{\sigma+\tau_1-1} dz; \quad \tau_1 \int_{(0)} z^{-1} dz$$

Von diesen müssen wieder jene Fälle ausgeschlossen werden, wo das erste Integral unendlich wird; dieses findet aber stets statt, wenn der Exponent $\sigma + \tau_1 - 1$ negativ wäre, d. h. σ negativ und dem absoluten Werte nach grösser als $\tau_1 - 1$; daraus folgt wieder, dass $\Pi_2(x)$ in α_1 gar nicht, oder $\Pi_1(x)$ nur algebraisch unendlich werden darf. In beiden Fällen verschwindet das erste Integral; da nun auch das zweite für positive oder negative σ (von $-\tau_1$ verschieden) Null wird, und das dritte den Wert $\tau_1 . 2\pi i$ annimmt, so wird das Integral

$$\int_{(\alpha_1)} \Pi_1(x) d\Pi_2(x)$$

den Wert haben

$$2\pi i[b_{11}\nu_{11} + 2b_{12}\nu_{12} + \ldots + \eta_1 b_{1\eta_1}\nu_{1\eta_1} + a_1'\mu_1 - b_{11}'\mu_{11} - \ldots - \eta_1' b_{1\eta_1'}\mu_{1\eta_1'}]$$

Vermöge des ersten Gliedes von $\frac{d\Pi_2(x)}{dx}$ wird nun das zweite für α_1 in Betracht zu ziehende Integral den Wert haben

$$2\pi i[B_1 + B_2 + \ldots + B_m]a_1' . 2\pi i = -4\pi^2 a_1'[B_1 + B_2 + \ldots + B_m]$$

der jedoch Null wird, wenn a_1 nicht Null ist. Es sind nun 2 Fälle zu unterscheiden:

1) Ist a_1 Null, so werden $\Pi_1(x)$ und $\frac{d\Pi_2(x)}{dx}$ nach der τ_1-fachen Umkreisung von α_1 ihre Werte nicht geändert haben und die Integration um α_2 schliesst sich unmittelbar an und giebt Ausdrücke, die den obigen analog sind. Es mögen nun in den Verzweigungspunkten $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_i$ beide Functionen unstetig werden (also $\Pi_1(x)$ jedenfalls nur algebraisch unendlich). Um alle diese herumgenommen wird also das Integral

$$2\pi i \sum_1^i [b_{\varrho 1}\nu_{\varrho 1} + 2b_{\varrho 2}\nu_{\varrho 2} + \ldots + \eta_\varrho b_{\varrho\eta_\varrho}\nu_{\varrho\eta_\varrho} + a_\varrho'\mu_\varrho - b_{\varrho 1}'\mu_{\varrho 1} - 2b_{\varrho 2}'\mu_{\varrho 2} - \ldots$$
$$- \eta_\varrho' b_{\varrho' \eta_\varrho'}\mu_{\varrho\eta_\varrho'}] - 4\pi^2(B_1 + B_2 + \ldots + B_m)\sum_1^i a_\varrho' \qquad (5a)$$

2) Ist a_{i+1} nicht Null, [indem jetzt um den nächsten Punkt integrirt wird], so muss

$$a_{i+1}' = b_{i+1\,1}' = \ldots = b_{i+1}'\eta_{i+1}' = 0$$

sein, also verschwindet das Integral

$$2\pi i(B_1 + B_2 + \ldots + B_m)\int_{(\alpha_{i+1})} d\Pi_2(x)$$

Dagegen ändert jetzt $\Pi_1(x)$ bei der τ_{i+1}-fachen Umkreisung von α_{i+1} seinen Wert um $2\pi i a_1$, demnach hat man noch das Integral längs $A\alpha_{i+1}$, welches gleich ist

$$\int_A^{\alpha_{i+1}} \Pi_1(x)d\Pi_2(x) + \int_{\alpha_{i+1}}^A [\Pi_1(x) + 2\pi i a_{i+1}]d\Pi_2(x) = -2\pi i a_{i+1}\int_A^{\alpha_{i+1}} d\Pi_2(x)$$

und folglich wird für die Verzweigungspunkte, in denen $\Pi_1(x)$ algebraisch-logarithmisch unstetig wird, in denen aber $\Pi_2(x)$ endlich bleibt*), das um dieselben genommene Integral

$$2\pi i \sum_{i+1}^{\omega} [b_{\varrho 1}\nu_{\varrho 1} + 2b_{\varrho 2}\nu_{\varrho 2} + \dots + \eta_\varrho b_{\varrho\eta_\varrho}\nu_{\varrho\eta_\varrho}] - 2\pi i \sum_{i+1}^{\omega} a_\varrho \int_A^{\alpha_\varrho} d\Pi_2(x) \quad (5b)$$

wobei $\mu_{\varrho\sigma}$, $\nu_{\varrho\sigma}$ die Coefficienten von $(x-\alpha_\varrho)^{\frac{\sigma}{\tau_\varrho}}$ in der Entwicklung von $\Pi_1(x)$ und $\Pi_2(x)$ in der Umgebung von α_ϱ sind.

Nach Umkreisung aller dieser Punkte haben nun $\Pi_1(x)$ und $\Pi_2(x)$ die Werte

$$\Pi_1(x) + 2\pi i[B_1 + B_2 + \dots + B_m + a_{i+1} + \dots + a_\omega] \quad \text{und} \quad \Pi_2(x) \qquad (\alpha)$$

erlangt, und mit diesen muss nun die Integration über die in der Unendlichkeit liegenden Unstetigkeitspunkte fortgesetzt werden. Betrachten wir wieder vorerst jene Unendlichkeitspunkte, in denen beide Integrale unendlich werden. In C_1 gelten die Entwicklungen

$$\Pi_1(x) = C_1\log x + C_{11}x + C_{12}x^2 + \dots + C_{1c_1}x^{c_1} + M_{10} + M_{11}x^{-1} + M_{12}x^{-2} + \dots$$

$$\frac{d\Pi_2(x)}{dx} = C_1'x^{-1} + C_{11}' + 2C_{12}'x + \dots + c_1'C_1'{}_{c_1'}x^{c_1'-1} - N_{11}x^{-2} - 2N_{12}x^{-3} - \dots$$

Das Integral um diesen Punkt setzt sich wieder aus den beiden Teilen

$$\int_{(\infty)} \Pi_1(x)d\Pi_2(x) \quad \text{und} \quad 2\pi i[B_1 + B_2 + \dots + B_m + a_{i+1} + \dots + a_\omega]\int_{(\infty)} d\Pi_2(x)$$

zusammen; der erstere besteht aus Teilintegralen von der Form

$$\int_{(\infty)} x^\sigma \log x\, dx; \quad \int_{(\infty)} x^\sigma dx; \quad \int_{(\infty)} x^{-1}dx$$

Durch die Substitution $x = \frac{1}{y}$ verwandeln sich diese Integrale in

$$\int_{(0)} y^{-\sigma-2}\log y\, dy; \quad -\int_{(0)} y^{-\sigma-2}dy; \quad -\int_{(0)} y^{-1}dy$$

---

*) Wenn $\Pi_1(x)$ endlich bleibt, und $\Pi_2(x)$ unendlich ist, so hat man nur in (5a)

$$b_{\varrho 1} = b_{\varrho 2} = \dots = b_{\varrho\eta_\varrho} = 0$$

zu setzen.

Das erste Integral verschwindet, so lange $-\sigma-2$ positiv oder 0 ist, d. h. so lange $\sigma+2$ negativ oder Null; und wird unendlich, wenn $\sigma+1$ positiv ist; demnach fallen die Glieder, deren Coefficienten C_1N_{11}, C_1N_{12} ... in $\Pi_1 \frac{d\Pi_2(x)}{dx}$ sind, für jedes C_1 weg, hingegen würden die Glieder mit C_1C_1', C_1C_{11}' ... unendlich gross, und es muss also entweder $C_1'=C_{11}'= \ldots =0$ werden, was nicht möglich ist, da in C_1 beide Integrale unendlich werden sollen; also muss $C_1=0$ sein, d. h. $\Pi_1(x)$ wird in C_1 nur algebraisch unendlich. Da ferner die Teilintegrale von der zweiten Form immer verschwinden, das dritte den Wert $-2\pi i$ hat, so wird

$$\int_{(C)} \Pi_1(x)d\Pi_2(x)$$

den Wert erhalten

$$-2\pi i[C_1'M_{10}+C_{11}'M_{11}+2C_{12}'M_{12}+\ldots$$
$$+c_1'C_1'{}_{c_1'}M_{1c_1'}-C_{11}N_{11}-2C_{12}N_{12}-\ldots-c_1C_{1c_1}N_{1c_1}]$$

Hierzu kommt noch ein zweiter Teil, der vermöge des ersten Gliedes in $\frac{d\Pi_2(x)}{dx}$

$$-2\pi i[B_1+B_2+\ldots+B_m+a_{i+1}+\ldots+a_\omega].2\pi iC_1'$$
$$=4\pi^2C_1'[B_1+B_2+\ldots+B_m+a_{i+1}+\ldots+a_\omega]$$

ist. Da nun $C_1=0$ ist, so haben bei der Umkreisung von C_1 die beiden Functionen $\Pi_1(x)$ und $\frac{d\Pi_2(x)}{dx}$ ihre Werte nicht geändert, die Integrale längs AC zerstören sich; das Integral um jeden folgenden C-Punkt beginnt mit den ursprünglichen Functionalwerten (α), folglich ist die Summe der Integrale um alle C

$$-2\pi i\sum_1^k[C_\varrho'M_\varrho+C_{\varrho 1}'M_{\varrho 1}+C_{\varrho 2}'M_{\varrho 2}+\ldots$$
$$+c_\varrho'C_\varrho'{}_{c_\varrho'}M_{\varrho c_\varrho'}-C_{\varrho 1}N_{\varrho 1}-2C_{\varrho 2}N_{\varrho 2}-\ldots-c_\varrho C_{\varrho c_\varrho}N_{\varrho c_\varrho}]$$
$$+4\pi^2[B_1+B_2+\ldots+B_m+a_{i+1}+\ldots+a_\omega]\sum_1^k C_\varrho' \quad (6)$$

wo $M_{\varrho\sigma}$ $N_{\varrho\sigma}$ die den Grössen $m_{\varrho\sigma}$, $n_{\varrho\sigma}$ analoge Bedeutung haben.

Integrirt man nun um D_1', so wird, weil in der Umgebung dieses Punktes:

$$\Pi_1(x) = P_{10}+P_{11}x^{-1}+P_{12}x^{-2}+\ldots$$
$$\frac{d\Pi_2(x)}{dx} = D_1'x^{-1}+D_{11}'+2D_{12}'x+\ldots+d_1'D_{1d_1'}x^{d_1'-1}-P'x^{-2}-\ldots-$$

das Integral $\int \Pi_1(x)\, d\Pi_2(x)$ um diesen Punkt

$$-2\pi i[D_1' P_{10} + D_{11}' P_{11} + 2D_{12}' P_{12} + \ldots + d_1' D'_{1d_1'} P_{1d_1'}]$$

Hierzu kommt das von dem zweiten Teile herrührende

$$+4\pi^2[B_1 + B_2 + \ldots + B_m + a_{i+1} + \ldots + a_\omega]D_1'$$

also das Integral um sämmtliche D' gleich

$$-2\pi i \sum_1^\nu [D_\varrho' P_{\varrho_0} + D_{\varrho_1}' P_{\varrho_1} + 2D_{\varrho_2}' P_{\varrho_2} + \ldots + d_\varrho' D_{\varrho d'_{\varrho'}} P_{\varrho d_{\varrho'}}]$$

$$+4\pi^2[B_1 + B_2 + \ldots + B_m + a_{i+1} + \ldots + a_\omega] \sum_1^\nu D_\varrho' \qquad (7)$$

Da sich bei den Umkreisungen der D'-Punkte weder $\Pi_1(x)$ noch $\frac{d\Pi_2(x)}{dx}$ geändert haben, so hat man wieder mit den Werten (α) die Integration über die D-Punkte fortzusetzen. In der Umgebung von D_1 ist:

$$\Pi_1(x) = D_1 \log x + D_{11} x + D_{12} x^2 + \ldots + D_{1d_1} x^{d_1} + Q' x^{-1} + \ldots$$

$$\frac{d\Pi_2(x)}{dx} = -Q_{11} x^{-2} - 2Q_{12} x^{-3} - \ldots$$

In diesem Falle kommen wieder Integrale $\int_{(\infty)} x^\sigma \log x\, dx$ vor; da aber hier $\sigma + 2$ Null oder negativ ist, so verschwinden dieselben so wie auch die Integrale $\int_{(\infty)} x^\sigma dx$ für $\sigma \gtrless -1$ und es bleibt nur das für $\sigma = -1$, welches

$$2\pi i[Q_{11} D_{11} + 2Q_{12} D_{12} + \ldots + d_1 Q_{1d_1} D_{1d_1}]$$

ist. Der zweite Teil fällt hier weg, da

$$\int_{(D_1)} \frac{d\Pi_2(x)}{dx} = 0$$

ist. Aber bei der Umkreisung von D_1 hat $\Pi_1(x)$ um $-2\pi i D_1$ zugenommen, folglich kommt hier noch

$$\int_A^{D_1} [\Pi_1(x) + 2\pi i(B_1 + B_2 + \ldots + B_m + a_{i+1} + \ldots + a_\omega)] d\Pi_2(x)$$

$$+\int_{D_1}^A [\Pi_1(x) + 2\pi i(B_1 + B_2 + \ldots B_m + a_{i+1} + \ldots + a_\omega)$$

$$-2\pi i D_1] d\Pi_2(x) = +2\pi i D_1 \int_A^{D_1} d\Pi_2(x)$$

hinzu. Das Integral um alle D_ϱ ist demnach

$$2\pi i \sum_1^\lambda [Q_{\varrho_1} D_{\varrho_1} + 2 Q_{\varrho_2} D_{\varrho_2} + \ldots + d_\varrho Q_{\varrho d_\varrho} D_{\varrho d_\varrho}]$$

$$+ 2\pi i \sum_1^\lambda D_\varrho \int_A^{D_\varrho} d\Pi_2(x) \tag{8}$$

Nun hat aber $\Pi_1(x)$ nach Umkreisung aller D-Punkte den Wert

$$\Pi_1(x) + 2\pi i [B_1 + B_2 + \ldots + B_m + a_{i+1} + \ldots a_\omega - D_1 - D_2 - \ldots - D_\lambda]$$

angenommen, und mit diesem ist nun noch um alle im Unendlichen liegende Verzweigungspunkte zu integriren. Nun ist in E_1

$$\Pi_1(x) = E_1 \log x^{\frac{1}{\vartheta_1}} + E_{11} x^{\frac{1}{\vartheta_1}} + E_{12} x^{\frac{2}{\vartheta_1}} + \ldots + E_{1e_1} x^{\frac{e_1}{\vartheta_1}} + R_1 + R_{11} x^{-\frac{1}{\vartheta_1}} + \ldots$$

$$\frac{d\Pi_2(x)}{dx} = \frac{1}{\vartheta_1} E_1' x^{-\frac{\vartheta_1}{\vartheta_1}} + \frac{1}{\vartheta_1} E_{11}' x^{-\frac{\vartheta_1 - 1}{\vartheta_1}} + \frac{2}{\vartheta_1} E_{12}' x^{-\frac{\vartheta_1 - 2}{\vartheta_1}} + \ldots$$

$$+ \frac{e_1'}{\vartheta_1} E_1'{}_{e_1'} x^{-\frac{\vartheta_1 - e_1'}{\vartheta_1}} - \frac{1}{\vartheta_1} S_{11} x^{-\frac{\vartheta_1 + 1}{\vartheta_1}} - \ldots$$

Das Integral um E_1 setzt sich also aus Teilen zusammen, die Form

$$\int_{(\infty)} x^{\frac{\sigma}{\vartheta_1}} \log x^{\frac{1}{\vartheta_1}} dx; \quad \int_{(\infty)} x^{\frac{\sigma}{\vartheta_1}} dx; \quad \int_{(\infty)} x^{-\frac{\vartheta_1}{\vartheta_1}} dx$$

haben. Setzt man hier $x^{\frac{1}{\vartheta_1}} = y$, so gehen diese über in

$$\vartheta_1 \int_{(0)} y^{-\sigma - \vartheta_1 - 1} \log y \, dy; \quad -\vartheta_1 \int_{(0)} y^{-\sigma - \vartheta_1 - 1} dy; \quad -\vartheta_1 \int_{(0)} y^{-1} dy$$

Das erste Integral verschwindet, wenn $-\sigma - \vartheta_1 - 1$ positiv oder Null ist, und wird für negative Werte des Exponenten unendlich; daraus kann in der mehrfach durchgeführten Weise geschlossen werden, dass entweder $E_1' = E_{11}' = \ldots = E_{1e_1} = 0$ oder $E_1 = 0$ ist. In beiden Fällen verschwindet das erste Integral und es bleibt

$$-2\pi i [R_1 E_1' + R_{11} E_{11}' + 2 R_{12} E_{12}' + \ldots + e_1' R_{1e_1'} E'_{1e_1'}$$
$$- E_{11} S_{11} - 2 E_{12} S_{12} - \ldots e_1 E_{1e_1} S_{1e_1}]$$

Ferner ist $\int_{(\infty)} \frac{d\Pi_2(x)}{dx} = -E_1' 2\pi i$, also kommt für diesen Punkt noch der Teil

$$+ 4\pi^2 [B_1 + B_2 + \ldots + B_m + a_{i+1} + \ldots + a_\omega - D_1 - D_2 - \ldots - D_\lambda] E$$

hinzu. Für das folgende sind nun wieder 2 Fälle zu unterscheiden:

1) Ist $E_1 = 0$, so haben $\Pi_1(x)$ und $\frac{d\Pi_2(x)}{dx}$ nach der ϑ_1-fachen Umkreisung von E_1 ihre Werte nicht geändert, und die Summe der Integrale zu beiden Seiten von E_1A ist Null. Sind also $E_1 \ldots E_i$ Verzweigungspunkte im Unendlichen, in welchen beide Integrale unendlich werden, also $\Pi_1(x)$ rein algebraisch, so ist die Summe der Integrale um alle diese Punkte

$$-2\pi i \overset{i}{\Sigma}[E_\varrho' R_\varrho + E_{\varrho_1}' R_{\varrho_1} + 2E_{\varrho_2}' R_{\varrho_2} + \ldots + e_\varrho' E_{\varrho e'_{\varrho'}} R_{\varrho e_{\varrho'}}$$

$$-E_{\varrho_1} S_{\varrho_1} - 2E_{\varrho_2} S_{\varrho_2} - \ldots - e_\varrho E_{\varrho e_\varrho} S_{\varrho e_\varrho}]$$

$$+4\pi^2[B_1 + B_2 + \ldots + B_m + a_{i+1} + \ldots + a_\omega - D_1 - D_2 - \ldots - D_\lambda] \sum_1^i E_\varrho' \quad (9)$$

2) Ist E_{i+1} von Null verschieden, so muss $\Pi_2(x)$ in E_{i+1} endlich,

$$\int_{(E_{i+1})} d\Pi_2(x) = 0$$

sein; hingegen wird $\Pi_1(x)$ bei der Umkreisung um $-2\pi i E_{i+1}$ zunehmen, daher wird das Integral längs AE_{i+1}

$$+2\pi i E_{i+1} \int_A^{E_{i+1}} d\Pi_2(x)$$

also das Integral um sämmtliche E_ϱ $[\varrho = i+1 \ldots]$ gleich

$$+2\pi i \sum_{i+1}^{o} [E_{\varrho 1} S_{\varrho 1} + 2E_{\varrho 2} S_{\varrho 2} + \ldots + e_\varrho E_{\varrho e_\varrho} S_{\varrho e_\varrho}]$$

$$+2\pi i \sum_{i+1}^{o} E_\varrho \int_A^{E_\varrho} d\Pi_2(x) \quad (10)$$

Vermöge der Wertveränderung bei den Umkreisungene der letzten Punkte ist der Entwert von $\Pi_1(x)$ gleich

$$\Pi_1(x) + 2\pi i [B_1 + B_2 + \ldots + B_m + a_{i+1} + \ldots a_\omega - D_1 - D_2 - \ldots$$
$$- D_\lambda - E_{i+1} - \ldots - E_o]$$

Als Existenzbedingung für das Integral $\Pi_1(x)$ war aber das Verschwinden der Klammergrösse gefunden [in (1) fallen $A_1 \ldots A_\mu$, $a_1 \ldots a_i$, $C_1 \ldots C_k$ und $E_1 \ldots E_i$ weg], also kommt $\Pi_1(x)$ in A mit dem Anfangswerte an. Die zu integrirende Function schliesst sich also hier stetig längs des Querschnittes an. Das Integral über die $2p$ Querschnitte lässt sich nun in p Teile zerlegen, von denen jeder einem Systeme von zwei zusammengehörigen Querschnitten entspricht.

Führt man die Integration längs eines solchen durch, so wird man sehen, dass jeder Querschnitt zweimal durchlaufen wird u. zw. auf der positiven Seite in der positiven, auf der negativen Seite in der negativen Richtung. Da ferner längs allen c sowol $\Pi_1(x)$ als auch $\frac{d\Pi_2(x)}{dx}$ denselben Wert haben und in entgegengesetzter Richtung integrirt wird, so werden diese beiden Teile des Integrals wegfallen, und es wird sich in Folge dessen das ganze Integral über zwei zusammengehörige Querschnitte aus vier Teilen zusammensetzen:

$$\int_\varrho \Pi_1(x)d\Pi_2(x) = \int_{a_\varrho} \Pi_1{}^+(x)\,d\Pi_2(x) - \int_{a_\varrho} \Pi_1{}^-(x)d\Pi_2(x)$$
$$+ \int_{c_\varrho} \Pi_1{}^+(x)\,d\Pi_2(x) - \int_{b_\varrho} \Pi_1{}^-(x)d\Pi_2(x)$$

wo statt $d\Pi_2{}^+(x)$ und $d\Pi_2{}^-(x)$ gleich $d\Pi_2(x)$ gesetzt werden kann, weil $\frac{d\Pi_2(x)}{dx}$ zu beiden Seiten jedes Querschnittes denselben Wert hat. Es wird also

$$\int_\varrho \Pi_1(x)d\Pi_2(x) = \int_{a_\varrho} [\Pi_1{}^+(x) - \Pi_1{}^-(x)]d\Pi_2(x)$$
$$+ \int_{b_\varrho} [\Pi_1{}^+(x) - \Pi_1{}^-(x)]d\Pi_2(x)$$

und wenn die Stetigkeitssprünge in jener Richtung als positiv angesehen werden, für welche die sie bestimmenden Integrale in der positiven Richtung (so dass die umzogene Fläche zur Linken bleibt) um die zugehörigen Querschnitte genommen werden, so ist

$$\int_\varrho \Pi_1(x)d\Pi_2(x) = \Pi_{1\varrho}{}^{(a)} \int_{a_\varrho} d\Pi_2(x) - \Pi_{1\varrho}{}^{(b)} \int_{b_\varrho} d\Pi_2(x)$$
$$= \Pi_{1\varrho}{}^{(a)}\Pi_{2\varrho}{}^{(b)} - \Pi_{2\varrho}{}^{(a)}\Pi_{1\varrho}{}^{(b)}$$

wenn $\Pi_{1\varrho}{}^{(a)}\Pi_{1\varrho}{}^{(b)}\Pi_{2\varrho}{}^{(a)}\Pi_{2\varrho}{}^{(b)}$ die Periodicitätsmoduln der Integrale $\Pi_1(x)$ $\Pi_2(x)$ an den Querschnitten a_ϱ und b_ϱ sind. Das Integral um alle Querschnitte ist also

$$\sum_1^p [\Pi_{1\varrho}{}^{(a)}\Pi_{2\varrho}{}^{(b)} - \Pi_{2\varrho}{}^{(a)}\Pi_{1\varrho}{}^{(b)}] \tag{11}$$

Die Summe der Ausdrücke (2) bis (11) ist nun das auf der einfach zusammenhängenden Riemann'schen Fläche genommene Integral

$$\int \Pi_1(x) d\Pi_2(x)$$

also gleich Null. Bevor wir jedoch das Resultat zusammenstellen, sollen noch einige Vereinfachungen in den einzelnen Gliedern vorgenommen werden. Es ist klar, dass man ebenso von dem Integrale $\int \Pi_2(x) d\Pi_1(x)$ hätte ausgehen können, und offenbar hätten sich dieselben Beziehungen zwischen den Periodicitätsmoduln ergeben. Daher würde sich gezeigt haben, dass ausser den hier schon erwähnten Bedingungen noch

$$A_1' = A_2' = \ldots = A_\mu' = 0, \qquad C_1' = C_2' = \ldots = C_k' = 0$$
$$a_1' = a_2' = \ldots = a_i' = 0, \qquad E_1' = E_2' = \ldots = E_e' = 0$$

bestehen müssen; Bedingungen welche sich aus der Betrachtung des Integrals $\int \Pi_1(x) d\Pi_2(x)$ nicht ergeben, weil die in $\Pi_2(x)$ auftretenden logarithmischen Unstetigkeiten im Differentiale ausgefallen sind. Nennt man nun noch $a_{i+1}' \ldots a_\omega'$, $E_{i+1}' \ldots E_0'$ die Coefficienten der logarithmischen Unstetigkeiten von $\Pi_2(x)$ in jenen im Endlichen und Unendlichen liegenden Verzweigungspunkten, in denen $\Pi_1(x)$ endlich bleibt, so gehen mit Rücksicht auf die im Verlaufe der Untersuchung gefundenen Bedingungen die Gleichungen (1) über in

$$B_1 + \ldots + B_m + a_{i+1} + \ldots + a_\omega - D_1 - \ldots - D_\lambda - E_{i+1} - \ldots - E_o = 0$$
$$B_1' + \ldots B_n' + a_{i+1}' + \ldots a_\omega' - D_1' - \ldots D_\nu' E_{i+1}' - \ldots E_0' = 0 \qquad (1a)$$

Da nun das Integral $\Pi_2(x)$ in den Punkten A, $x_1 \ldots x_m$ $a_{i+1} \ldots a_\omega$, $D_1 \ldots D_\lambda$ $E_{i+1} \ldots E_0$ endlich bleibt, und die Integrationswege durch keinen Unstetigkeitspunkt gehen und keinen Querschnitt schneiden dürfen, so wird man die Integrale in (4) (5b) (8) und (10) auflösen können. Bezeichnet man nun im Einklange mit den schon früher gewählten Bezeichnungen:

$$\Pi_2(x_\varrho) = q_{\varrho_0} \qquad \Pi_2(\alpha_\varrho) = r_\varrho$$
$$\Pi_2(D_\varrho) = Q_{\varrho_0} \qquad \Pi_2(E_\varrho) = S_\varrho$$

(wobei im zweiten und vierten Falle ϱ von $i+1$ bis ω resp. von $i+1$ bis o zu nehmen ist), so wird

$$-\Sigma B_\varrho 2\pi i \int_A^{x_\varrho} d\Pi_2(x) = +2\pi i \sum_1^m (-B_\varrho q_{\varrho_0}) + 2\pi i \Pi_2(A) \sum_\omega^m B_\varrho'$$

$$-2\pi i\sum_{i+1}^{\omega} a_\varrho \int_A^{\alpha_\varrho} d\Pi_2(x) = +2\pi i\sum_{i+1}^{\omega}(-a_\varrho r) + 2\pi i\Pi_2(A)\sum_{i+1}^{\omega} a_\varrho$$

$$+[2\pi i(B_1'+\ldots B_n')+2\pi i\sum_{i+1}^{\omega'} a_\varrho']\,2\pi i\sum_{i+1}^{\omega} a_\varrho$$

$$+2\pi i\sum_1^{\lambda} D_\varrho \int_A^{D_\varrho} d\Pi_2(x) = +2\pi i\sum_1^{\lambda} D_\varrho Q_{\varrho_0} - 2\pi i\Pi_2(A)\sum_1^{\lambda} D_\varrho$$

$$+[2\pi i(B_1'+\ldots B_n')+2\pi i\sum_{i+1}^{\omega'} a_\varrho' - 2\pi i(D_1'+\ldots D_n')]\,2\pi i\sum_1^{\lambda} D_\varrho$$

$$+2\pi i\sum_{i+1}^{o} E_\varrho \int_A^{E_\varrho} d\Pi_2(x) = +2\pi i\sum_{i+1}^{o} E_\varrho S_\varrho - 2\pi i\Pi_2(A)\sum_{i+1}^{o} E_\varrho$$

$$+[2\pi i(B_1'+\ldots B_n')+2\pi i\sum_{i+1}^{\omega'} a_\varrho' - 2\pi i(D_1'+\ldots D_\nu')$$

$$-2\pi i(E_{i+1}'+\ldots E_{o'}')]\,2\pi i\sum_{i+1}^{o} E_\varrho$$

Vereinigt man von den Ausdrücken rechts diejenigen vier, die den gemeinsamen Factor $2\pi i\Pi_2(A)$ haben, so wird vermöge der ersten Gleichung (1a) dieser Ausdruck wegfallen. Es bleibt dann noch das erste Glied, das man in jede der zugehörigen Klammergrössen einbeziehen kann, während die Gesammtheit der mit $2\pi i$ multiplicirten Glieder sich in

$$[\Sigma B_\varrho + \Sigma a_\varrho - \Sigma D_\varrho - \Sigma E_\varrho][\Sigma B_\varrho' + \Sigma a_\varrho' - \Sigma D_\varrho' - \Sigma E_\varrho'] = 0$$

zusammenzieht, und man erhält dadurch das folgende Resultat:

Ist $\Pi_1(x)$ ein Abel'sches Integral, das in den Punkten $X_1 \ldots X_\mu$, unendlich wird wie

$$A_{\varrho 1}(x-X_\varrho)^{-1}+A_{\varrho 2}(x-X_\varrho)^{-2}+\ldots+A_{\varrho k_\varrho}(x-X_\varrho)^{-k_\varrho} \qquad \varrho = 1, 2 \ldots \mu$$

in den Punkten $x_1 x_2 \ldots x_m$ wie

$$B_\varrho \log(x-x_\varrho)+B_{\varrho 1}(x-x_\varrho)^{-1}+\ldots+B_{\varrho l_\varrho}(x-x_\varrho)^{-l_\varrho} \qquad \varrho = 1, 2 \ldots m$$

in den Verzweigungspunkten $\alpha_1\,\alpha_2 \ldots \alpha_i$ wie

$$b_{\varrho 1}(x-\alpha_\varrho)^{-\frac{1}{r_\varrho}}+b_{\varrho 2}(x-\alpha_\varrho)^{-\frac{2}{r_\varrho}}+\ldots+b_{\varrho\eta_\varrho}(x-\alpha_\varrho)^{-\frac{\eta_\varrho}{r_\varrho}} \qquad \varrho = 1, 2 \ldots i$$

in den Verzweigungspunkten $\alpha_{i+1} \ldots \alpha_\omega$

$$a_\varrho \log(x-a_\varrho)^{\frac{1}{r_\varrho}}+b_{\varrho 1}(x-\alpha_\varrho)^{\frac{2}{r_\varrho}}+\ldots+b_{\varrho\eta_\varrho}(x-\alpha_\varrho)^{-\frac{\eta_\varrho}{r_\varrho}} \qquad \varrho = i+1 \ldots \omega$$

in den übrigen im endlichen liegenden Verzweigungspunkten endlich bleibt; in den Unendlichkeitspunkten $C_1 \ldots C_k$ unendlich wird wie

$$C_{\varrho_1} x + C_{\varrho_2} x^2 + \ldots + C_{\varrho c_\varrho} x^{c_\varrho} \qquad \varrho = 1, 2 \ldots \varkappa$$

in $D_1 D_2 \ldots D_\lambda$ wie

$$D_\varrho \log x + D_{\varrho_1} x + D_{\varrho_2} x^2 + D_{\varrho d_\varrho} x^{d_\varrho} \qquad \varrho = 1, 2 \ldots \lambda$$

in den Verzweigungspunkten $E_1 E_2 \ldots E_i$ wie

$$E_{\varrho_1} x^{\frac{1}{\vartheta_\varrho}} + E_{\varrho_2} x^{\frac{2}{\vartheta_\varrho}} + \ldots + E_{\varrho e_\varrho} x^{\frac{e}{\vartheta_\varrho}} \qquad \varrho = 1, 2 \ldots i$$

und endlich in $E_{i+1} \ldots E_o$ wie

$$E_\varrho \log x^{\frac{1}{\vartheta_\varrho}} + E_{\varrho_1} x^{\frac{1}{\vartheta_\varrho}} + \ldots + E_{\varrho e_\varrho} x^{\frac{e_\varrho}{\vartheta_\varrho}} \qquad \varrho = i+1 \ldots o$$

und in den übrigen Blättern im unendlich entfernten Punkte endlich bleibt; ist ferner $\Pi_2(x)$ ein Integral, das in den Punkten $X_1 X_2 \ldots X_\mu$ unendlich wird wie

$$A_{\varrho_1}'(x - X_\varrho)^{-1} + \ldots + A'_{\varrho k_\varrho'}(x - X_\varrho)^{-k_\varrho'}$$

$$\varrho = 1, 2 \ldots \mu$$

in den Punkten $\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_n$ wie

$$B_\varrho' \log(x - \xi_\varrho) + B_{\varrho_1}'(x - \xi_\varrho)^{-1} + \ldots + B'(x - \xi_{\varrho l_\varrho'})^{-l_\varrho'} \qquad \varrho = 1, 2 \ldots n$$

in den Verzweigungspunkten $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_i$ und $\alpha_{i+1} \ldots \alpha_{\omega'}$ bzhw. wie

$$b_{\varrho_1}'(x - \alpha_\varrho)^{-\frac{1}{\tau_\varrho}} + \ldots + b'_{\varrho \eta_\varrho'}(x - \alpha_\varrho)^{-\frac{\eta_\varrho'}{\tau_\varrho}} \qquad \varrho = 1, 2 \ldots i$$

$$a_\varrho' \log(x - \alpha_\varrho)^{\frac{1}{\tau_\varrho}} + b_\varrho \eta_\varrho (x - \alpha_\varrho)^{-\frac{1}{\tau_\varrho}} + \ldots b_\varrho' \eta_\varrho' (x - \alpha_\varrho)^{-\frac{\eta_\varrho'}{\tau_\varrho}}$$

$$\varrho = i+1, \ldots \omega'$$

und in den übrigen im endlichen liegenden Verzweigungspunkten endlich bleibt, ferner in den Punkten $C_1 C_2 \ldots C_n$ unendlich wird wie

$$C_{\varrho_1}' x + \ldots + C_{\varrho c'_{\varrho'}} x^{c_{\varrho'}} \qquad \varrho = 1, 2 \ldots k$$

in $D_1 D_2' \ldots D_\nu'$ wie die Functionen

$$D_\varrho' \log x + D_{\varrho_1}' x + \ldots + D_{\varrho d'_{\varrho'}} x^{d_{\varrho'}} \qquad \varrho = 1, 2 \ldots \nu$$

in den Verzweigungspunkten $E_1 E_2 \ldots E_i$ und $E_{i+1} \ldots E_o'$, bzhw. wie

$$E_{\varrho_1}' x^{\frac{1}{\vartheta_\varrho}} + \ldots + E_{\varrho e'_{\varrho'}} x^{\frac{1_{\varrho_1}}{\vartheta_\varrho}} \qquad \varrho = 1, 2 \ldots i$$

$$E_\varrho' \log x^{\frac{1}{\vartheta_\varrho}} + E_{\varrho_1}' x^{\frac{1}{\vartheta_\varrho}} + \ldots E_{\varrho' e_\varrho'} x^{\frac{e'}{\vartheta_\varrho}}$$

und sonst überall endlich bleibt, so besteht zwischen den Periodicitätsmoduln dieser beiden Integrale die folgende Relation:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i}\sum_1^p\left[\Pi_{1\varrho}^{(a)}\Pi_{2\varrho}^{(b)}-\Pi_{1\varrho}^{(b)}\Pi_{2\varrho}^{(a)}\right]=\\
&=-\sum_1^\mu\big[A_{\varrho_1}n_{\varrho_1}+2A_{\varrho_2}n_{\varrho_2}+\ldots+k_\varrho A_{\varrho k_\varrho}n_{\varrho k_\varrho}-A_{\varrho_1}'m_{\varrho_1}\\
&\qquad-2A_{\varrho_2}'m_{\varrho_2}-\ldots-k_\varrho' A_{\varrho k'_\varrho}'m_{\varrho k_\varrho'}\big]\\
&\quad-\sum_1^n\left[B_\varrho' p_{\varrho_0}-B_{\varrho_1}'p_{\varrho_1}-2B_{\varrho_2}'p_{\varrho_2}-\ldots-l_\varrho' B_{\varrho l'_\varrho}'p_{\varrho l_\varrho'}\right]\\
&\quad+\sum_1^m\left[B_\varrho q_{\varrho_0}-B_{\varrho_1}q_{\varrho_1}-2B_{\varrho_2}q_{\varrho_2}-\ldots-l_\varrho B_{\varrho l_\varrho}q_{\varrho l_\varrho}\right]\\
&\quad-\sum_1^i\big[b_{\varrho_1}\nu_{\varrho_1}+2b_{\varrho_2}\nu_{\varrho_2}+\ldots+\eta_\varrho b_{\varrho\eta_\varrho}\nu_{\varrho\eta_\varrho}-b_{\varrho_1}'\mu_{\varrho_1}\\
&\qquad-2b_{\varrho_2}'\mu_{\varrho_2}-\ldots\eta_\varrho' b_{\varrho\eta'_\varrho}'\mu_{\varrho\eta_\varrho'}\big]\\
&\quad+\sum_{i+1}^\omega\left[a_\varrho\nu_\varrho-b_{\varrho_1}\nu_{\varrho_1}-2b_{\varrho_2}\nu_{\varrho_2}-\ldots-\eta_\varrho b_{\varrho\eta_\varrho}\nu_{\varrho\eta_\varrho}\right] \qquad (12)\\
&\quad-\sum_{i+1}^{\omega'}\left[a_\varrho'\mu_\varrho-b_{\varrho_1}'\mu_{\varrho_1}-\ldots-\eta_\varrho' b_{\varrho\eta_\varrho'}'\mu_{\varrho\eta_\varrho'}\right]\\
&\quad+\sum_1^k\big[C_{\varrho_1}'M_{\varrho_1}+2C_{\varrho_2}'M_{\varrho_2}+\ldots+c_\varrho' C_{\varrho c_\varrho'}'M_{\varrho c_\varrho'}\\
&\qquad-C_{\varrho_1}N_{\varrho_1}-2C_{\varrho_2}N_{\varrho_2}-\ldots-c_\varrho C_{\varrho c_\varrho}N_{\varrho c_\varrho}\big]\\
&\quad+\sum_1^\nu\left[D_\varrho' P_{\varrho_0}+D_{\varrho_1}'P_{\varrho_1}+D_{\varrho_2}'P_{\varrho_2}+\ldots+d_\varrho' D_{\varrho d'_\varrho}'P_{\varrho d_\varrho'}\right]\\
&\quad-\sum_1^\lambda\left[D_\varrho Q_{\varrho_0}+D_{\varrho_1}Q_{\varrho_1}+2D_{\varrho_2}Q_{\varrho_2}+\ldots+d_\varrho Q_{\varrho d_\varrho}D_{\varrho d_\varrho}\right]\\
&\quad+\sum_1^i\big[E_{\varrho_1}'R_{\varrho_1}+2E_{\varrho_2}'R_{\varrho_2}+\ldots+e_\varrho' E_{\varrho e_\varrho'}R_{\varrho e_\varrho'}\\
&\qquad-E_{\varrho_1}S_{\varrho_1}-2E_{\varrho_2}S_{\varrho_2}-\ldots-e_\varrho E_{\varrho e_\varrho}S_{\varrho e_\varrho}\big]\\
&\quad+\sum_{i+1}^{\sigma'}\left[E_\varrho' R_\varrho+E_{\varrho_1}'R_{\varrho_1}+2E_{\varrho_2}'R_{\varrho_2}+\ldots e_\varrho' E_{\varrho e_\varrho}'R_{\varrho e_\varrho'}\right]\\
&\quad-\sum_{i+1}^{\sigma}\left[E_\varrho S_\varrho+E_{\varrho_1}S_{\varrho_1}+2E_{\varrho_2}S_{\varrho_2}+\ldots e_\varrho E_{\varrho e_\varrho}S_{\varrho e_\varrho}\right]
\end{aligned}$$

Setzt man hierin $B_1 = +1$, $B_2 = -1$, $B_1' = +1$, $B_2' = -1$ und alle anderen Coefficienten der Unstetigkeitsfunctionen gleich Null, so wird das Integral $\Pi_1(x)$ nur in den Punkten $x_1\, x_2$ unendlich wie

$$+\log(x-x_1), \quad -\log(x-x_2)$$

das Integral $\Pi_2(x)$ nur in $\xi_1\,\xi_2$ unendlich wie

$$+\log(x-\xi_1), \quad -\log(x-\xi_2)$$

d. h. es werden zwei Integrale dritter Gattung mit den Unstetigkeitspunkten $x_1 x_2$ resp. $\xi_1\,\xi_2$. Für diese erhält man also

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_1^p[\Pi_{1\varrho}^{(a)}\Pi_{2\varrho}^{(b)}-\Pi_{1\varrho}^{(b)}\Pi_{2\varrho}^{(a)})]=(p_{20}-p_{10})+(q_{20}-q_{10})$$

und da

$$p_{\varrho_0}=\Pi_1(\xi_\varrho) \qquad q_{\varrho_0}=\Pi_2(x_\varrho)$$

ist, so wird

$$\sum_1^p[\Pi_{1\varrho}^{(a)}\Pi_{2\varrho}^{(b)}-\Pi_{1\varrho}^{(b)}\Pi_{2\varrho}^{(a)}]=\int_{\xi_1}^{\xi_2}d\Pi_1(x\,x_1\,x_2)-\int_{x_1}^{x_2}d\Pi_2(x\,\xi_1\,\xi_2) \qquad (13)$$

wenn die Integrationswege weder einen Querschnitt noch auch sich gegenseitig schneiden.

Aus dieser Beziehung folgt nun der Satz von der Vertauschung von Parameter und Argument in den Normalintegralen dritter Gattung; die Ausdrücke für deren nicht verschwindende Periodicitätsmoduln, von den Normalintegralen zweiter Gattung etc., können ebenso aus (12) abgeleitet werden.

Wien im September 1881.

XVI.

Miscellen.

1.

Die Flächen, deren sämmtliche Normalen eine Kugelfläche berühren.

Diese Flächen sind schon lange bekannt *). Ihre Bestimmung geschieht wohl am einfachsten, wenn man zur Integration der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, die die genannte Eigenschaft der Fläche ausspricht, die Cauchy'sche Integrationsmethode**) benutzt.

Es sei das Centrum der Kugelfläche (0) zum Coordinatenanfangspunkt gewählt, — P ein beliebiger Punkt der Fläche, PA ihre Normale im Punke P, A der Berührungspunkt mit der Kugelfläche. Man soll ausdrücken, dass $\triangle AOP$ bei A rechtwinklig ist. (AP = die Entnung der Berührungsebene von P vom Punkte 0).

Es seien $x_1 x_2 x_3$ die Coordinaten von P_1, $p_1 p_2 p_3$ die part. Derivirten der Function f, die = 0 gesetzt, die Gleichung der Fläche giebt. Es sei der Radius der Kugelfläche = 1 gesetzt. Dann besteht die Gleichung für die gesuchte Fläche:

$$P.X - M^2 = 0 \qquad 1)$$

wo

---

*) **Monge**, Application de l'Analyse à la géométrie; **Enneper**, Göttinger Nachrichten 1872. etc.

) **Cauchy, Exercises d'Analyse etc. Bd. II. Siehe z. B. **Imschenetsky**, Sur l'intégration etc. Grunert Archiv Bd. 50.

$$P = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$$
$$X = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - 1$$
$$M = p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3$$

also sind die Differentialgleichungen der charakteristischen Linien der Fläche:

$$\frac{\partial x_i}{\partial v} = Xp_i - Mx_i, \quad \frac{\partial p_i}{\partial v} = Mp_i - Px_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

wo v der Parameter einer Linienschaar auf der Fläche ist, und die Integrationsconstanten Functionen eines anderen Parameters (n) [Paameter der charakt. Linien] sind.

Hieraus:
$$\frac{\partial P}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial M}{\partial v} = P, \quad \frac{\partial X}{\partial v} = 2M.$$

Wir können $P = 1$ annehmen, denn durch passende Wahl des Parameters v können wir setzen: $M = v$; denn nach der Gleichung 1) folgt: $X = v^2$.

Die Gleichungen der Characterist. Linien sind also

$$\frac{\partial x_i}{\partial v} = v^2 p_i - vx_i, \quad \frac{\partial p_i}{\partial v} = vp_i - x_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

also
$$\frac{\partial^2 p_i}{\partial v^2} = -p_i.$$

Die Integrale werden also, wenn man noch die Anfangswerte (die zu $v = 0$ gehören sollen) als Integrationsconstanten einführt:

$$p_i = p_{i0} \cos v - x_{i0} \sin v$$
$$x^i = vp_i - \frac{\partial p_i}{\partial v} = p_{i0}(v \cos v + \sin v) + x_{i0}(-v \sin v + \cos v)$$

da aber $P = 1$ angenommen wurde:

$$\Sigma x^2_{i0} = 1; \quad \Sigma p^2_{i0} = 1; \quad \Sigma x_{i0} p_{i0} = 0$$

dazu kommt noch nach den Principien der Cauchy'schen Integrationsmethode:
$$\Sigma x'_{i0} . p_{i0} = 0.$$

$x_{10}\, x_{20}\, x_{30}$ bleiben willkürliche Functionen von n, die nur der Gleichung $\Sigma x'^2_{i0} = 1$ genügen sollen. Sie repräsentiren eine beliebige Curve auf der Kugelfläche. Wenn man n als Bogenlänge dieser Curve wählt, zugleich $\Sigma x'^2_{i0} = 1$ also

$$p_1 = x_{20} x'_{30} - x'_{20} x_{30} \text{ etc.}$$

Unter diesen Bedingungen

$$x_i = p_{i0}(\cos v + v \sin v) + x_{i0}(- x \sin v + \cos v) \qquad (i = 1, 2, 3)$$

die gesuchte Fläche, und

$$p_i = p_{i0} \cos v - x_{i0} \sin v \qquad (i = 1, 2, 3)$$

die Richtungscosinuse der Normale im Punkte $x_1 x_2 x_3$.

Hieraus

$$\Sigma x_i x'_{i0} = 0, \qquad \Sigma p_i x'_{i0} = 0$$

also sind die Charakteristischen Linien Ebenencurven, gehen ihre Ebenen durch das Centrum der Kugelfläche und senkrecht zur Curve $(x_{10} x_{20} x_{30})$ — und längst der Charakt. Linien sind die Normalen der Curve zugleich Normalen der Fläche. Daraus folgt, dass die Charakt. Linien Kreisevolventen sind, und die Fläche wird erzeugt, indem die Spitze der Evolvente die Curve $(x_{10} x_{20} x_{30})$ beschreibt, während ihre Ebene senkrecht zur Curve $(x_{10} x_{20} x_{30})$ bleibt.

Die sämmtlichen Normalen berühren auch noch eine zweite Fläche, nämlich die Kegelfläche, welche durch die Ebenen

$$x_1 x'_{10} + x_2 x'_{20} + x_3 x'_{30} = 0$$

eingehüllt wird.

Klausenburg 1882 Januar.
(Ungarn).

Dr. Julius Vályi.

2.

Harmonische Teilung und consonirender Dreiklang.

Wenn der Musiker, auch der akustisch gebildete, schlechthin vom Dreiklang spricht, so versteht er darunter ausschliesslich den consonirenden Dreiklang: Durdreiklang und Molldreiklang. Beide Accorde sind so durchaus voll Consonanz, dass man mit ihnen vollkommen befriedigend schliessen kann. Das grössere Mass der Befriedigung kommt dem Durdreiklang (in enger Lage z. B. *c e g*) zu, weil er eine erhobene Stimmung, wogegen der Molldreiklang (z. B. *c es g*) Niedergeschlagenheit ausdrückt. Die Begründung, warum der am vollkommensten consonirende Accord grade aus drei verschiedenen Tönen besteht (denn die etwa noch hinzugefügte Octave gilt nur als

Repetition des Grundtons in höherer Lage) überlassen wir dem Zahlenmystiker. Soll der Accord aber einmal aus drei verschiedenen Tönen bestehen, so lässt sich beweisen, dass der Durdreiklang der vollkommenst consonirende Accord sein muss; während der Molldreiklang nur dadurch als consonirender Accord nachzuweisen ist, dass er aus denselben Elementen wie der Durdreiklang besteht. Beide bestehen in obiger enger Lage aus Quinte, grossen und kleinen Terz, aber im Durdreiklang liegt die grosse, im Molldreiklang die kleine Terz unten.

Es ist sattsam bekannt, dass man sich von der Griechenzeit her behufs Ausmessung der musicalischen Intervalle des Monochords oder der den betreffenden Tönen zukommenden Saitenlängen bediente; nicht jedem Mathematiker dagegen ist bekannt, dass man seit etwa Anfang vorigen Jahrhunderts angefangen hat, diesen Massstab zu verlassen, und an dessen Stelle die den betreffenden Tönen zukommenden Schwingungsmengen, in neuerer Zeit die denselben zukommenden Pulsmengen gesetzt hat. Die Vorzeit kannte die Mittel nicht, die Schwingungsmengen zu messen. Dies ist vollkommen erst nach der Entdeckung der Sirene möglich geworden. Zweifelhaft bleibt es, ob man bei allen Arten der Tonerzeugung von Schwingungen im eigentlichen Sinne sprechen könne. Unzweifelhaft aber ist es durch die Sirene in Verbindung mit den Helmholtz'schen Untersuchungen geworden, dass die Höhe der Töne, mag die Form der Mitteilung sein, welche sie wolle, sich nach der Anzahl den auf den Gehörsinn ausgeübten secousses, Stösse, pulsus oder Pulse bestimmt, weshalb man schliesslich auch die den Tönen zukommende Pulsmenge als Massstab der Intervalle angenommen hat. Man sieht leicht, dass der Massstab von dem äusseren tonerzeugendem Körper, (der Saitenlänge) durch das vom Ton in Bewegung gesetzte Medium (Schwingungsmenge) zu der unmittelbaren physiologisch-psychologischen Wirkung des Tons auf den Menschen (Pulsmenge) vorgedrungen ist und erst mit dieser Erkenntniss rechtfertigt sich vollkommen der Satz Leibnitz's, dass die Musik eine unbewusste Arithmetik der Seele sei.

Nun passt aber alles dasjenige nicht mehr, was man in den Lehrbüchern bei Gelegenheit der harmonischen Proportion und Teilung über die Anwendung derselben auf die Musik vorzutragen pflegt. Beschränkte man sich zur Erklärung der Bezeichnung: „harmonisch" auf die rein geschichtlich gehaltene Anmerkung, dass man früher, so lange die Saitenlänge als Massstab der Intervalle galt, von jener Proportion und Teilung in der Harmonie Gebrauch gemacht habe, so möchte die Sache angehen, allein meistenteils ist die Bemerkung so gefasst, dass der Glaube erweckt wird, als ob das frühere Verfahren

noch jetzt Geltung habe, und deshalb wird der mathematisch gebildete Musiker der Neuzeit stets mit grossem Erstaunen wahrnehmen, dass sein non plus ultra von Consonanz: der Durdreiklang auf der complicirteren: der harmonischen Proportion beruhen soll, während dann consequent die von jener abgeleitete Consonanz: der Molldreiklang auf der einfachsten und natürlichsten: der arithmetischen Proportion beruhen müsste.

Schon Gladny, der auf dem Standpunkt der Schwingungsmenge stand, hat in seiner Akustik §§ 8. 28. aufmerksam gemacht, dass die den Tönen zukommenden Saitenlängen des Monochords in umgekehrtem Verhältnisse zu den Schwingungsmengen stehen.

Saitenlängen:	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$
Schwingungsmengen:	1	2	3	5	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{4}$	$1\frac{1}{5}$.

Auf den Durdreiklang in enger Lage angewandt:

	Grundton	Terz	Quint	
Saitenlänge:	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{3}$	
Schwingungsmenge:	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$	oder 4 5 6.

Es ist klar, dass die Saitenlängen als Linien eine räumliche stetige harmonische Proportion mit 4 harmonischen Punkten ergeben. Die Saitenlänge des Grundtons sei AD', der Terz AC und der Quinte AB. Dann ist:

$$(AD - AC) : (AC - AB) = AD : AB$$
$$CD : CB = AD : AB$$
$$(1 - \tfrac{4}{5}) : (\tfrac{4}{5} - \tfrac{2}{3}) = 1 : \tfrac{2}{3}$$
$$\tfrac{1}{5} : \tfrac{2}{15} = 1 : \tfrac{2}{3}$$
$$\tfrac{3}{15} : \tfrac{2}{15} = \tfrac{3}{3} : \tfrac{2}{3}.$$

Dass die umgekehrten Werte jener harmonischen Proportion, also:

$$1 \quad \tfrac{5}{4} \quad \tfrac{3}{2}$$

eine arithmetische Proportion bilden müssen, sagt bereits ein allgemeiner Satz.

Die Schwingungs- oder Pulsmengen (denn in der Quantität sind beide gleich) des **Durdreiklangs** bilden demnach eine stetige **arithmetische**, nicht eine harmonische Proportion, und das ist für die Neuzeit die allein richtige Auffassung.

Solches ist auch schon öfter in der Akustik bemerkt und betont, ohne angemessenen Zutritt in die mathematischen Lehrbücher

zu finden. Weniger hat man auch in der Akustik bemerkt oder betont, dass nunmehr der **Molldreiklang** eine stetige **harmonische** Proportion bildet. Die Vorzeit hat sich auf Betrachtung des Molldreiklangs gar nicht eingelassen, sie hätte sonst finden müssen, dass er nach den Saitenlängen:

$$1 \quad \tfrac{5}{6} \quad \tfrac{2}{3}$$

eine stetige Proportion bildet. Nach den Pulsmengen bildet er die Reihe:

$$1 \quad \tfrac{6}{5} \quad \tfrac{3}{2}$$

oder in kleinsten ganzen Zahlen:

$$10 \quad 12 \quad 15,$$

er würde sich z. B. in der Tonleiter von *c* dur, wenn also $c = 1$ oder verdoppelt $= 2, 4, 8$ gesetzt würde, sich am natürlichten auf den Terz des Grundtons als: *e g h* entwickeln. Die Reihe 10 12 15 aber bildet eine stetige harmonische Proportion.

$$(15 - 12) : (12 - 10) = 15 : 10.$$

So ist Alles in Ordnung. Dem aller vollkommenst consonirenden Durdreiklang kommt die aller einfachste arithmetische, dem weniger vollkommen consonirenden Molldreiklang die verwickeltere harmonische Proportion oder Teilung zu. Die Consonanz des letzteren, über deren Begründung man oft gestritten hat, findet damit eine genügende theoretische Erklärung.

Was die geometrische Proportion anbetrifft, so kann sie bei keinem durch die Natur gegebenen Accorde angewandt werden, dagegen findet sie ihre unerlässliche Anwendung bei Berechnung der ür unsere Musik mit ihrer reichen Modulation notwendigen gleichschwebenden Temperatur. Und wenn diese einmal besteht, so stellen sich die beiden s. g. dissonirenden Dreiklänge verminderter und übermässiger, als stetige geometrische Proportionen dar.

Dem Verfasser kommt es hier nur darauf an, dazu beizutragen, dass bei Gelegenheit der Besprechung der harmonischen Proportion und Erklärung ihres Namens in den Lehrbüchern ihre frühere Verwendung für die Musik genau geschieden werde von ihrer heutigen Verwendbarkeit, welcher letzteren auch bei jener Gelegenheit endlich ihr gebührendes Recht geschehen muss.

Hannover. **Schnell**, Dr.

Errata. T. LXVII.

S. 228. fehlt beim 2ten Absatze die Bezugnahme auf Fig. 6.; S. 231. bei § 8., 1) auf Fig. 10.; S. 232. bei 3ª) auf Fig. 11.; S. 233. bei 3ᶜ) auf Fig. 12. ;— S. 282. Z. 7. lies: *BF* statt *CF* und S. 334. Z. 9. lies: *CJK* statt *HJK*.

3.

Beitrag zur Lösung von Gleichungen höhern Grades.

In folgender Weise lässt sich $a^n + b^n$ für constante $a+b$ nach Potenzen von ab entwickeln. Nach dem binomischen Satze hat man zunächst:

$$(a+b)^n - a^n - b^n = \sum_{p=1}^{p=n-1} \binom{n}{p} a^{n-p} b^p = R_1$$

Davon substrahirt

$$nab(a+b)^{n-2} = n \sum_{p=1}^{p=n-1} \binom{n-2}{p-1} a^{n-p} b_p$$

giebt als zweiten Rest:

$$R_2 = - \sum_{p=2}^{p=n-2} \frac{n}{p} (n-p-1) \binom{n-2}{p-2} a^{n-p} b^p$$

Davon subtrahirt

$$-n \frac{n-3}{2} (ab)^2 (a+b)^{n-4} = - \sum_{p=2}^{p=n-2} n \frac{n-3}{2} \binom{n-4}{p-2} a^{n-p} b^p$$

giebt als dritten Rest:

$$R_3 = \sum_{p=3}^{p=n-3} \frac{n}{p} \binom{n-p-1}{2} \binom{n-3}{p-3} a^{n-p} b^p$$

Fährt man so fort, so findet man nach Subtraction von

$$-(-1)^q \binom{n-q-1}{q-1} (ab)^q (a+b)^{n-2q}$$

als $(q+1)$ten Rest:

$$R_{q+1} = \sum_{p=q+1}^{p=n-q-1} (-1)^q \frac{n}{p} \binom{n-p-1}{q} \binom{n-q-1}{p-q-1} a^{n-p} b^p$$

ein Ausdruck, der verschwindet, sobald $q+1$ den Wert $\frac{n}{2}$ übersteigt. Folglich ist

$$a^n + b^n = (a+b)^n + \sum_{q=1}^{q=\frac{n}{2}} (-1)^q \frac{n}{q} \binom{n-q}{q-1} (ab)^q (a+b)^{n-2q}$$

Das Resultat der jedesmaligen Subtraction der Coefficienten von $a^{n-p} b_p$ hat sich aus der Relation

$$\frac{n}{p}\binom{n-p-1}{q-1}\binom{n-q}{p-q} - \frac{n}{q}\binom{n-q-1}{q-1}\binom{n-2q}{p-q} = -\frac{n}{p}\binom{n-p-1}{q}\binom{n-q-1}{p-q-1}$$

ergeben, welche nach Zerlegung der Binomialcoefficienten in ihre Factoren sich sofort bestätigt.

Specielle Resultate der gefundenen Entwickelung sind:

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$$
$$a^4 + b^4 = (a+b)^4 - 4ab(a+b)^2 + 2(ab)^2$$
$$a^5 + b^5 = (a+b)^5 - 5ab(a+b)^3 + 5(ab)^2(a+b)$$
$$a^6 + b^6 = (a+b)^6 - 6ab(a+b)^4 + 9(ab)^2(a+b)^2 - 2(ab)^3$$

Sind die Gleichungen

$$x + y = p; \quad x^n + y^n = q$$

gegeben, so lassen sie sich mit Anwendung obiger Formel lösen für $n = 1, 2 \ldots 9$. Im letzten Falle erhält man nämlich in Bezug auf xy eine Gleichung 4. Grades.

Hamburg, im April 1882.

Th. Sinram.

Litterarischer Bericht
CCLXX.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Joaquim Gomes de Souza. Mélanges de calcul intégral. Ouvrage posthume augmenté d'un mémoire de l'auteur sur le son et d'un avant-propos par M. Charles Henry. Leipzig 1882. F. A. Brockhaus. 4°. 280 S.

J. G. de Souza, geboren den 15. Februar 1829 in Brasilien, Sohn des Majors Jgnacio José d. S., zeigte von Kindheit an entschiedene Neigung zu psychologischen und physikalischen Studien, ward anfangs ohne allen Beruf zur Militärcarriere bestimmt, bis sich zeigte, dass er deren Anstrengungen nicht ertrug. Er studirte darauf in Rio Janeiro gleichzeitig Medicin und Mathematik, bestand, wie in beiden Fächern, auch glänzend das Ingenieur-Examen und beschäftigte sich ausserdem mit den Denkmälern französischer, englischer, deutscher und italienischer Kunst und Litteratur, wovon eine von ihm verfasste, sich auf die europäischen Hauptsprachen erstreckende Anthologie der Dichtungen Zeugniss giebt. Von 1854 bis 1856 besuchte er zuerst Europa; 1857 war er Deputirter der mathematischen Facultät von Rio Janeiro in der allgemeinen gesetzgebenden Versammlung. Auf seiner dritten Reise nach Europa starb er in London den 1. Juni 1863.

Die gegenwärtige Ausgabe enthält seine mathematischen Arbeiten zusammengeordnet. Es spricht sich darin eine unbegrenzte Begeisterung für die Lösung der Probleme exacter Naturwissenschaft aus. Dass diese genötigt sein soll vor unüberwindlichen Schwierigkeiten der Integration Halt zu machen, lässt ihm keine Ruhe. Es scheint ihm unzweifelhaft, dass Fleiss und Anstrengung der Mathematiker nur noch nicht ernst genug gewesen sind, wenn es ihnen nicht gelungen ist alle Differentialgleichungen zu lösen. Dieses Ziel glaubt

er in seiner ersten Abhandlung: „Ueber die allgemeinen Methoden der Integration" — soweit erreicht zu haben, dass nur die zur Zeit noch mangelnde Strenge seiner Methoden, sofern die angewandten Reihen nicht immer convergiren, spätere Ergänzungen nötig machen würde. Die Arbeit besteht aus einer grossen Anzahl von Theoremen, welche nach Analogie des Fourier'schen allgemeine Functionen in Form bestimmter Integrale darstellen. Solche Transformationen sind:

$$\int_\alpha^\beta f(\vartheta)\,\varphi(\vartheta+x)\partial\vartheta = F(x)$$

$$\int_\alpha^\beta f(\vartheta)\,\varphi(\vartheta x)\partial\vartheta = F(x)$$

$$\int_\alpha^\beta [f(\vartheta)+xf_1(\vartheta)]\,\varphi(\vartheta+x)\partial\vartheta = F(x)$$

$$\int_\alpha^\beta [f(\vartheta)+xf_1(\vartheta)]\,\varphi(\vartheta x)\partial\vartheta = F(x)$$

welche zu Anfang als Problem aufgestellt werden mit der Forderung die Function φ zu bestimmen. Ueber die Anwendung dieser Transformationen zur Integration linearer partieller Differentialgleichungen wird nur eine kurze Andeutung gegeben, dann die nicht linearen partiellen Gleichungen gleichfalls sehr kurz behandelt, die Gleichungen mit totalen Differentialen auf die partiellen zurückgeführt. Die übrigen Abhandlungen sind: „Ueber die Bestimmung der Constanten in den Integralen der partiellen Differentialgleichungen ausgedrückt durch den Anfangszustand des Systems". „Beweis einiger allgemeinen Sätze über die Relationen neuer transcendenter Functionen". „Ueber die Bestimmung der unbekannten Functionen unter dem Zeichen bestimmter Integration". „Ueber die Analogie zwischen den linearen Differentialgleichungen und den gewöhnlichen algebraischen Gleichungen". „Ueber den Ton". „Satz über die willkürlichen Functionen" (Bruchstück). Die Formeln sind durch eine weit grössere Anzahl wesentlicher Druckfehler entstellt als am Schlusse angezeigt sind.

H.

A treatise on the theory of determinants with graduated sets of exercises for use in colleges and schools. By Thomas Muir, M. A., F. R. S. E., mathematical master in the high school of Glasgow. London 1882. Macmillan and Co. 240 S.

Das Lehrbuch beginnt mit einer Betrachtung der Determinanten 3. Ordnung, woran sich noch einiges über Determinanten 4. und 5. Ordnung anschliesst. Dieses 1. Capitel ist Einleitung genannt; doch hat alles folgende keinen Bezug darauf, und man kann es, wie der Verfasser sagt, überschlagen. Die dann im 2. Capitel folgende Theorie der allgemeinen Determinanten beschränkt sich nicht auf die Fundamentalsätze, nach deren vollständiger Behandlung vielmehr noch eine grosse Anzahl instructiver Sätze über Transformation der Determinanten entwickelt werden. Die Methode ist eigentümlich, doch die Deduction mindestens ebenso einfach und kurz, wie es bekannte Methoden zu leisten vermögen. Der concinne Ausdruck fördert die Deutlichkeit; hierin ist besonders das Verfahren einbegriffen in der Rechnung nur diejenigen Elemente, mit denen operirt wird, auszuschreiben. Die Definition bestimmt die Vorzeichen der Terme absolut; doch wird gleich nachher zu der weit brauchbarern relativen Bestimmung geschritten. Die Anwendung der Permutation, wo sie factisch stattfindet, hätte wol mehr hervorgehoben werden sollen; sie wird fast unausgesprochen als selbstverständlich vollzogen. Der überraschend einfache Schluss, durch welchen man sonst zu dem Nullwert der Determinante mit zwei gleichen Reihen gelangt, findet sich hier nicht; vielmehr folgt die Bemerkung, dass die Determinante bei Vertauschung zweier Reihen ihr Vorzeichen wechselt, erst viel später, nachdem der genannte Satz direct bewiesen ist; doch ist auch der directe Beweis sinnreich und leicht verständlich. Dass zu keinem Beweise Zerfällung in Unterdeterminanten gebraucht wird, ist sehr zu billigen. Anwendungen der Determinantenlehre sind nur in den Uebungsaufgaben enthalten, welche auf jeden Abschnitt mit Anweisung zur Lösung folgen. Dies gilt sogar von der Auflösung der linearen Gleichungssysteme, welche in der Theorie nicht besonders behandelt ist. Das 3. Capitel hat zum Gegenstande folgende specielle Formen von Determinanten: Continuanten, Alternanten, symmetrische, schiefe und Pfaff'sche Determinanten, Determinanten von Determinanten, Functionsdeterminanten; das 4. Capitel enthält die Geschichte der Determinantentheorie. Zu den Aufgaben stehen am Schlusse des Buchs die Resultate. H.

Neue Studien über die Integration linearer Differential-Gleichungen. Zweite Fortsetzung. Von Simon Spitzer. Wien 1882. Carl Gerold's Sohn. 80 S.

Ueber die 1. Fortsetzung ist im 262. litt. Ber. p. 21 Nachricht gegeben. Die gegenwärtige enthält 3 Abschnitte. Im ersten werden viele Specialfälle der Gleichung

$$x(x-1)y''+[Bx+B_1(x-1)]y'+[Ax+A_1(x-1)]y=0$$

integrirt; im zweiten die Gleichung 3. Ordnung mit linearen Coefficienten durch erste Integration auf eine lineare Gleichung 2. Ordnung mit Coefficienten 2. Grades reducirt. Der letzte Abschnitt enthält verschiedene die Integration von Differentialgleichungen betreffende Sätze. H.

Geometrie.

Theorie der trilinear-symmetrischen Elementargebilde. Von Dr. Benno Klein. Mit 4 lithographirten Tafeln. Marburg 1881. N. G. Elwert. 78 S.

Diese Theorie ist ihrem wesentlichen Inhalte nach identisch mit der algebraischen Theorie der binären kubischen Formen, geometrisch gestaltet und rein geometrisch hergeleitet; doch wird die kubische Form nicht vorausgesetzt, sondern ihre Auffindung bildet den Schlussstein. Die Arbeit stellt zugleich einen Versuch dar, in die Geometrie der Lage eine neue Verwandtschaft einzuführen und von dieser Nutzen zu ziehen. Vermöge dieser Verwandtschaft sind in 3 Elementargebilden je 3 Elemente so einander zugeordnet, dass durch 2 derselben das dritte bestimmt ist. Der Name „trilineare Verwandtschaft" bezieht sich auf ihren Ausdruck durch eine lineare Gleichung zwischen 3 Variabeln für Gebilde einer Dimension. Von ihr ist die sogenannte ein-zweideutige Verwandtschaft ein specieller Fall. Von dieser ausgehend giebt der Verfasser zunächst eine geometrische Begründung derselben, definirt dann die trilineare Verwandtschaft auf geometrischer Grundlage und zeigt die Beziehung der erstern zu ihr in allgemeinerer Auffassung. Einen besondern Fall bildet die trilinear-symmetrische Verwandtschaft zwischen den Elementen des Trägers zweier Gebilde, wo die 3 im allgemeinen zu 2 beliebigen Elementen desselben gehörenden Elemente in eins zusammenfallen. Die Hauptabschnitte der Arbeit sind: 1) Projectivische Beziehung eines Elementargebildes auf die Reihe der Elementenpare eines zweiten involutorischen Elementargebildes. 2) Trilineare und trilinear-symmetrische Verwandtschaft. 3) Das Tripelnetz. H.

Géométrie. La science de l'espace. Par Lucien Buys, Capitaine du Génie. Bruxelles 1881. C. Muquardt. 608 S.

Der Anlage nach ist das durch den Titel bezeichnete Buch zu einem Universalwerk bestimmt. Auch kann man wol, obgleich die Zugehörigkeit nicht ausgesprochen ist, das im J. 1880 erschienene,

im 264. litt. Ber. S. 44 besprochene Buch: „La science de la quantité“ — als ersten, das gegenwärtige als zweiten Teil des Gesammtwerks betrachten, welches für den Gebrauch in belgischen Militärschulen bearbeitet zu sein scheint, da manche Bezugnahme darauf hindeutet. In der Geometrie werden 3 Abteilungen (divisions) aufgestellt: 1) Elemente der synthetischen Geometrie und Trigonometrie; 2) analytische; 3) descriptive Geometrie. Nur die 1. Abteilung ist im Vorliegenden enthalten. Auch in der Geometrie, wie in Betreff der Arithmetik früher bemerkt, tritt die Neigung hervor, gebräuchliche Benennungen durch systematisirende zu ersetzen. Während aber in jenem abstracteren Zweige solche Bezeichnungen, die trotz aller Umständlichkeit doch zur Bestimmung nicht ausreichen, dem Verständniss äusserst hinderlich waren, ist hier wenigstens überall darauf Bedacht genommen, dass der Leser weiss, von welchen Gegenständen die Rede ist. Die Systematik bleibt jedoch auf die obersten Einteilungen beschränkt; im Lehrstoff selbst kann man eher ordnende Gesichtspunkte vermissen. Er stellt sich als eine Entfaltung vieler wissenswerten Dinge dar. Im einzelnen ist der Vortrag leichtfasslich und correct, wiewol ohne tiefere Auffassung und logische Gründlichkeit. Auf praktische Anwendung ist vielfach Rücksicht genommen.

H.

Die Polbahnen des Hooke'schen Gelenks. Dissertation von **Oswald Marbach**, Königl. Gewerbeschullehrer in Potsdam. Berlin 1880. Ernst u. Korn. 47 S.

Zwei ein starres rechtwinkliges Kreuz bildende Gerade rotiren, jede in einer besondern festen Ebene um den Durchschnittspunkt. Durch diese Bedingung ist die Bewegung des Systems geometrisch bestimmt, die Geschwindigkeit der einen Geraden bestimmt die der andern. Das so geführte Kreuz heisst das Hooke'sche Gelenk. Die Führung lässt sich durch 2 Bügel bewirken, deren jeder die Enden einer Geraden fasst und um eine Axe drehbar ist, deren Verlängerung die Gerade senkrecht im gemeinsamen Punkte trifft. Die hier über das Gelenk angestellten Betrachtungen sind ausschliesslich geometrisch. Es wird namentlich die Bahn des um die Linieneinheit vom festen Punkte abstehenden Punktes der momentanen Rotationsaxe untersucht und Polbahn, die relativ zum starren System bestimmte Bahn Polcurve genannt. Die eine rollt auf der andern. Von der bewegten Polcurve wird die Einhüllende in Betracht gezogen. Es werden die Krümmungsradien berechnet, eine Construction gegeben, die Gleichungen der Curven hergeleitet und verschiedene andre Fragen untersucht. Reichliche Zeichnungen auf 2 grossen Figurentafeln sind beigefügt.

H.

Die synthetische Geometrie der Ebene. Ein Lehrbuch für den Schulgebrauch und Selbstunterricht. Von Dr. **Julius Wenck**, Director der Herzogl. Baugewerb- und Gewerbschule zu Gotha. Mit 243 Figuren. Leipzig und Heidelberg 1882. C. F. Winter. 274 S.

Der Gegenstand des Buchs ist die neuere oder höhere synthetische Geometrie, fälschlich in der Vorrede genannt „die neuere oder synthetische Geometrie", als ob die Euklidische nicht synthetisch wäre. Die successiven 8 Abschnitte behandeln: die Punktreihen und Strahlenbüschel; die geradlinigen Figuren; die projectivischen Verwandtschaften derselben; die harmonischen und polaren Eigenschaften des Kreises; Strahlenbüschel im Kreise und Tangenten am Kreise; die Potenzlinie und die Aehnlichkeitspunkte; die projectivischen Verwandtschaften des Kreises; die Kegelschnitte. Rechnung kommt bei der Herleitung in Anwendung, doch wird das Hauptgewicht auf die Constructionen gelegt. Die Kegelschnitte gehen durch Verwandtschaft aus dem Kreise hervor. Der Vortrag ist correct und leicht verständlich, nicht karg an Worten, wo es die Deutlichkeit verlangt, setzt einen gewissen Grad von allgemeiner mathematischer Bildung, nicht aber viel Specialkenntnisse voraus. Die Art der Einführung des unendlich entfernten Punktes auf einer Geraden giebt Anlass diesen Gegenstand zu besprechen. Es wird nämlich aufangs ganz richtig gesagt: die 2 Lagen des Punktes C, welche dem Werte des Streckenverhältnisses

$$\frac{AC}{CB} = -1$$

entsprechen, seien gleichwertig und bedeuten mithin eine einzige Lage von C. Hätte der Verfasser mit dieser rein nominellen Definition, derzufolge C ein Punkt heisst, nicht ist und nicht als Punkt gedacht werden kann, — abgeschlossen, statt nun selbst den falschen Schluss zu ziehen, wir seien berechtigt anzunehmen, dass beide unendlich entfernten Punkte in einen zusammenfallen, so würde der Leser zwar stets in Gefahr kommen, der Gleichwertigkeit in Bezug auf das Streckenverhältniss das Zusammenfallen unterzuschieben; doch würde das dessen Fehler sein. Der sonstigen Gründlichkeit hätte es entsprochen ausführlich auf die sachliche Bewandtniss einzugehen und dem Misverständniss vorzubeugen. Wenn die Streckenverhältnisse zweier Punkte C eine beständig abnehmende Differenz haben, so kann der Abstand beider Punkte beständig zu- oder abnehmen, nämlich jenachdem der Wert (-1) zwischen beiden Verhältnissen liegt oder nicht. Demgemäss giebt es auch 2 Fälle, die bei verschwindender Differenz stattfinden können, sie können zusammenfallen oder sich unendlich von einander entfernen. Das Zusammenfallen in unendlicher Ferne ist auf beiden Seiten von AB

möglich, nie aber wenn AB zwischen beiden C liegt. Zu der obigen Annahme sind wir also nicht berechtigt, der darin liegende Widerspruch tritt sogleich zutage, sobald wir 2 Streckenverhältnisse ihre Werte durchlaufen lassen. Um exact zu reden, müssen wir sagen: der unendlich ferne Punkt C ist der stylistische Vertreter des nicht existirenden und nicht denkbaren Punktes, welcher dem Streckenverhältniss $= -1$ entspricht. Als solcher ist er von Natur nur einer; denn sein Wesen liegt allein in jenem Werte. H.

Vorträge über darstellende Geometrie von Johann Matthäus Eisert, Zeichenlehrer. Kaiserslautern. Karl Gotthold. 43 S.

Die kleine Schrift lehrt in gewöhnlicher Weise die Darstellung der Punkte, Geraden, Ebenen und ebenflächigen Körper durch Normalprojection auf 2 Ebenen und durch Spuren in denselben. Sie ist hauptsächlich für den Gebrauch an Seminarien, wo die Zeit zu grösserer Ausdehnung des Unterrichts fehlt, in dieser Kürze und Beschränkung bearbeitet. H.

Discussion of a geometrical problem: with bibliographical notes. By Marcus Baker, U. S. coast survey, Washington, D. C. (Extr. from the bulletin of the society). Philadelphia 1880. Collins. 11 S.

Die Aufgabe ist, ein rechtwinkliges Dreieck zu finden, wenn die Längen der die 2 spitzen Winkel halbirenden Transversalen gegeben sind. Sie ward in „The Ladies' Diary“ 1797 gestellt und wird hier auf 6 verschiedenen Wegen von verschiedenen Autoren auf kubische Gleichungen zurückgeführt, die letzte dieser Gleichungen auch durch Construction mittelst der Schnitte zweier Parabeln aufgelöst. Am einfachsten wird die Gleichung, wenn der tang. eines der halben spitzen Winkels die gesuchte Grösse ist. Zum Schluss werden Nachrichten über die einzelnen Bearbeiter gegeben. H.

Mechanik.

Ueber eine Art Bewegungen eines Punktes auf einer Kugelfläche. Dissertation von Ernst Jürgensen aus Berlin. Halle a. S. 1881. 42 S.

Es wird die Bewegung eines Punktes auf einer Kugel berechnet, der von einem Punkte derselben Kugelfläche mit einer Intensität proportional einer beliebigen Potenz der Entfernung mit positivem

oder negativem ganzem Exponenten angezogen wird. Diese Bewegung ist als Specialfall in derjenigen bekannten Bewegung auf Rotationsfläche enthalten, wo die eine Projection der Flächengeschwindigkeit constant ist. Es war daher kein Problem zu lösen, sondern nur die Lösung zu discutiren. Dies ist denn auch recht eingehend und ausführlich geschehen. Namentlich war die Periodicität der Höhe und des Fortschritts im Umlauf um die Axe zu untersuchen. In den vor Gl. (5) stehenden 2 Gleichungen ist zu erinnern, dass je ein Term fehlt; der Fehler hat keinen Einfluss. H.

Der Angriffspunkt des hydrostatischen Auftriebes. Theoretische Untersuchungen auf dem Gebiete der Statik und Hydrostatik. Von H. Haedicke, Kais. Marineingenieur a. D. Zürich 1881. Orell Füssli u. Co. 60 S.

Als Einleitung der Schrift werden einige Sätze aus der Statik in Erinnerung gebracht, insbesondere die Verlegung des Angriffspunkts der Kraft, dann die Reduction des Luftwiderstandes gegen ein Geschoss besprochen, um schliesslich auf das eigentliche Thema, die Statik schwimmender Körper zu kommen. Der Verfasser setzt die Behandlungsweise derselben von Seiten der Autoren Bouguer, Euler, Chapman, Poisson, Duhamel, James Peake, Carl Mielichhofer, Weissbach, J. Scott Russel, Rankine, M. Bischof, E. Gardiner Fishbourne, Bertin, W. H. White und zweier Leitfäden auseinander und teilt sie ein in solche, die ohne weiteres den Angriffspunkt des Auftriebes in den Deplacementsschwerpunkt verlegen, solche, die ihn zu bestimmen versuchen, aber bei derselben Annahme stehen bleiben, solche die die Angabe vermeiden, und solche, welche direct die Verschiedenheit der Punkte behaupten. Nach den allgemeinen Gesetzen der Statik wird, wie er sagt, kein Punkt, sondern nur eine Wirkungslinie der Resultante bestimmt. Wenn nun doch, meint er, in diesem Falle nur ein bestimmter Angriffspunkt zulässig sei, so müsse der Grund gefunden werden; keiner jener Autoren habe die Frage untersucht. Er selbst ist nun zu dem Ergebniss gelangt, dass wirklich nur ein bestimmter Punkt in der Wirkungslinie den Bedingungen genüge. Er definirt ihn, mit Berufung auf Weissbach, als denjenigen, in welchem man den schwimmenden Körper stützen muss, damit er genau so getragen werde, wie durch die hydrostatischen Pressungen, und findet, dass er in der doppelten Tiefe des Deplacementsschwerpunktes liegt.

Die gesammte Darstellung lässt viel an Klarheit der Auffassung und des Ausdrucks vermissen. In der Einleitung ist kein Wort davon gesagt, dass die Verlegbarkeit des Angriffspunkts nur im starren

System gültig ist, ferner nie die Frage gestellt, ob in einem bestimmten Falle eine Resultante existirt. Bei Beurteilung der Vorgänger hat der Verfasser die auf der Hand liegende Deutung ganz vergessen: dass, wenn es sich nur um Bestimmung der Wirkungslinie handelte, und deren verticale Richtung voraus bekannt war, ihre Bestimmung mit der eines Punktes auf ihr gleichbedeutend sein musste, dass also diejenigen Autoren, welche einen Angriffspunkt angaben, damit nichts weiter als die Lage der Verticalen ausdrücken konnten. In der nun folgenden eignen Untersuchung des Verfassers ist es schwer einen vernünftigen Gedanken zu entdecken. Die oben genannte „Definition" ist völlig nichtssagend; sie spricht die Bedingung, die der Punkt zu erfüllen habe, gar nicht aus. Das blosse Gleichgewicht bestimmt keinen Punkt, wie vorher bekannt war. Dass die Höhe des Punktes zugleich ein Ausdruck der Stabilität, wenigstens in einer Richtung, sein sollte, war denkbar; doch mit dieser Frage macht sich die Rechnung nichts zu tun. Vielmehr wird stets ein Angriffspunkt vorausgesetzt, und nur die Höhe des Schwerpunkts über ihm gesucht, die in den betrachteten Fällen die Hälfte des Abstands vom Niveau ist. Der Irrtum geht also aus keinem Räsonnement hervor, sondern ist willkürlich vom Verfasser hineingetragen.

H.

Physik.

Die Continuität des gasförmigen und flüssigen Zustandes. Von Prof. Dr. J. D. van der Waals. Aus dem Holländischen übersetzt und mit Zusätzen versehen von Dr. Friedrich Roth. Leipzig 1881. Johann Ambrosius Barth. 168 S.

Die Schrift enthält die Principien der mechanischen Wärmetheorie, vorzugsweise eingehend auf die Folgerungen, die daraus auf die Constitution der Materie gezogen werden. Sie sucht durchzuführen, dass der gasförmige und flüssige Aggregatzustand nur quantitativ und graduell verschieden sind, mithin stetig in einander übergehen können. Der Beweis stützt sich auf die Gleichung der Isotherme, welche für beide von gleicher Form ist. Als Antrieb zur Wahl des Gegenstandes nennt der Verfasser den Wunsch, die Constante, welche in der von Laplace entwickelten Capillaritätstheorie als Mass der Cohäsion eingeführt wird, die jedoch aus den Endgleichungen stets herausfällt, gleichwol bei gewöhnlicher Methode nicht entbehrt werden kann, kennen zu lernen. Der Inhalt der Schrift ist: Allgemeine Betrachtungen. Ableitung der Grundgleichung für die Isotherme. Analytischer Ausdruck für den molecularen Druck.

Ueber die potentielle Energie einer Flüssigkeit. Einfluss der Zusammensetzung, dann der Ausdehnung der Molecüle. Beziehungen zwischen dem molecularen Druck und dem Volumen. Anwendungen der Isotherme nämlich: Der Spannungscoefficient; die Zusammendrückbarkeit der Gase; der Ausdehnungscoefficient; Versuche von Andrews; kritische Temperatur. Werte von K (wozu ein Nachtrag). Moleculare Dimensionen. Anwendung auf die mechanische Wärmetheorie. Uebereinstimmende Eigenschaften der Normalcurven des gesättigten Dampfes und der Flüssigkeit für verschiedene Körper und eine Andeutung für die Gestalt dieser Curven bei Gemengen. Die Ausdehnungs- und Zusammendrückbarkeitscoefficienten in übereinstimmenden Zuständen verschiedener Flüssigkeiten. H.

Algemeene Theorie der Vloeistoffen. Door H. Kamerlingh Onnes. Eerste en tweede Stuk. Uitgegeven door de Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. Amsterdam 1881. Johannes Müller. 4°. 47 S.

Unter dem Namen „Vloeistof" werden tropfbare Flüssigkeiten und Gase zusammenbegriffen. Es werden zuerst über die Beschaffenheit der Molecüle die Annahmen aufgestellt: sie sollen elastische Körper von wenig veränderlichen Abmessungen sein; ihre Kräfte sich auf Normaldruck proportional dem Quadrat der Dichte reduciren. Dann wird die Gleichung der Isothermen gesucht, und Bemerkungen über deren allgemeine Form gemacht, dann aus ihrer Gleichung die kritische Temperatur, das kritische Volum und der kritische Druck bestimmt. Der Verfasser folgt hauptsächlich der Theorie von van der Waals. Es folgt die Herleitung von dessen allgemeinem Flüssigkeitsgesetze. Dann wird die Gleichförmigkeit der Isothermen als unmittelbarer Ausdruck der Gleichförmigkeit der Bewegung gefunden. Das weitere handelt von der kinetischen Theorie der Dampfspannungen und dem Gesetz der übereinstimmenden Dampfspannungen. Im 2. Stück wird der oben aufgestellte Satz: Die Gleichförmigkeit der thermodynamischen Flächen ist der Ausdruck der Gleichförmigkeit der Bewegung der Molecüle — weiter entwickelt. H.

Ueber die latente Wärme der Dämpfe. Eine Theorie der Dampf- und Gas-Form der Körper auf Grund der Aequivalenz von Wärme und Arbeit. Von Carl Puschl, Capitular des Benedictiner Stiftes Seitenstetten. Zweite, wesentlich verbesserte Auflage. Wien 1881. Alfred Hölder. 59 S.

Die erste Auflage ist im 263. litt. Ber. S. 32 besprochen. Der Inhalt in der neuen Bearbeitung ist folgender: Allgemeine Grund-

sätze. Arbeit der Wärme in Kreisprocessen. Empirische Folgerungen. Die innere Arbeit der Wärme in einem Kreisprocesse ist im allgemeinen nicht null. Hypothese für gesättigte Dämpfe. Ausdruck der latenten Verdampfungswärme. Eine merkwürdige Bedingung der Sättigung. Verhalten gesättigter Dämpfe zu den ideellen Gasgesetzen. Anwendung auf Wasserdampf. Bemerkenswerte Sättigungspunkte. Allgemeiner Verlauf der Function $pv:t$. Zusammenhang des Verhaltens der Dämpfe mit dem der Flüssigkeiten. Verlauf der 2 innern Resultanten eines Dampfes. Hypothese über deren Ursprung. Immanente und effective Sättigungswärme. Specifische Wärme bei constantem Volum und bei constantem Drucke. Anwendung auf die Dämpfe von Wasser und Quecksilber. Geschwindigkeit des Schalles. Verhalten der Dämpfe bei Entfernung von der Sättigung. Möglichkeit einer Verflüssigung der Gase durch Hitze. Hypothese über den physischen Zustand der Sonne. H.

Ueber die stationäre elektrische Strömung in einer unendlichen Ebene und einer Kugeloberfläche. Dissertation von Carl Hildebrandt, Realschullehrer in Gandersheim. Göttingen. 4°. 18 S.

Es werden zuerst sämmtliche vorausgehende Arbeiten über den Gegenstand für verschiedene Flächen, theoretische und experimentelle, aufgeführt, dann wird die Aufgabe für eine unbegrenzte Ebene und beliebige Einströmungspunkte in den 2 Fällen, wo die Ausströmung im Unendlichen und wo sie in beliebigen Punkten geschieht, in Angriff genommen. Das Verfahren stützt sich auf den von Kirchhoff entdeckten Satz, dass jede conforme Abbildung eines Strömungsnetzes wieder ein Strömungsnetz darstellt. Ausgehend von dem einfachsten Falle einer Strömung aus einem Punkte ins unendliche, wo die Strömungslinien gerade Radien, die Isothermen concentrische Kreise sind, werden dieselben durch conforme Abbildnng auf die genannten Fälle übertragen, Anwendungen auf Specialfälle gemacht und mit den Ergebnissen früherer Arbeiten verglichen. Eine neue Abbildung durch stereographische Projection löst dann die Aufgabe für die Kugelfläche. Die Strömungsnetze sind auf 2 Figurentafeln vor Augen gestellt. H.

Preisaufgabe
der
Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft
in
Leipzig.

Mathematisch-naturwissenschaftliche Section.

Für das Jahr 1885.

Die Theorie der Flächen dritter Ordnung hat durch die neueren Untersuchungen von Schläfli, Klein, Zeuthen und Rodenberg einen gewissen Abschluss erhalten, insofern es jetzt möglich ist, die Gesammtheit der bei diesen Flächen auftretenden Gestalten mit Leichtigkeit zu überblicken. Hieran anknüpfend wünscht die Gesellschaft

eine in gleichem Sinne durchzuführende Untersuchung der allgemeinen Flächen vierter Ordnung.

Die mannigfachen Betrachtungen über die Gestalten der Complexfläche, welche Plücker in seiner „Neuen Geometrie des Raumes" gegeben hat, sowie die allgemeinen Untersuchungen von Rohn über Kummer'sche Flächen werden dabei ebenso als Vorarbeiten zu betrachten sein, wie die Angaben von Zeuthen und Crone über die Flächen vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt. Preis 700 Mark.

Die anonym einzureichenden Bewerbungsschriften sind, wo nicht die Gesellschaft im besonderen Falle ausdrücklich den Gebrauch einer anderen Sprache gestattet, in deutscher, lateinischer oder französischer Sprache zu verfassen, müssen deutlich geschrieben und paginirt, ferner mit einem Motto versehen und von einem versiegelten Couvert begleitet sein, das auf der Aussenseite das Motto der Arbeit trägt, inwendig den Namen und Wohnort des Verfassers angiebt. Die Zeit der Einsendung endet mit dem 30. November des angegebenen Jahres, und die Zusendung ist an den Secretär der Gesellschaft (für das Jahr 1882 Geh. Hofrath Prof. Dr. R. Leuckart, Thalstrasse 15b) zu richten. Die Resultate der Prüfung der eingegangenen Schriften werden durch die Leipziger Zeitung im März oder April des folgenden Jahres bekannt gemacht.

Die gekrönten Bewerbungsschriften werden Eigentum der Gesellschaft, welche sich vorbehält, im gegebenen Falle die dafür ausgesetzten Preise nach ihrem Ermessen von 700 Mark auf 1000 Mark zu erhöhen.

W. Roscher, Präses.

G. Curtius. W. Hankel. A. Leskien. R. Leuckart.

W. Scheibner. G. Voigt. F. Zarncke. F. Zirkel.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

CLIX.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Bauer, G., Gedächtnissrede auf Otto Hesse. München, Franz. 60 Pf.

Hartmann, O. E., d. röm. Kalender. Hrsg. v. L. Lange. Leipzig, Teubner. 8 Mk.

Hildesheimer, J., die astronom. Kapitel in Maimonidis. Abhdlg. üb. d. Neumondsheiligung. Uebers. u. erläut. Berlin, Stuhr. 2 Mk.

Lehrbücher, Sammlungen und Tabellen.

Fuhrmann, A., Aufgaben a. d. analyt. Mechanik. 2. Tl. 2. Afl. Leipzig, Teubner. 3 Mk. 60 Pf.

Hermes, O., Elementaraufg. a. d. Algebra. 2. Afl. Berlin, Winckelmann & S. 1 Mk. 60 Pf.

Hochheim, A., Aufgaben a. d. analyt. Geometrie d. Ebene. 1. Hft. A. Aufgaben. Leipzig, Teubner. 1 Mk. 50 Pf. B. Auflösungen. 1 Mk. 50 Pf.

Kleyer, A., vollst. gelöste Aufg.-Sammlg. a. allen Zweigen d. Rechenkunst etc. 33—37. Hft. Stuttgart, Maier. à 25 Pf.

Königbauer, J., geometr. Aufgaben f. Mittelsch. etc. Amberg, Habbel. 80 Pf.

Schlömilch, O., fünfst. logarithm. u. trigon. Tafeln. Wohlf. Schulausg. 8. Afl. Braunschweig, Vieweg & S. 1 Mk.

Struve, K., Elemente d. Mathematik. 4. Tl. Berlin, Parey. 1 Mk. 20 Pf.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Gegenbauer, L., üb. d. verallg. Legendre'sche Symbol. Wien, Gerold's S. 30 Pf.

Klein, F., üb. Riemann's Theorie d. algebr. Functionen u. ihrer Integrale. Leipzig, Teubner. 2 Mk. 40 Pf.

Kronecker, L, Grundzüge e. arithmet. Theorie d. algebraischen Grössen. Berlin, G. Reimer. 6 Mk.

Lembcke, C., allg. Arithmetik in ihrer Bez. z. prakt. Rechnen. Wismar, Hinstorff. 2 Mk.

Schlepps, F., die Dezimalbrüche. 2. Afl. Leipzig, Scholtze. 80 Pf.

Spitzer, S., neue Studien üb. Integration linearer Differential-Gleichungen. 2. Fortsetzg. Wien, Gerold's S. 3 Mk. 60 Pf.

Starý, V., Arithmetika. 4. Vyd. Prag, Tempsky. 2 Mk. 40 Pf.

Suchsland, E., system. Entwick. d. gesammten Algebra. 3. Tl. Stolp, Schrader. 50 Pf.

Winckler, A., üb. d. transcend. Integrale. Wien, Gerold's S. 40 Pf.

Geometrie.

Abendroth, W., Anfangsgr. d. analyt. Geometrie d. Ebene, f. d. ob. Stufe d. höh. Schulen u. zum Selbstunterr. Leipzig, Hirzel. 1 Mk. 80 Pf.

Binder, W., die Centralprojection als Hilfsconstr. Wien, Braumüller. 2 Mk.

Heger, R., Leitf. f. d. geometr. Unterr. 1. Tl. Breslau, Trewendt. 1 Mk. 50 Pf.

Hertter, C. F., zeichnende Geometrie. 1. Abth. Stuttgart, Metzler. 50 Pf.

Kantor, S., die Configurationen (3,3)10. Wien, Gerold's S. 90 Pf.

Milinowski, A., element.-synthet. Geometrie d. Kegelschnitte. Leipzig, Teubner. 8 Mk. 80 Pf.

Salmon, G., analyt. Geometrie d. höh. ebenen Kurven. Deutsch bearb. v. W. Fiedler. 2. Afl. Leipzig, Teubner. 11 Mk. 20 Pf.

Schöffler, B., synthet. Theorie d. Curven II. Ordnung f. d. Selbstunt. bearb. Wien, Seidel & S. 2 Mk.

Schubert, H., I. Lösung d. Projectivitätsprobl. II. Elementarer Beweis d. Feuerbach'schen Satzes. Hamburg, Nolte. 2 Mk. 50 Pf.

Smolík, F., Elemente d. darst. Geometrie. Prag, Tempsky. 3 Mk. 60 Pf.

Trigonometrie.

Bendt, F., ebene u. sphärische Trigonometrie. Leipzig, Weber. Geb. 1 Mk. 50 Pf.

Günther, S., parabol. Logarithmen u. parabol. Trigonometrie. Leipzig, Teubner. 2 Mk. 80 Pf.

Praktische Geometrie, Geodäsie.

Gradmessung, europäische. Das schweiz. Dreiecknetz, hrsg. v. d. schweiz. geodät. Comm. 1. Bd. Zürich, Höhr. 10 Mk.

Hüttl, C. E., Kartenlesen, Kartenproject., Kartendarst. u. Vervielfält. Wien, Hölzel. 1 Mk.

Theile, F., Anleitg. zu barometr. Höhenmessungen. Dresden, Axt. 1 Mk.

Mechanik.

Gonne, Ch. F., das Gleichgewicht in der Bewegung. Dresden, v. Zahn. 2 Mk. 50 Pf.

Zur Theorie vom kosmischen Massendruck. Jahresber. d. Bresl. Physikal. Ver. 1882. Breslau, Korn. 1 Mk. 20 Pf.

Technik.

Diekelmann, E., Schlüssel zur telegraph. Corresp. zw. Rheder u. Capitain. 3. Afl. Stralsund, Meincke.

Gennerich, O., Anl. zu d. freien perspect. Zeichnen nach d. Natur. 8. m. Atlas in 4. Berlin, Winckelmann & S. 3 Mk.

Mahler & Eschenbacher, d. Sprengtechnik im Dienste der Civiltechnik. Freiberg, Craz & G. 3 Mk.

Optik, Akustik und Elasticität.

Guichard, E., die Harmonie d. Farben. Dtsche Ausg. m. Text v. G. Krebs. 17—18. (Schluss-) Lfg. Fol. Frankfurt, Rommel. à 4 Mk.

Erd- und Himmelskunde.

Gretschel, H., Lexicon d. Astronomie. Leipzig, Bibliogr. Institut. 5 Mk. 50 Pf.; geb. 6 Mk.

Hartwig, G., das Leben d. Luftmeeres. N. A. Wiesbaden, Bischkopff. 4 Mk.; geb. 5 Mk. 50 Pf.

Wüllerstorf-Urbair, B. v., die meteorol. Beob. am Bord d. Polarschiffes „Tegethoff". Wien, Gerold's S. 9 Mk.

Nautik.

Jahrbuch, kl. nautisches, f. d. J. 1882. 23. J. Bremerhaven, v. Vangerow. 60 Pf.

Mittheilungen aus d. Gebiete d. Seewesens. Hrsg. v. k. k. hydrogr. Amte. 10. J. Nr. 1 u. 2. Wien, Gerold's S. prcplt. 12 Mk.

Physik.

Annalen d. physik. Central-Observatoriums, hrsg. v. H. Wild. J. 1880. 2 Thle. Leipzig, Voss' S. 30 Mk.

Dronke, A., Einleitg. in d. analyt. Theorie der Wärmeverbreitung. Leipzig, Teubner. 2 Mk.

Gretschel, H., Katechismus der Physik. 3. Afl. Leipzig, Weber. Geb. 2 Mk. 50 Pf.

Reis, P., Lehrbuch d. Physik. 5. Afl. Leipzig, Quandt & H. 8 Mk. 20 Pf.

Trappe, A., Schul-Physik. 9. Afl. Breslau, Hirt. 3 Mk.

Vermischte Schriften.

Abhandlungen d. kgl. Akad. d. Wiss. zu Berlin. Math. Abhandlgn. aus d. J. 1880. Berlin, Dümmler. Cart. 1 Mk. 40 Pf.

Burckhardt, W., mathemat. Unterrichtsbriefe. 24—26. Brief. Leipzig, Gressner & Schr. à 1 Mk.

Denkschriften d. k. k. Akad. d. Wissensch. Mathem.-naturw. Cl. 43. Bd. Wien, Gerold's S. 46 Mk.

Helmholtz, H., wissensch. Abhandlungen. 1. Bd. 2. Abth. Leipzig, Barth. 14 Mk.

Huxley's, Th. C., in Amerika gehalt. wissensch. Vorträge etc. Deutsch v. J. W. Spengel. 2. Afl. Braunschweig, Vieweg & S. 3 Mk.

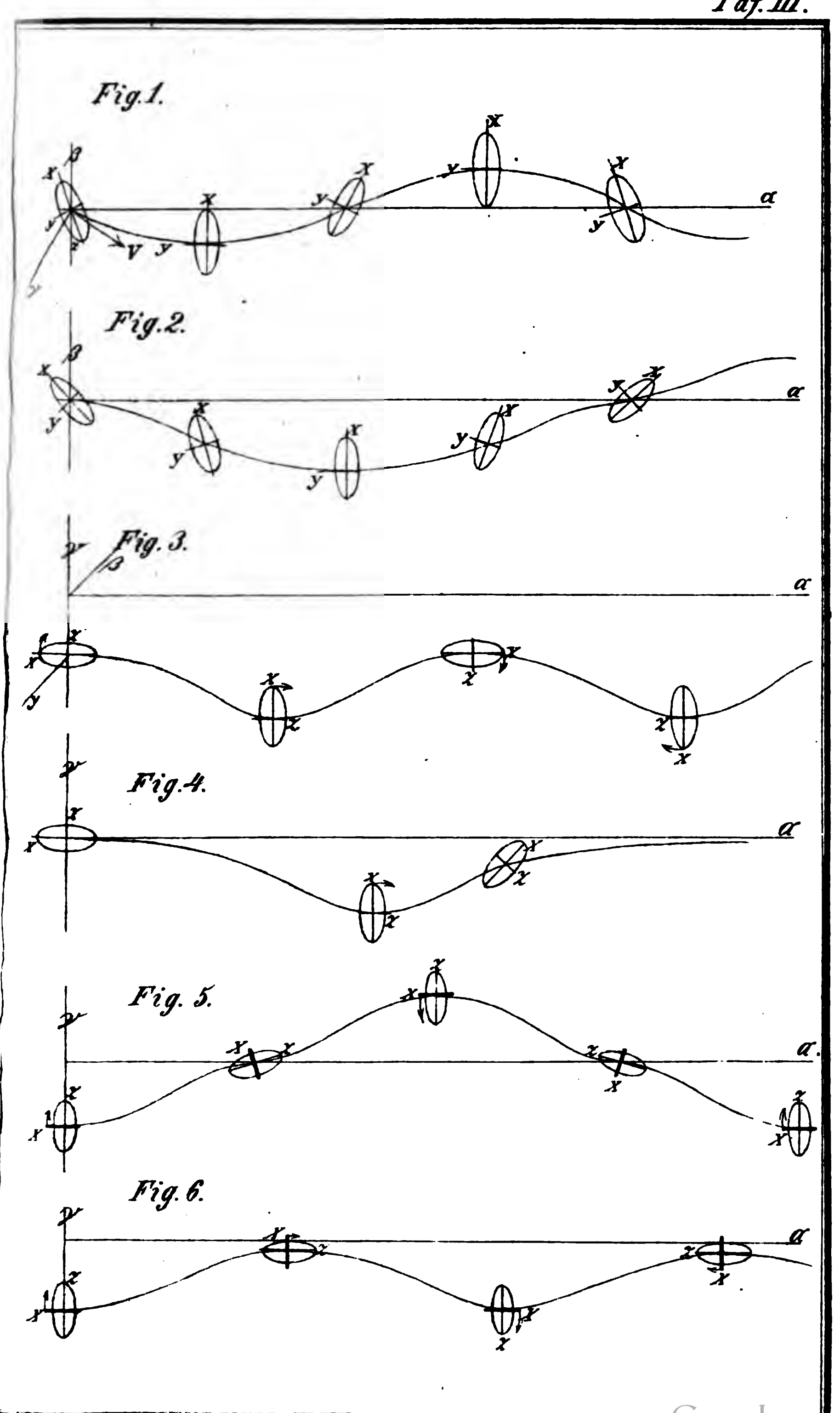
Journal f. d. reine u. angew. Mathematik. Hrsg. v. L. Kronecker u. K. Weierstrass. 92. Bd. (3 Hfte.) 1. u. 2. Hft. Berlin, G. Reimer. prcplt. 12 Mk.

Kirchhoff, G., gesamm. Abhandlgn. 2. Abth. Leipzig, Barth. 9 Mk.

Sitzungsberichte der math.-physik. Cl. d. kgl. b. Akad. d. Wiss. zu München. J. 1882. 2. Hft. München, Franz. 1 Mk. 20 Pf.

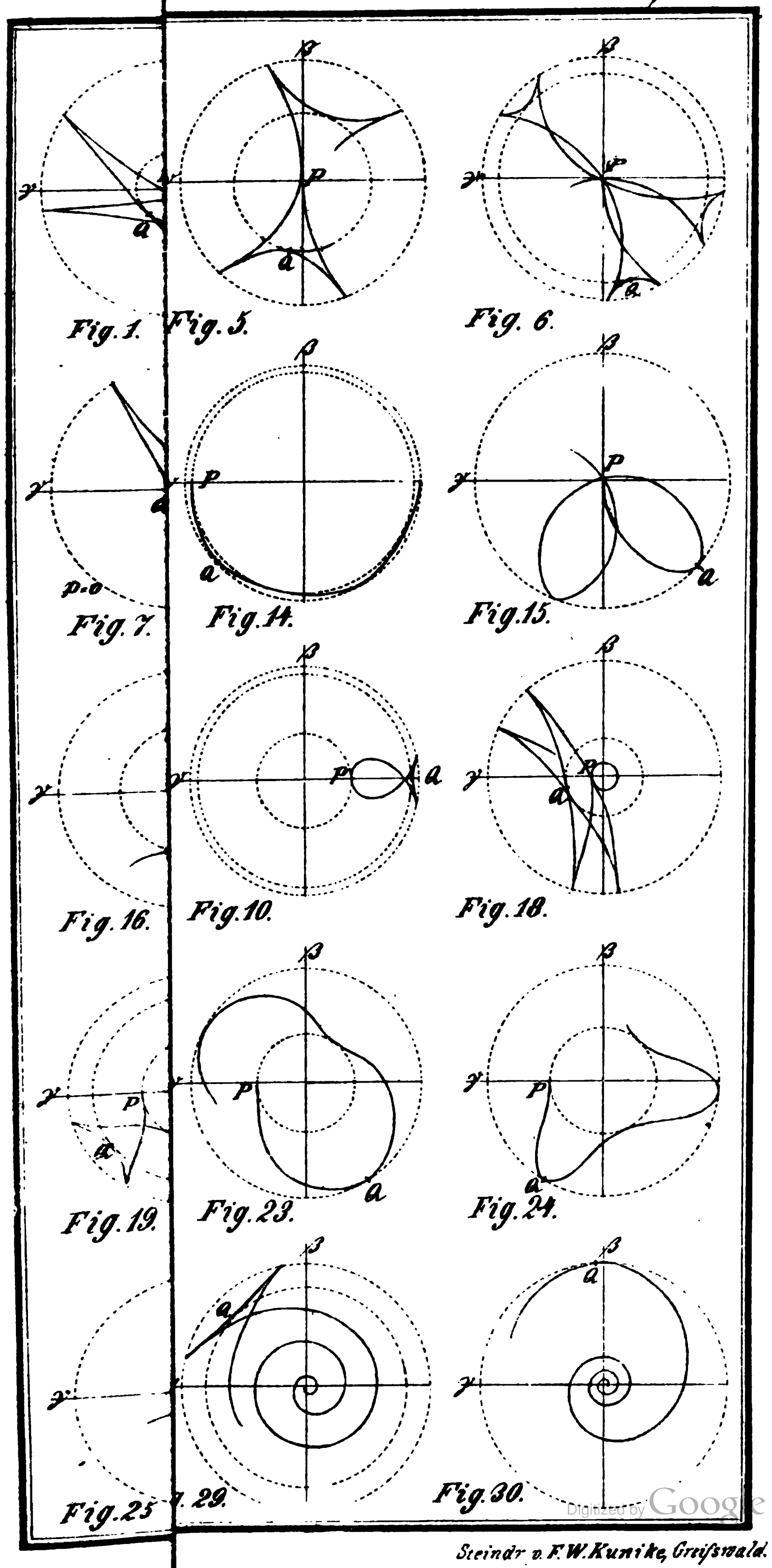
Sitzungsberichte d. k. Akad. d. Wiss. Math.-naturw. Cl. 2. Abth. 84. Bd. 3. u. 4. Hft. Wien, Gerold's S. 3 Mk. 20 Pf.

Taf. III.

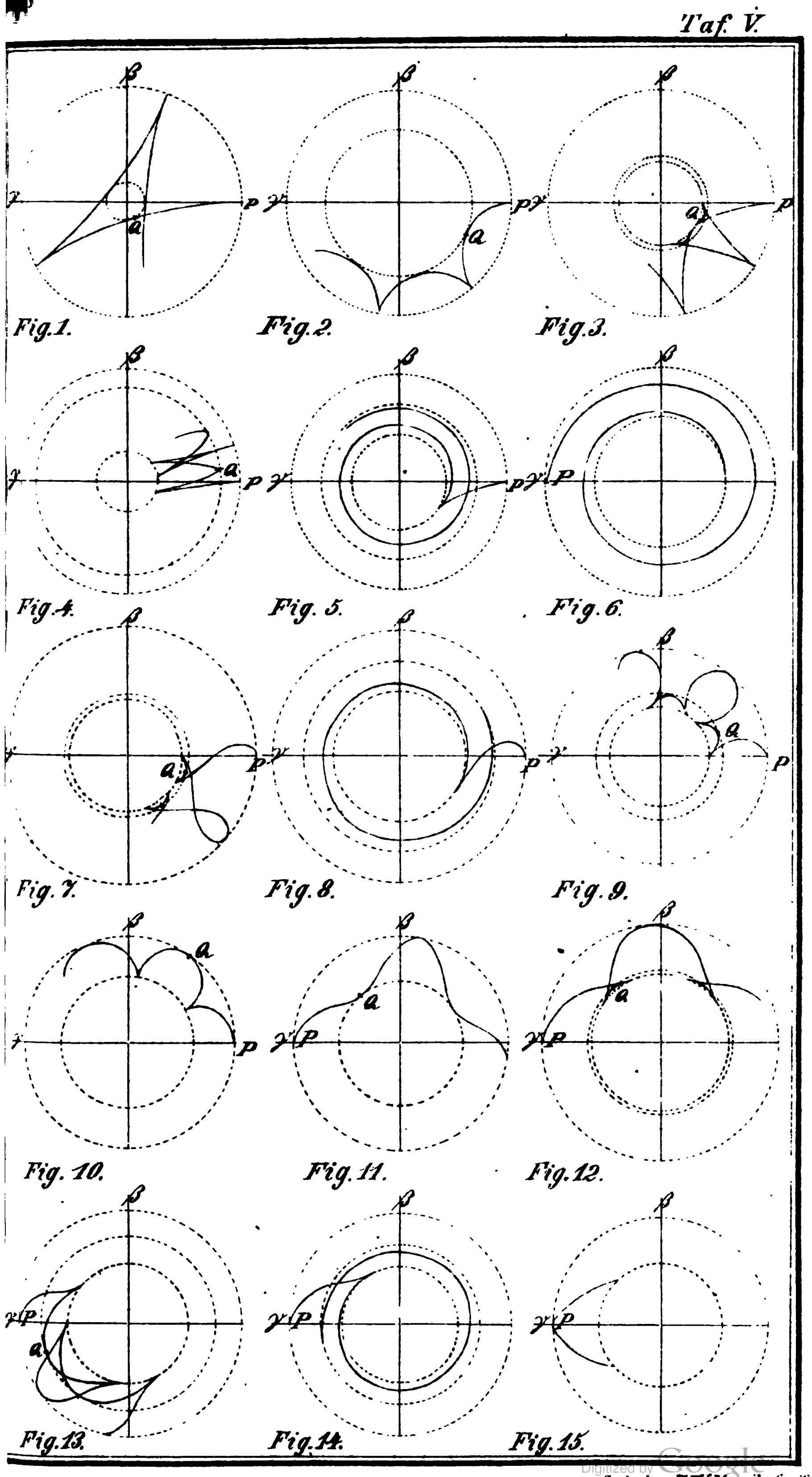


Steindr. v. F. W. Kunike, Greifsw.





Steindr. v. F. W. Kunike, Greifswald.



Steindr. v. F. W. Kunike, Greifsw.

Taf. VI.

Fig. 3.

XIII. Pl

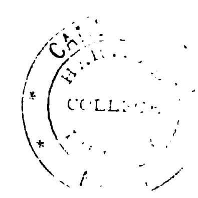
Steindr. v. F. W. Kunike, Greifswald.

Einsendungen für das „Archiv der Mathematik und Physik" erbitten wir nur unter der Adresse des Herrn Prof. Dr. R. Hoppe in Berlin, SW. Lindenstrasse 88.

Leipzig. C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung.

INHALT.

Greifswald, gedruckt bei F. W. Kunike.



ARCHIV

der

MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Gegründet von

J. A. Grunert,

fortgesetzt von

R. Hoppe.

Achtundsechzigster Teil. Drittes Heft.

(Mit 1 lithographirten Tafel.)

Leipzig.
C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,
J. Sengbusch.

1882.

XVII.

Ueber diejenigen Functionen von sechs Variabeln, welche die Eigenschaft haben, bei Vertauschung derselben nur sechs verschiedene Werte anzunehmen, ohne in Bezug auf fünf derselben symmetrisch zu sein.

Von

Otto Dziobek.

Dass es solche Functionen giebt, folgt unmittelbar daraus, dass man ein dreimal transitives System von Substitutionen bilden kann, welches $\frac{6!}{6} = 120$ Substitutionen umfasst. In den folgenden Zeilen sind die einfachsten Formen für diese Functionen aufgestellt und zwei Anwendungen von denselben gemacht worden. Mit Hülfe derselben kann man die Invarianten der binären Formen sechsten Grades darstellen. Durch Vervollkommung der Methode muss es möglich sein, die Darstellung der Invarianten und Covarianten der binären Formen jeden Grades unabhängig von der gewöhnlich benutzten symbolischen Formen zu geben, sobald die Theorie der Substitutionen für eine ebenso grosse Elementenzahl entwickelt ist. — Ferner habe ich den Zusammenhang der Theorie des Pascal'schen Sechsecks mit diesen Functionen klargelegt und gezeigt, wie sich die Eigenschaften desselben, von dieser Seite betrachtet, in der natürlichsten Weise ergeben.

§ I.

Sind $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$ 6 beliebige Grössen und $(\alpha_\varkappa, \alpha_\lambda)$ eine beliebige symmetrische Function der Grössen $\alpha_\varkappa, \alpha_\lambda$, so nimmt der Ausdruck

$$((\alpha_1, \alpha_2), \quad (\alpha_3, \alpha_4), \quad (\alpha_5, \alpha_6)),$$

welcher eine symmetrische Function der drei Grössen (α_1, α_2), (α_3, α_4), (α_5, α_6) bezeichnet, 15 verschiedene Werte an. Bildet man nun den Ausdruck

$$(((\alpha_1, \alpha_2)\ (\alpha_3, \alpha_4)\ (\alpha_5, \alpha_6))((\alpha_1, \alpha_6)\ (\alpha_4, \alpha_5)\ (\alpha_3, \alpha_2))(\alpha_1, \alpha_3)(\alpha_4, \alpha_6)(\alpha_2, \alpha_5))$$
$$((\alpha_1, \alpha_5)(\alpha_4, \alpha_2)(\alpha_3, \alpha_6))((\alpha_1, \alpha_4)(\alpha_2, \alpha_6)(\alpha_3, \alpha_5)))$$

welcher wieder eine symmetrische Function der fünf Klammergrössen bedeutet, so erhält derselbe bei allen möglichen Vertauschungen der Indices, wie in der Theorie der Substitutionen bewiesen wird, sechs von einander verschiedene Werte.

Die 120 Substitutionen, welche dieser Ausdruck zulässt, sind folgende:

I.

1) die identische Substitution.

2) 15 regelmässige Substitutionen, von denen jede aus 2 Transpositionen besteht, nämlich:

(12)(34), (34)(56), (56)(12); (16)(45), (45)(32), (32)(16); (13)(46), (46)(25), (25)(13); (15)(42), (42)(36), (36(15); (14)(26), (26)(35), (35)(14).

3) 20 regelmässige Substitutionen, von denen jede aus zwei Cyklen von drei Elementen besteht, nämlich:
(135)(246); (531)(642); (134)(625); (431)(526); ... u. s. w.

4) 24 cyklische Substitutionen 5ter Ordnung, nämlich:
(23564); (34615); (45126); (56231); (61342); (12453)
und die zweite, dritte und vierte Potenz jeder dieser Substitutionen.

5) 30 cyklische Substitutionen vierter Ordnung, nämlich:
(1324); (4231); (3546); (6453); (5162); (2615) ... u. s. w.

6) 10 regelmässige Substitutionen, von denen jede aus drei Transpositionen besteht, nämlich:
(12)(35)(46); (12)(36)(45); (15)(26)(34); (16)(25)(34); (13)(24)(56); (14)(23)(56); (16)(35)(24); (14)(36)(25); (13)(26)(45); (15)(64)(32).

7) 20 cyklische Substitutionen sechster Ordnung, nämlich:
(123456); (163245); (124365); (162354); (126534); (134652); (132546); (142635); (152463); (146253)
und die fünfte Potenz jeder dieser Substitutionen.

Die Substitutionen der Nummern 1), 2), 3), 4), deren Anzahl = 60 ist, sind einer geraden Anzahl von Transpositionen aequivalent; sie bilden daher ebenfalls ein conjugirtes System.

Die sechs verschiedenen Werte, welche oben definirte Function annimmt, sind, wenn der Kürze wegen

$$((\alpha_1 \alpha_2)(\alpha_3 \alpha_4)(\alpha_5 \alpha_6))$$

mit

$$(12,\ 34,\ 56)$$

u. s. w. bezeichnet wird:

$$\text{II.}\quad \begin{cases} B_I = ((12, 34, 56)(16, 54, 32)(13, 46, 25)(15, 42, 36) \\ \quad (14, 26, 35)) \\ B_{II} = ((12, 34, 56)(26, 54, 31)(23, 46, 15)(25, 41, 36) \\ \quad (24, 16, 35)) \\ B_{III} = ((32, 14, 56)(36, 54, 12)(31, 46, 25)(35, 42, 16) \\ \quad (34, 26, 15)) \\ B_{IV} = ((42, 31, 56)(46, 51, 32)(43, 16, 25)(45, 12, 36) \\ \quad (41, 26, 35)) \\ B_V = ((52, 34, 16)(56, 14, 32)(53, 46, 12), (51, 42, 36) \\ \quad (54, 26, 31)) \\ B_{VI} = ((62, 34, 51)(61, 54, 32)(63, 41, 25)(65, 42, 31) \\ \quad (64, 21, 35)) \end{cases}$$

Man sieht, dass je zwei dieser Functionen eine, aber auch nur eine Klammer gemeinsam haben. Jede der sechs Functionen giebt Anlass zu einem conjugirten System von Substitutionen, welches dem in I. angeführten ähnlich ist. Um nun diejenigen Substitutionen zu finden, welche zweien dieser Systeme, z. B. dem aus B_I und B_{II} hervorgehenden gemeinschaftlich sind, hat man nur diejenigen in I. angeführten Substitutionen zu wählen, welche den Ausdruck

$$(12,\ 34,\ 56)$$

den beide Functionen gemeinschaftlich haben, unverändert lassen.

Es sind dies folgende 24 Substitutionen:

1) die Einheit.

2) (12)(34), (34)(56), (56)(12).

3) (1324), (1423), (3546), (3645), (5162), (5261).

4) (12)(35)(46), (12)(36)(45), (34)(51)(62); (34)(52)(61), (56)(13)(24), (56)(14)(23).

5) (135)(246); (531)(642); (136)(245), (631)(542), (352)(461), (253)(164), (514)(623), (415)(326).

Die übrigen 24 Substitutionen, welche den Ausdruck (12, 34, 56) ebenfalls unverändert lassen, haben die Eigenschaft, B_I in B_{II} und B_{II} in B_I überzuführen, wie daraus folgt, dass dieselben durch Multiplication obiger 24 Substitutionen mit der Transposition (12) entstehen, welche Transposition die Eigenschaft hat, B_I in B_{II} und B_{II} in B_I überzuführen. Daraus folgt, dass eine beliebige symmetrische Function von B_I und B_{II} die Form hat

$$\{\{\alpha_1 \alpha_2\}\{\alpha_3 \alpha_4\}\{\alpha_5 \alpha_6\}\}$$

wobei die geschweiften Klammern wieder symmetrische Functionen anzeigen.

Da nun der Ausdruck

$$(12,\ \ 34,\ \ 56)$$

rational durch

$$\{\{\alpha_1 \alpha_2\}\{\alpha_3 \alpha_4\}\{\alpha_5 \alpha_6)\}\}$$

und die symmetrischen Functionen der α ausgedrückt werden kann, (da beide dieselben Substitutionen zulassen), so folgt, dass man setzen kann:

$$[B_I B_{II}] = (12,\ 34,\ 56) = ((\alpha_1 \alpha_2)(\alpha_3 \alpha_4)(\alpha_5 \alpha_6)$$

wo $[B_I B_{II}]$ eine symmetrische Function von B_I und B_{II} bedeutet, in deren Coefficienten symmetrische Functionen der α enthalten sind. Combinirt man auf diese Weise alle B, so erhält man das folgende System von Gleichungen:

$$\text{III.}\quad\left\{\begin{array}{l}
[B_I B_{II}] = ((\alpha_1\alpha_2)(\alpha_3\alpha_\cdot)(\alpha_5\alpha_6)) \\
[B_I B_{III}] = ((\alpha_1\alpha_3)(\alpha_4\alpha_6)(\alpha_2\alpha_5)) \\
[B_I B_{IV}] = ((\alpha_1\alpha_4)(\alpha_2\alpha_6)(\alpha_3\alpha_5)) \\
[B_I B_V] = ((\alpha_1\alpha_5)(\alpha_4\alpha_2)(\alpha_3\alpha_6)) \\
[B_I B_{VI}] = ((\alpha_1\alpha_6)(\alpha_5\alpha_4)(\alpha_3\alpha_2)) \\
[B_{II} B_{III}] = ((\alpha_3\alpha_5)(\alpha_4\alpha_2)(\alpha_1\alpha_2)) \\
[B_{II} B_{IV}] = ((\alpha_6\alpha_4)(\alpha_5\alpha_1)(\alpha_2\alpha_3)) \\
[B_{II} B_V] = ((\alpha_5\alpha_4)(\alpha_2\alpha_6)(\alpha_3\alpha_1)) \\
[B_{II} B_{VI}] = ((\alpha_6\alpha_3)(\alpha_4\alpha_1)(\alpha_2\alpha_5)) \\
[B_{III} B_{IV}] = ((\alpha_4\alpha_5)(\alpha_1\alpha_2)(\alpha_3\alpha_6)) \\
[B_{III} B_V] = ((\alpha_6\alpha_5)(\alpha_1\alpha_4)(\alpha_3\alpha_2)) \\
[B_{III} B_{VI}] = ((\alpha_6\alpha_2)(\alpha_3\alpha_4)(\alpha_5\alpha_1)) \\
[B_{IV} B_V] = ((\alpha_5\alpha_2)(\alpha_3\alpha_4)(\alpha_6\alpha_1)) \\
[B_{IV} B_{VI}] = ((\alpha_5\alpha_6)(\alpha_4\alpha_2)(\alpha_3\alpha_1)) \\
[B_V B_{VI}] = ((\alpha_4\alpha_6)(\alpha_2\alpha_1)(\alpha_3\alpha_5))
\end{array}\right.$$

Aus diesen Formeln folgt z. B.

$$\{[B_I B_{II}][B_{III} B_{IV}][B_V B_{VI}]\}$$
$$=\{((\alpha_1\alpha_2)(\alpha_3\alpha_4)(\alpha_5\alpha_6))((\alpha_1\alpha_2)(\alpha_3\alpha_6)(\alpha_4\alpha_5))(\alpha_1\alpha_2)(\alpha_3\alpha_5)(\alpha_4\alpha_6))\}$$

wo die geschweiften Klammern wieder eine symmetrische Function andeuten sollen.

Aus der Form des Ausdrucks rechts geht sofort hervor, dass man ihn als eine symmetrische Function von α_1 und α_2 ansehen kann, deren Coefficienten symmetrische Functionen der α sind, und hieraus folgt, dass man setzen kann:

$$(\alpha_1\alpha_2) = [[B_I B_{II}][B_{III} B_{IV}][B_V B_{IV}]].$$

Ganz ähnlich erhält man noch 14 andere Formeln, welche mit der obigen zusammen ein System bilden, welches man aus III. erhält, wenn man den Buchstaben α mit dem Buchstaben B, die arabischen mit den lateinischen Ziffern und die runden mit den eckigen Klammern vertauscht. Nun folgt aus dem System III. das System II., daher erhält man auch aus II. ein richtiges Formelsystem, wenn man α mit B, die arabischen mit den lateinischen Ziffern und die runden mit den eckigen Klammern vertauscht.

Man erhält daher das Resultat, dass, wenn man die symmetrischen Functionen der α als bekannt voraussetzt, die Auflösungen der Gleichungen II. nach den α durch Formeln von ganz ähnlichem Bau geliefert werden.

Die Beziehung der α zu den B ist daher mit einem Worte eine reciproke.

§ II.

Wendet man in den Gleichungeen II. eine Vertauschung der arabischen Ziffern an, so wird diese Substitution eine Vertauschung der Grössen B_I, B_{II} u. s. w. zur Folge haben, d. h. eine und nur eine Substitution der lateinischen Ziffern. Da nun die α rational durch die B ausgedrückt werden, so kann auch umgekehrt eine Substitution der arabischen Ziffern nur einer Substitution der lateinischen Ziffern entsprechen. Daraus folgt, dass die sämmtlichen Substitutionen S der arabischen Ziffern den sämmtlichen Substitutionen U der lateinischen Ziffern in der Weise entsprechen, dass je einer Substitution S eine und nur eine Substitution U und umgekehrt entspricht. Wendet man auf das System II. zwei Substitutionen der arabischen Ziffern hintereinander an, so wird dadurch eine Vertauschung der B herbeigeführt, welche derjenigen Substitution der lateinischen Ziffern äquivalent ist, die aus der Zusammensetzung der den beiden obigen

entsprechenden gebildet wird; d. h. dem Producte irgend zweier Substitutionen S entspricht das Product der entsprechenden U.

Man erhält zu den Transpositionen der lateinischen Ziffern die entsprechenden 12 Substitutionen der arabischen Ziffern, wenn man in III. statt $[B_I B_{II}]$, $[B_I B_{III}]$ u. s. w. die Transpositionen $(I\ II)$, $(I\ III)$ u. s. w. und rechts statt der Grössen $((\alpha_1\alpha_2)\,(\alpha_3\alpha_4)\,(\alpha_5\alpha_6)$ u. s. w. die Substitutionen (12)(34)(56) u. s. w. setzt. Hieraus kann man dann, da jede Substitution in Transpositionen zerlegt werden kann, zu jeder Sustitution der lateinischen Ziffern die entsprechende Substitution der arabischen Ziffern finden.

So erhält man z. B.

$$(I\ II)(III\ IV)(V\ VI) = (12)(34)(56)(12)(36)(45)(12)(46)(35)$$
$$= (12)^3(34)(56)(36)(45)(46)(35)$$

oder da

$$(12)^3 = (12),\ (34)(56)(36)(45)(46)(35) = 1$$
$$(12) = (I\ II)(III\ IV)(V\ VI).$$

Auf diese Weise erhält man auch die Transpositionen der arabischen Ziffern durch Substitutionen der lateinischen Ziffern ausgedrückt und zwar durch Formeln, die aus den vorigen durch Vertauschung der lateinischen mit den gleich grossen arabischen Ziffern hervorgehen, wie unmittelbar aus den früheren Bemerkungen folgt.

Denken wir uns nun jede Substitution S der arabischen Ziffern mit der entsprechenden Substitution U der lateinischen Ziffern durch ein Gleichheitszeichen verbunden, so erhält man ein System A von 720 Gleichungen.

Es sollen nun alle diejenigen Substitutionen gefunden werden, welche diese symbolischen Gleichungen im Complex in sich selbst überführen, falls man dieselben in beiden Substitutionen links und rechts vom Gleichheitszeichen anwendet, wobei unter Anwendung einer Substitution auf eine andre diejenige Substitution versteht, welche man erhält, wenn man in den Buchstaben der anderen die erste Substitution ausführt, ohne die Form derselben zu ändern. Ist T_1 die erste, T_2 die zweite Substitution, so ist die resultirende Substitution

$$T_1\,T_2\,T_1^{-1}.$$

Zunächst ist klar, dass das System A in sich selbst übergeht, wenn man links irgend eine Substitution der arabischen Ziffern und rechts die entsprechende der lateinischen Ziffern anwendet, denn seien S_0 und U_0 dieselben und S und U irgend zwei andere entsprechende, so ist:

$$S = U$$

$$S_0 = U_0$$

und daher

$$S_0 S S_0^{-1} = U_0 U U_0^{-1}$$

Man kann sich aber auch so ausdrücken: das Product zweier entsprechenden Substitutionen $S_0 U_0$ hat die Eigenschaft, das System A der 720 symbolischen Gleichungen in sich selbst überzuführen; denn links wird natürlich blos die Substitution S_0, rechts blos U_0 zur Anwendung kommen. Man erhält auf diese Weise 720 Substitutionen V von der Form SU. Sie bilden ein conjugirtes System, denn sind $S_0 U_0$ und $S_1 U_1$ zwei derselben, so ist, da der Substitution $S_0 S_1$ die Substitution $U_0 U_1$ entspricht, auch $S_0 S_1$, $U_0 U_1$ oder $S_0 U_0$, $S_1 U_1$ eine von ihnen.

Dieses conjugirte System ist intransitiv, da die lateinischen Ziffern wieder durch lateinische und die arabischen durch arabische ersetzt werden.

Sind S_0 und U_1 zwei nicht entsprechende Substitutionen, so kann die Anwendung der Substitution $S_0 U_1$ auf das System A dasselbe nicht in sich selbst überführen, denn sind S und U irgend zwei entsprechende Substitutionen, so würde sein

$$S_0 S S_0^{-1} = U_1 U U_1^{-1}$$

oder, da

$$S_0 S S_0^{-1} = U_0 U U_0^{-1}$$

$$U_1 U U_1^{-1} = U_0 U U_0^{-1}$$

d. h. die Anwendung der Substitution U_0 sowol als die von U_1 führte jede Substitution U in ein und dieselbe Substitution über, was nur dann möglich, wenn $U_0 = U_1$ wäre.

Wenn also noch Substitutionen vorhanden sind, die auf die Gleichungen A angewendet, dieselben im Complex in sich selbst überführen, so müssen dieselben die Eigenschaft haben, auch lateinische mit arabischen Ziffern zu vertauschen. Ja, es ist sogar notwendig, dass dann sämmtliche arab. durch lateinische Ziffern und umgekehrt vertauscht werden, weil, wenn ein Teil der arabischen Ziffern durch arabische und ein anderer durch lateinische Ziffern ersetzt würde, eine Substitution S, die alle arabischen Ziffern versetzt, in eine andre Substitution verwandelt würde, die sowol lateinische als arabische Ziffern versetzt.

Sind nun W_1 und W_2 irgend zwei solche Substitutionen, so hat das Product $W_1 W_2$, da durch die ersten irgend eine arabische Ziffer in eine lateinische Ziffer und durch die zweite diese lateinische in

eine arabische Ziffer verwandelt wird, und umgekehrt, die Form SU, wo S nur arabische, U nur lateinische Ziffern versetzt. Und zwar müssen S und U entsprechende Substitutionen sein, da, wenn W_1 und W_2 beide das System A in sich selbst überführen, auch $W_1 W_2$, d. h. SU diese Eigenschaft hat.

Es ist nun

$$W_1 W_2 = SU$$

daher

$$W_2 = W_1^{-1} SU$$

d. h. irgend eine Substitution W_1^{-1} giebt mit sämmtlichen Substitutionen SU multiplicirt, alle Substitutionen W, so dass also, wenn eine Substitution W vorhanden ist, im Ganzen 720 solcher existiren.

Nun gehen, wie früher gezeigt, die 720 Gleichungen A im Complex in sich selbst über, wenn man die arabischen mit den gleichgrossen lateinischen Ziffern vertauscht, d. h. eine der Substitutionen W ist die Substitution

$$(1\ I)(2\ II)(3\ III)(4\ IV)(5\ V)(6\ VI)$$

und somit ist der folgende Satz bewiesen.

Man kann auf 720 verschiedene Weisen die arabischen mit den lateinischen und die lateinischen mit den arabischen Ziffern vertauschen, ohne dass das System A der 720 Gleichungen sich ändert.

Diese Substitutionen W bilden mit den obigen 720 zusammen ein einmal transitives System von 1440 Substitutionen von 12 Elementen, und zwar ist jede dieser Substitutionen einer geraden Anzahl von Transpositionen äquivalent. Denn da zwei entsprechende Substitutionen S und U entweder beide gerade oder ungerade sind, so ist ihr Product SU gerade. Da ferner die Substitution

$$w = (1\ I)(2\ II)(3\ III)(4\ IV)(5\ V)(6\ VI)$$

gerade ist und die übrigen Substitutioen W aus dieser durch Multiplication mit den Substitutionen SU entstanden sind, so sind alle Substitutionen W gerade.

Unter den Substitutionen W giebt es ausser der obigen w noch 35 andere, welche ebenfalls aus 6 Transpositionen bestehen.

In unseren Entwickelungen haben wir eine der 6 Functionen B, nämlich diejenige, welche mit B_I bezeichnet wurde, der Variabeln α_1 entsprechen lassen; die den Variabeln α_2, α_3, α_4, α_5, α_6 entsprechenden wurden aus B_I gefunden, indem man in B_I erst α_1 mit α_2, dann

α_1 mit α_3 u. s. w. vertauschte. Alsdann war die Beziehung zwischen den α und den entsprechenden B eine reciproke.

Denken wir uns in dem System II. irgend eine Substitution SU, wo S und U entsprechende Substitutionen der arabischen und lateinischen Ziffern sind, gemacht, wodurch dasselbe in sich selbst übergeht, so wird die Ziffer 1 durch eine der 6 arabischen Ziffern ersetzt. Sie sei 1'. Ferner wird B_I in eine andere (oder dieselbe) der Functionen der 6 Variabeln α verwandelt werden, d. h. die Ziffer I wird durch eine andere I' (die auch $= I$ sein kann) ersetzt, wie sie unmittelbar durch U gegeben ist. Analog wie vorher werden wir also den übrigen Variabeln α diejenigen Werte B entsprechen lassen können, die aus $B_I{}'$ entstehen, indem man die Ziffer 1' der Reihe nach mit den übrigen arabischen Ziffern vertauscht, — ohne dass die Reciprocität zwischen den α und den ihnen jetzt entsprechenden B aufgehoben wird; d. h. man erhält aus dem System II. ein richtiges System, wenn man die α mit den ihnen jetzt entsprechenden B und zugleich die eckigen mit den runden Klammern vertauscht.

Die hierdurch erhaltene Substitution W, in die die vorige

$$w = (1\ I)(2\ II)(3\ III)(4\ IV)(5\ V)(6\ VI)$$

übergeht, ist:

$$W = SUwU^{-1}S^{-1}$$

Da man nun für 1' irgend eine der arabischen und für I' irgend eine der lateinischen Ziffern setzen kann, so erhält man auf diese Weise im Ganzen $6 \times 6 = 36$ Substitutionen W, von denen jede aus 6 Transpositionen besteht.

Man erhält Nichts Neues durch Anwendung einer der 720 Substitutionen W auf w. Denn die auf diese Weise erhaltene Substitution ist:

$$w' = WwW^{-1}$$

Nun ist, wie früher bewiesen,

$$W = SUw$$

wo S und U entsprechende Substitutionen sind, also

$$\begin{aligned} w' &= SUwww^{-1}U^{-1}S^{-1} \\ &= SUwU^{-1}S^{-1} \end{aligned}$$

also eine von den früheren 36 Substitutionen.

Dass es ausser diesen 36 Substitutionen W nicht noch eine andere Substitution W' geben kann, die ebenfalls aus 6 Transpositionen besteht, kann man folgendermassen beweisen.

Es sei W' eine solche Substitution. Durch Anwendung von W' auf II geht w in eine Substitution W_1 über, welche gefunden wird durch die Formel:

$$W_1 = W' w W'$$

W_1 ist nach dem Früheren eine von den oben definirten 36 Substitutionen. Da nun W' ebenfalls aus 6 Transpositionen besteht, von denen jede eine arabische und eine lateinische Ziffer enthält, so ist durch W_1 die Substitution W' bestimmt, denn wenn man 2 verschiedene Werte für W' einsetzt, so werden auch die Werte für W verschieden ausfallen. Aus der letzten Bemerkung folgt aber, dass durch die 36 Substitutionen

$$W w W$$

wo W eine der oben genannten 36 Substitutionen ist, diese 36 Substitutionen W wieder erzeugt werden. Also hat man auch

$$W_1 = W_2 w W_2$$

wo W_2 eine dieser Substitutionen ist. Es müsste also sein

$$W' = W_2$$

d. h. W wäre eine der 36 Substitutionen, was der Annahme widerspricht.

Es giebt daher daher in der Tat nur 36 Substitutionen, und sind wir berechtigt, folgenden Satz auszusprechen:

Man kann die α den B auf 36 verschiedene Arten so entsprechen lassen, dass je einem Buchstaben α ein Buchstabe B entspricht, so dass die Beziehung der α zu den B reciprok ist.

In der folgenden Tabelle sind die oben genannten 36 Substitutionen enthalten und zwar sind die laiteinischen Ziffern ausgelassen, da dieselben bei allen Substitutionen in ihrer natürlichen Reihenfolge zu denken sind. So ist z. B.

$$(1\ I)(2\ II)(3\ III)(4\ IV)(5\ V)(6\ VI)$$

kurz mit 1 2 3 4 5 6 bezeichnet werden.

Zugleich ist bei jeder Substitution diejenige Ziffer unterstrichen, welche in den vorigen Entwickelungen die Rolle von $1'$ spielt. Die ihr entsprechende lateinische Ziffer spielt natürlich die Rolle von I'.

$\underline{1}\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6$	$2\ \underline{1}\ 6\ 5\ 3\ 4$
$\underline{2}\ 1\ 5\ 6\ 4\ 3$	$1\ \underline{2}\ 4\ 3\ 6\ 5$
$\underline{3}\ 4\ 1\ 5\ 6\ 2$	$4\ \underline{3}\ 5\ 2\ 1\ 6$
$\underline{4}\ 3\ 6\ 1\ 2\ 5$	$3\ \underline{4}\ 2\ 6\ 5\ 1$
$\underline{5}\ 6\ 2\ 3\ 1\ 4$	$6\ \underline{5}\ 3\ 1\ 4\ 2$
$\underline{6}\ 5\ 4\ 2\ 3\ 1$	$5\ \underline{6}\ 1\ 4\ 2\ 3$

3 6 $\underline{1}$ 2 4 5	4 5 2 $\underline{1}$ 6 3
5 4 $\underline{2}$ 1 3 6	6 3 1 $\underline{2}$ 5 4
1 5 $\underline{3}$ 6 2 4	5 2 6 $\underline{3}$ 4 1
6 2 $\underline{4}$ 5 1 3	1 6 5 $\underline{4}$ 3 2
2 3 $\underline{5}$ 4 5 1	3 1 4 $\underline{5}$ 2 6
4 1 $\underline{6}$ 3 5 2	2 4 3 $\underline{6}$ 1 5
5 3 4 6 $\underline{1}$ 2	6 4 5 3 2 $\underline{1}$
4 6 3 5 $\underline{2}$ 1	3 5 6 4 1 $\underline{2}$
6 1 2 4 $\underline{3}$ 5	2 6 4 1 5 $\underline{3}$
2 5 1 3 $\underline{4}$ 6	5 1 3 2 6 $\underline{4}$
1 4 6 2 $\underline{5}$ 3	4 2 1 6 3 $\underline{5}$
3 2 5 1 $\underline{6}$ 4	1 3 2 5 4 $\underline{6}$

Die in diesem § entwickelten Sätze sind von der grössten Wichtigkeit für die Theorie der Substitutionen von 6 Buchstaben, indem sie uns in den Stand setzen, zu jedem conjugirten System ein anderes ihm reciprokes zu finden, welches ebenso viel Substitutionen enthält.

§ III.

Nachdem die allgemeine Theorie, die sich an die Functionen B knüpft, erörtert ist, bleibt noch die Frage zu erledigen nach der einfachsten Form derselben, d. h. nach ihrem niedrigsten Grade in Bezug auf die Grössen α.

Da B_I in B_{II} und B_{II} in B_I übergeht, wenn man α_1 mit α_2, oder α_3 mit α_4, oder α_5 mit α_6 vertauscht, so ist die Differenz $B_I - B_{II}$ durch das Product

$$(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_4)(\alpha_5 - \alpha_6)$$

ohne Rest teilbar. Der Quotient sei v_{12}. Alle 48 Substitutionen, die den Ausdruck $\alpha_1\alpha_2 + \alpha_3\alpha_4 + \alpha_4\alpha_6$ unverändert lassen, lassen entweder B_I und B_{II} beide unverändert, oder sie führen diese beiden Grössen in einander über, während das Product $(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_4)(\alpha_5 - \alpha_6)$ entweder unverändert bleibt oder sein Vorzeichen wechselt. Der Ausdruck v_{12} wird daher auch durch diese Substitutionen in sofern afficirt, als er durch einen Teil derselben in $-v_{12}$ übergeführt wird. Diejenigen 24 Substitutionen, welche v_{12} unverändert lassen, können erhalten werden, indem man die Substitutionen

$$(12),\ (34),\ (56),\ (135)(246)$$

in irgend welcher Reihenfolge multiplicirt. Es handelt sich also darum, die einfachsten Functionen zu finden, welche diese und nur diese Substitutionen zulassen, während die übrigen 24 der oben erwähnten Substitutionen dieselben in ihr Gegenteil verwandelt.

Der Versuch, solche Functionen zu bilden, gelingt erst beim dritten Grade und in der Tat ergiebt sich, dass die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1, & \alpha_1+\alpha_2, & \alpha_1\alpha_2 \\ 1, & \alpha_3+\alpha_4, & \alpha_3\alpha_4 \\ 1, & \alpha_5+\alpha_6, & \alpha_5\alpha_6 \end{vmatrix}$$

mit einem beliebigen Factor multiplicirt, die einzige Function dritten Grades ist, die den gegebenen Ansprüchen genügt. Da nun $B_I - B_{II}$ das Product von v_{12} in $(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4)(\alpha_5-\alpha_6)$ ist, so müssen die B, falls sie wirklich von einander verschieden sein sollen, mindestens vom sechsten Grade in Bezug auf die α sein.

Man erhält eine solche Function, wenn man in Schema II. setzt:

$$((\alpha_1\alpha_2)(\alpha_3\alpha_4)(\alpha_5\alpha_6)) = (\alpha_1\alpha_2+\alpha_3\alpha_4+\alpha_5\alpha_6)^3 \quad \text{u. s. w.}$$

und die fünf dieser Klammern, wie sie in einem B vorkommen, addirt.

Eine genauere Untersuchung zeigt aber, dass man diesen Functionen durch eventuelle Hinzufügung symmetrischer Functionen eine solche Form geben kann, dass sie die Quadrate von Functionen dritten Grades sind, so dass wir uns also schliesslich nur mit diesen zu beschäftigen haben.

§ IV.

Es sei A_I eine Function der Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$, welche die Eigenschaft hat, nur die ersten 60 Substitutionen des Systems I. zuzulassen, welche ja ebenfalls ein conjugirtes System ausmachen.

Wendet man auf A_I irgend eine andere Substitution an, die ebenfalls einer geraden Anzahl von Substitutionen äquivalent ist, so wird A_I in einen Wert A_{II} übergeführt. Es seien T_1 und T_2 zwei Substitutionen, welche beide A_I in denselben Wert A_{II} überführen. Durch T_2 wird A_I in A_{II}, durch T_1^{-1} aber A_{II} in A_I zurückgeführt, daher bleibt A_I durch die zusammengesetzte Substitution $T_1^{-1}T_2$ unverändert. Bezeichnet man sie mit S, so ist

$$T_1^{-1}T_2 = S$$
$$T_2 = T_1 S.$$

Man findet also aus einer Substitution T_1 alle übrigen, welche

A_I in A_{II} verwandeln, indem man dieselbe nach einander mit allen Substitutionen, welche A_I unverändert lassen, multiplicirt.

Wendet man nun auf A_I eine gerade Substitution an, welche unter diesen noch nicht enthalten ist, so wird A_I in einen neuen Wert A_{III} übergeführt und man findet ganz ebenso wie vorher die 60 Substitutionen, die A_I in A_{III} überführen.

Führt man so fort, bis sämmtliche gerade Substitutionen erschöpft sind, so erhält man 6 Grössen A_I, A_{II}, A_{III}, A_{IV}, A_V, A_{VI}, die die Eigenschaft haben, dass sie durch gerade Substitutionen der Indices 1, 2, 3, 4, 5, 6 in einander übergehen und zwar sind dann die Substitutionen der Indices *I*, *II*, *III*, *IV*, *V*, *VI*, wie früher bewiesen, auch gerade.

Man kann die Indices *I*, *II*, u. s. w. so wählen, dass sie den Indices *I*, *II*, u. s. w. des Systems II. in so fern entsprechen, als diejenigen Substitutionen, die den Grössen A_I, A_{II} u. s. w. nach einander zukommen, auch B_I, B_{II} u. s. w. unverändert lassen.

Wendet man nun auf A_I irgend eine ungerade Substitution des Systems I. an, so wird A_I in einen anderen Wert A_I' verwandelt. Dass alle Substitutionen der Nummern 5), 6), 7) des Systems I. A_I in einen und denselben Wert A_I' überführen, geht daraus hervor, dass dieselben erhalten werden können, indem man die Substitutionen der Nummern 1), 2), 3), 4) mit einer von ihnen zur Linken multiplicirt. Und dass A_I' dieselben Substitutionen wie A_I zulässt, geht daraus hervor, dass dieselben auch erhalten werden können, indem man die Substitutionen der Nummern 1), 2), 3), 4) mit einer derselben zur Rechten multiplicirt.

Wendet man nun auf A_I' wieder alle geraden Substitutionen an, (oder auf A_I alle ungeraden), so erhält man auf diese Weise 6 Functionen A_I', A_{II}' u. s. w., welche beziehungsweise dieselben Substitutionen zulassen, wie A_I, A_{II} u. s. w. Durch irgend eine gerade Substitution wird nach dem Vorigen jede der beiden Functionsreihen in sich selbst übergeführt, während eine ungerade Substitution die beiden Reihen mit einander vertauscht. Zugleich ist im ersten Falle die Substitution der lateinischen Indices gerade, im zweiten Falle ungerade.

Aus Alledem folgt, dass die 6 Functionen $A_I - A_I'$, $A_{II} - A_{II}'$ u. s. w. die Eigenschaft haben, durch gerade Substitutionen der Indices 1, 2, 3 u. s. w. in einander überzugehen, während sie durch ungerade Substitutionen im Complex in ihr Gegenteil verwandelt werden. Nennen wir dieselben β_I, β_{II} u. s. w. statt $A_I - A_I'$, $A_{II} - A_{II}'$ u. s. w., so muss $\beta_I + \beta_{II}$ teilbar sein durch $(\alpha_1 - \alpha_2)$

$(\alpha_3 - \alpha_4)(\alpha_5 - \alpha_6)$. Denn vertauscht man α_1 mit α_2, oder α_3 mit α_4, oder α_5 mit α_6, so wird β_I in $-\beta_{II}$ und β_{II} in $-\beta_I$, also $\beta_I + \beta_{II}$ in $-(\beta_I + \beta_{II})$ übergeführt. Also müssen die β in Bezug auf die α mindestens vom dritten Grade sein und zwar findet man, wenn man den Versuch macht, in der Tat, von Vorzeichen und Constanten abgesehen, nur eine solche Art von Functionen dritten Grades. Sie sind, wenn statt $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ u. s. w. der Kürze wegen 123 u. s. w. geschrieben wird:

$$
\text{IV.}\left\{
\begin{aligned}
\beta_I &= 135 - 246 + 146 - 235 + 326 - 145 + 245 - 136\\
&\quad + 142 - 356 + 562 - 134 + 364 - 152 + 165 - 234\\
&\quad + 435 - 126 + 123 - 456\\
\beta_{II} &= -235 + 146 - 246 + 135 - 316 + 245 - 145 + 236\\
&\quad - 142 + 356 - 561 + 234 - 364 + 152 - 265 + 134\\
&\quad - 435 + 126 - 123 + 456\\
\beta_{III} &= -135 + 246 - 346 + 215 - 126 + 345 - 245 + 136\\
&\quad - 342 + 156 - 562 + 134 - 162 + 354 - 365 + 214\\
&\quad - 415 + 326 - 123 + 456\\
\beta_{IV} &= -435 + 216 - 146 + 235 - 326 + 145 - 215 + 436\\
&\quad - 142 + 356 - 562 + 134 - 163 + 452 - 465 + 213\\
&\quad - 315 + 264 - 423 + 156\\
\beta_V &= -135 + 246 - 546 + 123 - 326 + 145 - 124 + 536\\
&\quad - 542 + 316 - 162 + 534 - 364 + 152 - 165 + 234\\
&\quad - 134 + 526 - 523 + 416\\
\beta_{VI} &= -635 + 241 - 146 + 235 - 321 + 645 - 245 + 136\\
&\quad - 642 + 315 - 512 + 634 - 311 + 652 - 165 + 234\\
&\quad - 435 + 126 - 623 + 451
\end{aligned}
\right.
$$

Zwischen den sechs Grössen β_I, β_{II} u. s. w. finden zwei Relationen statt. Irgend eine ungerade symmetrische Function dieser Grössen muss durch das Product aus den Differenzen je zweier der Grössen α teilbar sein, da dieselben in ihr Gegenteil verwandelt wird, wenn man irgend zwei α mit einander vertauscht. Wenn also diese symmetrische Function nicht mindestens vom 15 Grade in Bezug auf die α ist, so ist sie identisch $= 0$. Man erhält daher die beiden Gleichungen:

$$\beta_I + \beta_{II} + \beta_{III} + \beta_{IV} + \beta_V + \beta_{VI} = 0$$
$$\beta_I^3 + \beta_{II}^3 + \beta_{III}^3 + \beta_{IV}^3 + \beta_V^3 + \beta_{VI}^3 = 0$$

während

$$\beta_I^5 + \beta_{II}^5 + \beta_{III}^5 + \beta_{IV}^5 + \beta_V^5 + \beta_{VI}^5 = c\Delta$$

ist, wo c eine Constante und Δ das Product aller Differenzen der α ist.

Aus den Formeln für die β kann man folgende ableiten. Es ist, wenn der Kürze wegen

$$(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_4)(\alpha_5 - \alpha_6) = (12,\ 34,\ 56)$$

gesetzt wird:

$$\text{V.}\quad \left\{\begin{aligned}
\beta_I + \beta_{II} &= 2(12,\ 34,\ 56)\\
\beta_I + \beta_{III} &= 2(31,\ 25,\ 64)\\
\beta_I + \beta_{IV} &= 2(53,\ 26,\ 14)\\
\beta_I + \beta_V &= 2(15,\ 63,\ 42)\\
\beta_I + \beta_{VI} &= 2(16,\ 54,\ 32)\\
\beta_{II} + \beta_{III} &= 2(24,\ 53,\ 16)\\
\beta_{II} + \beta_{IV} &= 2(15,\ 23,\ 64)\\
\beta_{II} + \beta_V &= 2(62,\ 54,\ 31)\\
\beta_{II} + \beta_{VI} &= 2(14,\ 25,\ 36)\\
\beta_{III} + \beta_{IV} &= 2(12,\ 45,\ 36)\\
\beta_{III} + \beta_V &= 2(65,\ 14,\ 23)\\
\beta_{III} + \beta_{VI} &= 2(26,\ 15,\ 43)\\
\beta_{IV} + \beta_V &= 2(34,\ 16,\ 25)\\
\beta_{IV} + \beta_{VI} &= 2(65,\ 13,\ 24)\\
\beta_V + \beta_{VI} &= 2(12,\ 64,\ 35)
\end{aligned}\right.$$

Ferner erhält man:

$$\beta_I - \beta_{II} = -2\begin{vmatrix} 1, & \alpha_1 + \alpha_2, & \alpha_1\alpha_2 \\ 1, & \alpha_3 + \alpha_4, & \alpha_3\alpha_4 \\ 1, & \alpha_5 + \alpha_6, & \alpha_5\alpha_6 \end{vmatrix}$$

Solcher Formeln kann man 15 bilden. So erhält man z. B.

$$\beta_{II} - \beta_{III} = -2\begin{vmatrix} 1, & \alpha_1 + \alpha_6, & \alpha_1\alpha_6 \\ 1, & \alpha_2 + \alpha_4, & \alpha_2\alpha_4 \\ 1, & \alpha_3 + \alpha_5, & \alpha_3\alpha_5 \end{vmatrix}$$

$$\beta_{III} - \beta_I = -2\begin{vmatrix} 1, & \alpha_1 + \alpha_3, & \alpha_1\alpha_3 \\ 1, & \alpha_4 + \alpha_6, & \alpha_4\alpha_6 \\ 1, & \alpha_5 + \alpha_2, & \alpha_5\alpha_2 \end{vmatrix}$$

und daher die identische Gleichung:

$$0=\begin{vmatrix}1, & \alpha_1+\alpha_2, & \alpha_1\alpha_2\\ 1, & \alpha_4+\alpha_3, & \alpha_4\alpha_3\\ 1, & \alpha_5+\alpha_6, & \alpha_5\alpha_6\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1, & \alpha_1+\alpha_6, & \alpha_1\alpha_6\\ 1, & \alpha_4+\alpha_2, & \alpha_4\alpha_2\\ 1, & \alpha_5+\alpha_3, & \alpha_5\alpha_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1, & \alpha_1+\alpha_3, & \alpha_1\alpha_3\\ 1, & \alpha_4+\alpha_6, & \alpha_4\alpha_6\\ 1, & \alpha_5+\alpha_2, & \alpha_5\alpha_3\end{vmatrix}$$

Eine Gleichung, die sich folgendermassen geometrisch interpretiren lässt:

Sind auf einer Geraden zwei Punktetripel $(\alpha_1, \alpha_4, \alpha_5)$, $(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_6)$ gegeben und bilden die drei Punktepaare $(\alpha_1\alpha_2)$, $(\alpha_4\alpha_3)$, $(\alpha_5\alpha_6)$, sowie die drei Punktepaare $(\alpha_1\alpha_6)$, $(\alpha_4\alpha_2)$, $(\alpha_5\alpha_3)$ eine Involution, so bilden auch die drei Punktepaare $(\alpha_1\alpha_3)$, $(\alpha_4\alpha_6)$, $(\alpha_5\alpha_2)$ eine Involution.

Da die Ausdrücke β_I^2, β_{II}^2 u. s. w. Functionen von der Form B_I, B_{II} u. s. w. sind, und früher bewiesen wurde, dass es, von symmetrischen Functionen abgesehen, nur eine solche Art von Functionen sechsten Grades giebt, so ergiebt sich die Richtigkeit der Behauptung, dass die früher angeführten Functionen sechsten Grades auf Quadrate von Functionen dritten Grades zurückgeführt werden können.

§ V.

Da wir später auch noch andere Functionen als die in IV. angeführten vom dritten Grade gebrauchen werden, so mögen dieselben hier erwähnt werden.

Multiplicirt man die in V. rechtsstehenden Ausdrücke beziehungsweise mit $K_{12,34,56}$, $K_{31,25,64}$ u. s. w., wo unter $K_{12,34,56}$ verstanden werden soll, entweder $\alpha_1\alpha_2+\alpha_3\alpha_4+\alpha_5\alpha_6$ oder $(\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_3+\alpha_4)(\alpha_5+\alpha_6)$ oder $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4+\alpha_1\alpha_2\alpha_5\alpha_6+\alpha_3\alpha_4+\alpha_5\alpha_6$, oder eine beliebige lineare Verbindung dieser drei Ausdrücke, so gehen die linksstehenden Grössen $\beta_I+\beta_{II}$, $\beta_I+\beta_{III}$ u. s. w. über in 15 Functionen $S_{I\,II}$, $S_{I\,III}$ u. s. w. Zwischen diesen Functionen finden 15 Gleichungen statt, z. B.

$$S_{I\,II}+S_{III\,IV}+S_{V\,VI}=0$$

wie man sich überzeugt, wenn man für $S_{I\,II}$ u. s. w. ihre Werte einsetzt. Aus diesen 15 Gleichungen kann man schliessen, dass auch $S_{I\,II}$, $S_{I\,III}$ u. s. w. die Summen von 6 Functionen u_I, u_{II} u. s. w. zu je zweien sind.

In der Tat, definirt man die Functionen u_I, u_{II}, u_{III}, u_{IV}, u_V, u_{VI} durch die Gleichungen:

1) $u_I+u_{II}=S_{I\,II}$, 2) $u_I+u_{III}=S_{I\,III}$,

3) $u_{III}+u_{IV}=S_{III\,IV}$, 4) $u_{III}+u_V=S_{III\,V}$,

5) $u_{III}+u_{VI}=S_{III\,VI}$, 6) $u_V+u_{VI}=S_{V\,VI}$,

so folgt zunächst aus $S_{I\,II} + S_{III\,IV} + S_{V\,VI} = 0$

$$u_I + u_{II} + u_{III} + u_{IV} + u_V + u_{VI} = 0$$

Aus dieser Gleichung, sowie aus 1) und 4) und 1) und 5) folgen die beiden Gleichungen:

$$7)\ u_{IV} + u_{VI} = -(S_{I\,II} + S_{III\,V}) = S_{IV\,VI}$$
$$8)\ u_V + u_{VI} = S_{V\,VI}$$

Ferner erhält man aus 2) und 7), sowie aus 2) und 8)

$$9)\ u_{II} + u_V = S_{II\,V}$$
$$10)\ u_{II} + u_{IV} = S_{II\,IV}$$

Ebenso folgt aus 5) und 9), sowie aus 5) und 10), 3) und 8)

$$11)\ u_I + u_{IV} = S_{I\,IV}$$
$$12)\ u_I + u_V = S_{I\,V}$$
$$13)\ u_I + u_{VI} = S_{I\,VI}$$

und schliesslich aus 11) und 8), sowie aus 11) und 4) die beiden noch fehlenden Gleichungen

$$14)\ u_{II} + u_{III} = S_{II\,III}$$
$$15)\ u_{II} + u_{VI} = S_{II\,VI}$$

Zwischen den auf diese Weise definirten sechs Functionen finden zwei Gleichungen statt.

Zunächst die vorhin abgeleitete

$$u_I + u_{II} + u_{III} + u_{IV} + u_V + u_{VI} = 0$$

und dann die Gleichung

$$u_I\beta_I^2 + u_{II}\beta_{II}^2 + u_{III}\beta_{III}^2 + u_{IV}\beta_{IV}^2 + u_V\beta_V^2 + u_{VI}\beta_{VI}^2 = 0$$

wo die β die in IV. definirten Grössen sind.

Denn da u_I, u_{II} u. s. w. dieselben Substitutionen zulassen, wie β_I, β_{II} u. s. w., so lassen auch $u_I\beta_I^2$, $u_{II}\beta_{II}^2$ u. s. w. dieselben Substitutionen zu. Nun sind die Functionen u höchstens vom 7. Grade, die β aber vom 3. Grade, folglich muss die Summe

$$u_I\beta_I^2 + u_{II}\beta_{II}^2 + u_{III}\beta_{III}^2 + \ldots = 0$$

sein, da sie alternirt, wenn zwei α mit einander vertauscht werden.

Im Folgenden sind von den Functionen β und u zwei Anwendungen gemacht worden. Einmal kann man mit ihrer Hilfe die In-

varianten der binären Formen sechsten Grades bestimmen und dann kann man die Sätze über das Pascal'sche Sechseck durch sehr einfache Verbindungen dieser Functionen beweisen.

§ VI.

Ueber die Invarianten der binären Formen sechsten Grades.

Es sei

$$f = A_{-3}x^6 + 6A_{-2}x^5y + 15A_{-1}x^4y^2 + 20A_0x^3y^3 + 15A_1x^2y^4 + 6A_2xy^5 + A_3y^6$$

eine binäre Form sechsten Grades mit ganz willkürlichen Coefficienten.

Die Gleichung $f = 0$ liefert für x und y sechs zusammengehörige Wertepaare $(x = a_1,\ y = b_1)$; $(x = a_2,\ y = b_2)$ u. s. w., wo je ein Wurzelpaar in sofern willkürlich gewählt ist, als nur das Verhältniss zwischen je zwei zusammengehörigen a und b bestimmt werden kann durch die Gleichung. Die Wurzeln (a_1b_1), (a_2b_2) u. s. w. können so gewählt werden, dass die Identität stattfindet

$$2)\quad f \equiv (xb_1 - ya_1)(xb_2 - ya_2)(xb_3 - ya_3)(xb_4 - ya_4)(xb_5 - ya_5)(xb_6 - ya_6)$$

und daher

$$A_{-3} = b_1b_2b_3b_4b_5b_6$$

u. s. w.

Man kann daher die fünf Grössen b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 beliebig wählen, dann erhält man

$$b_6 = \frac{-A_3}{b_1b_2b_3b_4b_5}$$

und da die Verhältnisse der a zu den b bestimmt sind, so sind dann auch die a bestimmt. Daraus folgt, dass nicht jede, in Bezug auf die a sowohl, als auch in Bezug auf die b homogene Function als Function von A_{-3}, A_{-2} u. s. w. betrachtet werden kann, sondern nur solche, welche das Product einer Potenz von $b_1 . b_2 . b_3 . b_4 . b_5 . b_6$ in einen Ausdruck sind, der nur die Verhältnisse $\frac{a_1}{b_1}$, $\frac{a_2}{b_2}$ u. s. w. enthält.

Eine solche Function ist z. B.

$$3)\quad (a_1b_2 - b_1a_2)(a_3b_4 - b_3a_4)(a_5b_6 - b_5a_6)$$
$$= b_1 . b_2 . b_3 . b_4 . b_5 . b_6 \left(\frac{a_1}{b_1} - \frac{a_2}{b_2}\right)\left(\frac{a_3}{b_3} - \frac{a_4}{b_4}\right)\left(\frac{a_5}{b_5} - \frac{a_6}{b_6}\right)$$

oder

$$= -A_{-3}(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_4)(\alpha_5 - \alpha_6)$$

wo die Grössen $\alpha_1 = \frac{a_1}{b_1}$, $\alpha_2 = \frac{a_2}{b_2}$ u. s. w. die Wurzeln der Gleichung

4) $$A_{-3}\alpha^6 + 6A_{-2}\alpha^5 + \ldots = 0$$

sind.

Der Ausdruck 3) kann betrachtet werden als eine Invariante der Form f. Denn substituirt man für x und y neue Variable durch die Formeln

$$x' = x_{00}x + x_{01}y$$
$$y' = x_{10}x + x_{11}y$$

so gehen auch $(a_1 b_1)$ u. s. w. in neue Werte über, die ausgedrückt werden durch die Formeln

$$a_1' = k_1(x_{00}a_1 + x_{01}b_1)$$
$$a_2' = k_1(x_{10}a_1 + x_{11}b_1)$$

u. s. w., wo k_1, k_2, ... 6 Constante sind, die der Bedingung genügen

$$r^6 . k_1 . k_2 . k_3 . k_4 . k_5 . k_6 = 1$$

wo r die Determinante $x_{00}x_{11} - x_{01}x_{10}$ bezeichnet.

Mit Hilfe dieser Formeln erhält man

$$(a_1'b_2' - b_1'a_2')(a_3'b_4' - b_3'a_4')(a_5'b_6' - b_5'a_6')$$
$$= k_1 . k_2 . k_3 . k_4 . k_5 . k_6 . r^3 (a_1b_2 - b_1a_2)(a_3b_4 - b_3a_4)(a_5b_6 - b_5a_6)$$
$$= \frac{1}{r^3}(a_1b_2 - b_1a_2)(a_3b_4 - b_3a_4)(a_5b_6 - b_5a_6)$$

Daher ist in der Tat der Ausdruck 3) eine Invariante.

Aus 3) gehen 14 andere, sofern nur die absoluten Werte betrachtet werden, hervor.

Schreibt man die erste in der Form

$$A_{-3}(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_4)(\alpha_5 - \alpha_6)$$

so erkennt man sofort mit Hilfe von V., dass dieselben die Summen von je zwei Invarianten darstellen, welche aus System IV. hervorgehen, wenn man für die α die Wurzeln der Gleichung 3) setzt und jede der erhaltenen Functionen β noch mit A_{-3} multiplicirt.

Diese sechs Invarianten sollen jetzt mit β_I, β_{II} u. s. w. bezeichnet werden und sollen sie die 6 (wenn auch durch A_{-3}, A_{-2} u. s. w. nicht ausdrückbaren) Invarianten ersten Grades der Form f heissen.

Durch Anwendung der früheren Resultate erhält man die beiden Gleichungen:

$$\beta_I + \beta_{II} + \beta_{III} + \beta_{IV} + \beta_V + \beta_{VI} = 0$$
$$\beta_I^3 + \beta_{II}^3 + \beta_{III}^3 + \beta_{IV}^3 + \beta_V^3 + \beta_{VI}^3 = 0$$

Es ist nun leicht, zu beweisen, dass die 6 Grössen β den Character der Function f vollständig und eindeutig bestimmen, wo unter Charakter Alles das verstanden wird, was bei einer linearen Substitution unverändert bleibt. Alle Functionen sechsten Grades, welche in ihrem Charakter übereinstimmen, von denen also irgend eine in irgend eine andere transformirt werden kann, bestimmen dieselben Werte für die β oder die Verhältnisse zu einander.

Stellt man, um sich der kürzeren geometrischen Ausdrucksweise bedienen zu können, die Function f durch 6 Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6 dar, so werden bei irgend einer Transformation von f diese sechs Punkte in sechs andere 1′, 2′, 3′, 4′, 5′, 6′ transformirt, und es müssen daher irgend welche Doppelverhältnisse zwischen den sechs Punkten 1, 2, 3, 4, 5, 6 den entsprechenden Doppelverhältnissen der Punkte 1′, 2′, 3′, 4′, 5′, 6′ gleich sein. Nun ist:

$$\frac{\beta_I + \beta_{II}}{\beta_{III} + \beta_{IV}} = \frac{(\alpha_3 - \alpha_4)(\alpha_5 - \alpha_6)}{(\alpha_4 - \alpha_5)(\alpha_3 - \alpha_6)} = -\frac{(\alpha_3 - \alpha_4)(\alpha_5 - \alpha_6)}{(\alpha_3 - \alpha_6)(\alpha_5 - \alpha_4)}$$

also gleich dem negativen Wert des Doppelverhältnisses der Punkte 3 und 5 zu den Punkten 3′ und 5′. Auf diese Weise kann man alle möglichen Doppelverhältnisse durch die sechs Grössen β ausdrücken.

Dass aber umgekehrt die β durch diese Doppelverhältnisse bis auf einen Factor bestimmt sind, folgt sehr leicht auf folgende Weise. Ebenso wie $\frac{\beta_I + \beta_{II}}{\beta_{III} + \beta_{IV}}$ durch eines der Doppelverhältnisse bestimmt war, so sind alle aus jenem Wert dadurch hervorgehenden, dass man für $\beta_{III} + \beta_{IV}$ irgend eine andere Summe der 4 Grössen β_{III}, β_{IV}, β_V, β_{VI} zu je zweien setzt, bestimmt, mithin die Verhältnisse von $\beta_{III} + \beta_{IV}$, $\beta_{III} + \beta_V$ u. s. w. zu einander, also auch die von β_{III}, β_{IV}, β_V, β_{VI}. Ebenso findet man, dass die Verhältnisse von irgend vier der β zu einander bestimmt sind, also bis auf einen constanten Factor die β selbst.

Da nun irgend zwei Functionen, welche die Eigenschaft haben, dass die sechs Punkte der einen den sechs Punkten der anderen in der Weise entsprechen, dass die entsprechenden Doppelverhältnisse einander gleich sind, in einander transformirt werden können, und da ferner diese Doppelverhältnisse die β bestimmen und umgekehrt, so müssen die Invarianten der binären Formen sechsten Grades Functionen der 6 linearen Invarianten β sein und zwar solche Func-

tionen, die zugleich symmetrisch in Bezug auf die Grössen $(a_1 b_1)$, $(a_2 b_2)$ u. s. w. sind, welche sich also bei einer Vertauschung der Indices 1, 2, 3, 4, 5, 6 nicht ändern. Man erhält daher sämmtliche Invarianten von f, wenn man alle diejenigen Functionen der β bildet, welche bei Vertauschung der sechs arabischen Indices unverändert bleiben.

Es sei J irgend eine solche Function. Da, wie früher bewiesen, eine Vertauschung der arabischen Ziffern, die einer geraden Anzahl von Transpositionen äquivalent ist, eine Vertauschung der lateinischen Ziffern, die ebenfalls gerade ist, entspricht und umgekehrt, so kann man in J irgend eine Vertauschung der β, die einer geraden Anzahl von Transpositionen äquivalent ist, anbringen, ohne dass sich ihr Wert ändert, wenn sich auch ihre Form ändern mag. Da ferner einer ungeraden Substitution der arabischen Ziffern ebenfalls eine solche der lateinischen Ziffern entspricht, und zugleich die β in $-\beta$ verwandelt werden, so ändert sich, wenn J gerade in Bezug auf die β ist, der Wert von J nicht, falls man irgend eine ungerade Substitution der β vornimmt.

Bezeichnet man die auf diese Weise erhaltenen Formen für J mit $J_1, J_2 \ldots J_\lambda$, so ist

$$J = J_1 = J_2 = \ldots = J_\lambda$$

$$= \frac{1}{\lambda}(J_1 + J_2 + \ldots + J_\lambda)$$

Es ist also J in die Gestalt einer symmetrischen Function der β und zwar von geradem Grade gebracht worden, selbst wenn J zuerst unsymmetrisch in Bezug auf die β war.

Ist dagegen J eine ungerade Function der β, so folgt aus Obigem, dass J in $-J$ übergehen muss, sobald man ungerade Substitutionen in den β anwendet. J ist also seinem Werte nach eine alternirende Function der β, also gleich dem Product einer symmetrischen Function geraden Grades in das Product aus sämmtlichen Differenzen der β gebildet.

Aus diesen Ueberlegungen folgt, dass man sämmtliche Invarianten von f erhält, wenn man sämmtliche gerade symmetrische Functionen der β bildet und diesen das Product $(\beta_I - \beta_{II})(\beta_I - \beta_{III}) \ldots$ hinzufügt. Da nun jede symmetrische Function der β durch die 6 Grössen $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6$ ausgedrückt werden kann, wo unter s_λ die Summe der λten Potenzen der β verstanden wird, da ferner $s_1 = 0$ und $s_3 = 0$ und J gerade ist, so muss J im ersten Falle durch die Grössen s_2, s_4, s_6, $(s_5)^2$ ausgedrückt werden können. Fügt man zu diesen noch

Δ, wo Δ obiges alternirende Product ist, so erhält man auf diese Weise die 5 (nicht 4) fundamentalen Invarianten der Form f. Da nun der Grad der Invarianten in Bezug auf die Coefficienten von f derselbe ist, wie ihr Grad in Bezug auf die β, so erhält man auf diese Weise die fünf fundamentalen Invarianten

$$J_2,\ J_4,\ J_6,\ J_{10},\ J_{15}$$

Es tritt hier die Erscheinung auf, dass die Anzahl der fundamentalen Invarianten, durch welche sich also alle übrigen durch Addition und Multiplication ergeben, grösser ist, als die der von einander unabhängigen.

Will man den Zusammenhang zwischen unseren Invarianten herstellen, so kann man das, indem man Δ quadrirt, wodurch man eine symmetrische Function 30ten Grades der β erhält und diese dann durch s_2, s_4, s_6, $(s_5)^2$, d. h. durch J_2, J_4, J_6, J_{10} ausdrückt. Man erhält auf diese Weise eine Gleichung von der Form:

$$J_{15}^2 = \varphi(J_2,\ J_4,\ J_6,\ J_{10})$$

Man kann die in diesen Entwickelungen angedeuteten Rechnungen bedeutend vereinfachen, doch bleiben sie selbst dann noch sehr langwierig und müssen wir uns damit begnügen, den Grad und die Anzahl der binären Formen sechsten Grades festgestellt zu haben, so wie ihre ausserordentlich einfachen Darstellungen durch die sechs linearen Invarianten β.

§ VII.

Ueber eine neue Ableitungsweise der Eigenschaften des Pascalschen Sechsecks.

Man kann die Gleichung jedes Kegelschnitts durch Coordinatentransformation auf die Form bringen

$$xz - y^2 = 0$$

Dann kann man jeden Punkt desselben darstellen durch einen Parameter α vermittelst der Formeln

$$x = 1, \quad y = \alpha, \quad z = \alpha^2$$

Giebt man dem Parameter α sechs verschiedene Werte α_1, α_2, α_3, α_4, α_5, α_6, so erhält man sechs verschiedene Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6, die also auf obigem Kegelschnitt liegen.

Die Linie (12), welche 1 und 2 mit einander verbindet, hat die Gleichung

$$x\alpha_1\alpha_2 - y(\alpha_1 + \alpha_2) + z = 0$$

Aus dieser Gleichung erhält man die der übrigen 14 Verbindungslinien durch Vertauschung der Indices. Die drei Linien (12), (34), (56) bilden ein Dreieck, und wollen wir dasselbe ein Fundamentaldreieck nennen. Durch Vertauschung der Indices erhält man 15 Fundamentaldreiecke. Je zwei Fundamentaldreiecke, die keine Seite gemeinsam haben, bilden ein Pascal'sches Sechseck.

Die 15 Fundamentaldreiecke entsprechen den im System II. auftretenden Grössen von der Form (12, 34, 56). Da die den in B_I u. s. w. auftretenden 5 Grössen entsprechenden Fundamentaldreiecke keine Seite gemeinsam haben, so erhält man durch Combination derselben zu je zweien 10 Pascal'sche Sechsecke, die wir alle in eine Gruppe I bringen wollen. Bildet man auf diese Weise die sechs Gruppen I, II, III, IV, V, VI, so sind die sämmtlichen Pascal'schen Sechsecke in sechs Gruppen zu je 10 gebracht worden.

Man kann das Dreieck $\Delta(12, 34, 56)$, da es sowohl in Gruppe I, als auch in Gruppe II vorkommt, mit $\Delta_{I\,II}$ bezeichnen. Ferner kann man das aus den beiden Dreiecken $\Delta_{I\,II}$ und $\Delta_{I\,III}$ gebildete Sechseck kurz mit $S\,I(II\;III)$ bezeichnen.

Nach diesen Vorbereitungen mögen zunächst die Gleichungen der Pascal'schen Linien hergeleitet werden.

Das Pascal'sche Sechseck $S\,I(II\;III)$ hat die Fundamentaldreiecke $\Delta(12, 34, 56)$ und $\Delta(13, 46, 25)$, die Gegenseitenpaare sind daher (12) und (46), (34) und (25), (56) und (13). Die Gleichungen von (12) und (46) lauten resp.

$$x\alpha_1\alpha_2 - y(\alpha_1 + \alpha_2) + z = 0$$
$$x\alpha_4\alpha_6 - y(\alpha_4 + \alpha_6) + z = 0$$

Multiplicirt man dieselben mit

$(\alpha_3\alpha_4 + \alpha_5\alpha_6 - \alpha_4\alpha_6 - \alpha_3\alpha_5)$ und resp. $-(\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_5 - \alpha_1\alpha_2 - \alpha_3\alpha_5)$

so erhält man durch Addition:

$$\begin{aligned} & x(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 + \alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6 + \alpha_5\alpha_6\alpha_1\alpha_2) + y(\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_3 + \alpha_4)(\alpha_5 + \alpha_6) \\ & \qquad + z(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_3\alpha_4 + \alpha_5\alpha_6) \\ = {} & x(\alpha_1\alpha_3\alpha_4\alpha_6 + \alpha_4\alpha_6\alpha_2\alpha_5 + \alpha_2\alpha_5\alpha_1\alpha_5) + y(\alpha_1 + \alpha_3)(\alpha_4 + \alpha_6)(\alpha_2 + \alpha_5) \\ & \qquad + z(\alpha_1\alpha_3 + \alpha_4\alpha_6 + \alpha_2\alpha_5) \end{aligned}$$

Bezeichnet man den auf der linken Seite stehenden Ausdruck mit $\lambda(12, 34, 56)$, so erhält man

$$\lambda(12, 34, 56) = \lambda(13, 46, 25)$$

Dieselbe Gleichung erhält man auch für den Durchschnittspunkt von (34) und (25), sowie von (56) und (13), mithin stellt dieselbe die Gleichung der Pascal'schen Linie des Sechsecks $SI(II\ III)$ vor.

Nun ist der Ausdruck $\lambda(12, 34, 56)$ nichts anderes, als eine lineare Verbindung der in § V. angegebenen drei Grössen $k_{12, 34, 56}$. Mit Hilfe der dortigen Entwickelungen erhält man daher

$$\lambda(12, 34, 56) = \frac{u_I + u_{II}}{\beta_I + \beta_{II}} \quad \text{u. s. w.}$$

wo die β ihre frühere Bedeutung haben, so dass man erhält:

$$\beta_I + \beta_{II} + \beta_{III} + \beta_{IV} + \beta_V + \beta_{VI} = 0 \tag{1}$$

$$\beta_I^3 + \beta_{II}^3 + \beta_{III}^3 + \beta_{IV}^3 + \beta_V^3 + \beta_{VI}^3 = 0 \tag{2}$$

während u_I, u_{II} u. s. w. 6 in Bezug auf x, y, z lineare Functionen sind, die den Gleichungen genügen:

$$u_I + u_{II} + u_{III} + u_{IV} + u_V + u_{VI} = 0 \tag{3}$$

$$u_I\beta_I^2 + u_{II}\beta_{II}^2 + u_{III}\beta_{III}^2 + u_{IV}\beta_{IV}^2 + u_V\beta_V^2 + u_{VI}\beta_{VI}^2 = 0 \tag{4}$$

Die Gleichung der zum Sechseck $SI(II\ III)$ zugehörigen Pascal'schen Linie lautet daher:

$$\frac{u_I + u_{II}}{\beta_I + \beta_{II}} = \frac{u_I + u_{III}}{\beta_I + \beta_{III}} \tag{5}$$

Bei diesem Punkte angelangt, kann man das Problem des Pascal'schen Sechsecks auf andere Weise auffassen, indem man direct von den 6 Functionen u und den 6 Constanten β ausgeht, zwischen denen die in 1), 2), 3), 4) aufgestellten Gleichungen bestehen. Dies soll in den folgenden Entwickelungen geschehen.

Zunächst mögen aus den Gleichungen 1), 2), 3) und 4) einige Identitäten abgeleitet werden, die später anzuwenden sind.

Aus 1) und 2) folgt

$$(\beta_I + \beta_{II} + \beta_{III})^3 - (\beta_I^3 + \beta_{II}^3 + \beta_{III}^3)$$
$$= -[(\beta_{IV} + \beta_V + \beta_{VI})^3 - (\beta_{IV}^3 + \beta_V^3 + \beta_{VI}^3)]$$

d. h.

$$(\beta_I + \beta_{II})(\beta_{II} + \beta_{III})(\beta_{III} + \beta_I) = -(\beta_{IV} + \beta_V)(\beta_V + \beta_{VI})(\beta_{VI} + \beta_{IV}) \tag{6}$$

Eine Gleichung, der man noch neun ähnliche hinzufügen kann. Ferner erhält man:

$$(\beta_I + \beta_{II} + \beta_{III})^2(u_I + u_{II} + u_{III}) - (u_I\beta_I^2 + u_{II}\beta_{II}^2 + u_{III}\beta_{III}^2)$$
$$= -[(\beta_{IV} + \beta_V + \beta_{VI})^2(u_{IV} + u_V + u_{VI}) - (u_{IV}\beta_{IV}^2 + u_V\beta_V^2 + u_{VI}\beta_{VI}^2)]$$

d. h.

$$(\beta_I+\beta_{II})(\beta_{II}+\beta_{III})(\beta_{III}+\beta_I)\left(\frac{u_I+u_{II}}{\beta_I+\beta_{II}}+\frac{u_{II}+u_{III}}{\beta_{II}+\beta_{III}}+\frac{u_{III}+u_I}{\beta_{III}+\beta_I}\right)$$
$$=-(\beta_{IV}+\beta_V)(\beta_V+\beta_{VI})(\beta_{VI}+\beta_{IV})\left(\frac{u_{IV}+u_V}{\beta_{IV}+\beta_V}+\frac{u_V+u_{VI}}{\beta_V+\beta_{VI}}+\frac{u_{VI}+u_{IV}}{\beta_{VI}+\beta_{IV}}\right)$$

daher mit Hilfe von 6)

$$\frac{u_I+u_{II}}{\beta_I+\beta_{II}}+\frac{u_{II}+u_{III}}{\beta_{II}+\beta_{III}}+\frac{u_{III}+u_I}{\beta_{III}+\beta_I}=\frac{u_{IV}+u_V}{\beta_{IV}+\beta_V}+\frac{u_V+u_{VI}}{\beta_V+\beta_{VI}}+\frac{u_{VI}+u_{IV}}{\beta_{VI}+\beta_{IV}} \tag{7}$$

eine Gleichung, der man ebenfalls noch neun ähnliche hinzufügen kann.

Bildet man die Gleichung

$$\frac{u_I+u_{II}}{\beta_I+\beta_{II}}=\frac{u_{III}+u_{IV}}{\beta_{III}+\beta_{IV}}$$

so folgt aus derselben

$$\frac{u_I+u_{II}}{\beta_I+\beta_{II}}=\frac{u_{III}+u_{IV}}{\beta_{III}+\beta_{IV}}=\frac{-(u_I+u_{II}+u_{III}+u_{IV})}{-(\beta_I+\beta_{II}+\beta_{III}+\beta_{IV})}=\frac{u_V+u_{VI}}{\beta_V+\beta_{VI}}$$

Die gerade Linie, die diese Gleichung

$$\frac{u_I+u_{II}}{\beta_I+\beta_{II}}=\frac{u_{III}+u_{IV}}{\beta_{III}+\beta_{IV}}=\frac{u_V+u_{VI}}{\beta_V+\beta_{VI}}$$

hat, wollen wir kurz mit Linie (*I II*, *III IV*, *V VI*), oder, entsprechend den Beziehungen zwischen lateinischen und arabischen Indices, mit Linie (12) bezeichnen. Die 15 geraden Linien, deren Gleichungen man aus der obigen durch Permutation der Indices erhält, sind die 15 Verbindungslinien von 6 auf einem Kegelschnitt liegenden Punkten und zwar schneiden sich die Linien (12), (13), (14), (15), (16) in einem Punkt u. s. w. Es genügt zu beweisen, dass sich die drei Linien (12), (13), (14) in einem Punkt schneiden, weil die übrigen Beweise diesem ganz analog sind.

Man kann die Gleichungen von (12), (13) und (14), oder (*I II*, *III IV*, *V VI*), (*I III*, *IV VI*, *V II*), (*I IV*, *II VI*, *III V*) schreiben in den Formen:

$$\frac{u_{III}+u_{IV}}{\beta_{III}+\beta_{IV}}=\frac{u_V+u_{VI}}{\beta_V+\beta_{VI}}$$
$$\frac{u_{IV}+u_I}{\beta_{IV}+\beta_I}=\frac{u_{VI}+u_{II}}{\beta_{VI}+\beta_{II}}$$
$$\frac{u_I+u_{III}}{\beta_I+\beta_{III}}=\frac{u_{II}+u_V}{\beta_{II}+\beta_V}$$

durch deren Addition man nach 7) eine identische Gleichung erhält.

Aus den obigen drei Gleichungen folgt:

$$\frac{(u_{III}+u_{IV})(u_{IV}+u_I)(u_I+u_{III})}{(\beta_{III}+\beta_{IV})(\beta_{IV}+\beta_I)(\beta_I+\beta_{III})}=\frac{u_V+u_{VI})(u_{VI}+u_{II})(u_{II}+u_V)}{(\beta_V)+\beta_{VI})(\beta_{VI}+\beta_{II})(\beta_{II}+\beta_V)}$$

oder, da der Nenner links plus dem Nenner rechts $=0$ ist

$$(u_{III}+u_{IV})(u_{IV}+u_I)(u_I+u_{III})+(u_V+u_{VI})(u_{VI}+u_{II})(u_{II}+u_V)$$

eine Gleichung, die mit Hilfe von 3) die Form annimmt:

$$u_I^3+u_{II}^3+u_{III}^3+u_{IV}^3+u_V^3+u_{VI}^3=0 \tag{8}$$

Ferner erhält man aus den obigen Gleichungen:

$$\frac{u_V+u_{VI}}{\beta_V+\beta_{VI}}\cdot\frac{u_{VI}+u_{II}}{\beta_{VI}+\beta_{II}}+\frac{u_{VI}+u_{II}}{\beta_{VI}+\beta_{II}}\cdot\frac{u_{II}+u_V}{\beta_{II}+\beta_V}$$
$$+\frac{u_{II}+u_V}{\beta_{II}+\beta_V}\cdot\frac{u_V+u_{VI}}{\beta_V+\beta_{VI}}=\frac{u_{III}+u_{IV}}{\beta_{III}+\beta_{IV}}\cdot\frac{u_{IV}+u_I}{\beta_{IV}+\beta_I}$$
$$+\frac{u_{IV}+u_I}{\beta_{IV}+\beta_I}\cdot\frac{u_I+u_{III}}{\beta_I+\beta_{III}}+\frac{u_I+u_{III}}{\beta_I+\beta_{III}}\cdot\frac{u_{III}+u_{IV}}{\beta_{III}+\beta_{IV}}.$$

oder nach einigen Reductionen:

$$9)\quad u_I^2\beta_I+u_{II}^2\beta_{II}+u_{III}^2\beta_{III}+u_{IV}^2\beta_{IV}+u_V^2\beta_V+u_{VI}^2\beta_{VI}=0.$$

Ebenso wie von diesem Punkte bewiesen wurde, dass er auf der Curve dritten Grades 8) und auf dem Kegelschnitt 9) liegt, ebenso kann man dies auch von den übrigen fünf Punkten beweisen.

Die sechs Punkte sind daher die Durchschnittspunkte des Kegelschnitts 9) mit der Curve dritten Grades 8).

Es bleibt noch zu beweisen, dass diese 6 Punkte in der Tat diejenigen 6 Punkte sind, von denen wir ausgegangen waren und kann man dies bewerkstelligen, indem man zeigt, dass die Pascal'schen Linien mit den früheren identisch sind.

Das Pascal'sche Sechseck *SI* (*IIIII*), oder *S*(1—2—5—6—4—3) hat als Gegenseiten (12) und (64); (25) und (43); (56) und (31); (12) hat die Gleichung:

$$\frac{u_I+u_{II}}{\beta_I+\beta_{II}}=\frac{u_{III}+u_{IV}}{\beta_{III}+\beta_{IV}}=\frac{u_V+u_{VI}}{\beta_V+\beta_{VI}}$$

Die Seite (64) hat die Gleichung:

$$\frac{u_I+u_{III}}{\beta_I+\beta_{III}}=\frac{u_{II}+u_{IV}}{\beta_{II}+\beta_{IV}}=\frac{u_V+u_{VI}}{\beta_V+\beta_{VI}}$$

Mithin ist für den Durchschnittspunkt

$$\frac{u_I+u_{II}}{\beta_I+\beta_{II}}=\frac{u_I+u_{III}}{\beta_I+\beta_{III}}$$

Dieselbe Gleichung erhält man für die Durchschnittspunkte der beiden anderen Gegenseitenpaare, sie ist daher die Gleichung der zugehörigen Pascal'schen Linie und stimmt in der Tat überein mit Gleichung 5).

Die drei Fundamentaldreiecke $\triangle_{I\,II}$, $\triangle_{II\,III}$, $\triangle_{III\,I}$ geben, zu je zwei combinirt, drei Sechsecke. Die drei zugehörigen Pascal'schen Linien haben die Gleichungen:

$$\frac{u_I+u_{II}}{\beta_I+\beta_{II}}=\frac{u_{II}+u_{III}}{\beta_{II}+\beta_{III}}$$

$$\frac{u_{II}+u_{III}}{\beta_{II}+\beta_{III}}=\frac{u_{III}+u_I}{\beta_{III}+\beta_I}$$

$$\frac{u_{III}+u_I}{\beta_{III}+\beta_I}=\frac{u_I+u_{II}}{\beta_I+\beta_{II}}$$

von denen jede aus den beiden anderen folgt. Sie schneiden sich daher in einem Punkt und zwar ist derselbe ein Steiner'scher Punkt. Er sei $\triangle_{(I\,II\,III)}$. Aus den für den Steiner'schen Punkt $\triangle_{(I\,II\,III)}$ geltenden Gleichungen findet man sofort $\frac{u_I}{\beta_I}=\frac{u_{II}}{\beta_{II}}=\frac{u_{III}}{\beta_{III}}$, also den Durchschnittspunkt der drei geraden Linien

$$10)\quad\left\{\begin{aligned}\frac{u_I}{\beta_I}&=\frac{u_{II}}{\beta_{II}}\\ \frac{u_{II}}{\beta_{II}}&=\frac{u_{III}}{\beta_{III}}\\ \frac{u_{III}}{\beta_{III}}&=\frac{u_I}{\beta_I}\end{aligned}\right.$$

Auf der ersten dieser drei geraden Linien liegen natürlich auch die Steiner'schen Punkte $s_{(I\,II\,IV)}$, $s_{(I\,II\,V)}$, $s_{(I\,II\,VI)}$. Daher erhalten wir den Satz, dass die 20 Steiner'schen Punkte zu je vier auf 15 geraden Linien liegen, und dass durch jeden Steiner'schen Punkt drei dieser Plücker'schen Geraden gehen.

Die Gleichungen dieser 15 Linien werden erhalten, wenn man je zwei der 6 linearen Ausdrücke $\frac{u_I}{\beta_I}, \frac{u_{II}}{\beta_{II}}, \frac{u_{III}}{\beta_{III}}, \frac{u_{IV}}{\beta_{IV}}, \frac{u_V}{\beta_V}, \frac{u_{VI}}{\beta_{VI}}$ einander gleich setzt.

Dass die beiden conjugirten Steiner'schen Punkte $s_{(I\ II\ III)}$ und $s_{(IV\ V\ VI)}$ conjugirte Pole in Bezug auf den Fundamentalkegelschnitt 9) sind, kann man folgendermassen beweisen:

Bezeichnet man mit u_I', u_{II}' etc. diejenigen Werte von u_I, u_{II} ..., welche man erhält, wenn man in denselben die Coordinaten x', y', z' eines Punktes einsetzt, so lautet die Gleichung der Polare dieses Punktes in Bezug auf den Kegelschnitt 9).

$$u_I u_I' \beta_I + u_{II} u_{II}' \beta_{II} + \dots = 0$$

Wählt man nun zu diesem Punkt den Punkt $s_{(I\ II\ III)}$, so ist $u_I' = \beta_I$, $u_{II}' = \beta_{II}$, $u_{III}' = \beta_{III}$ und die Gleichung der Polare wird mit Hilfe von 4)

$$u_{IV}\beta_{IV}(u_{IV}' - \beta_{IV}) + u_V\beta_V(u_V' - \beta_V) + u_{VI}\beta_{VI}(u_{VI}' - \beta_{VI}) = 0$$

Die drei Grössen $u_{IV}' - \beta_{IV}$, $u_V' - \beta_V$, $u_{VI}' - \beta_{VI}$ kann man folgendermassen eliminiren. Es ergiebt sich aus 3) und Verbindung mit 1) und 2)

$$u_{IV}' - \beta_{IV} + u_V' - \beta_V + u_{VI}' - \beta_{VI} = 0$$
$$(u_{IV}' - \beta_{IV})\beta_{IV}^2 + (u_V' - \beta_V)\beta_V^2 + (u_{VI}' - \beta_{VI})\beta_{VI}^2 = 0$$

Mit Hilfe dieser beiden Gleichungen geht die Gleichung der Polare über in:

$$\begin{vmatrix} u_{IV}\beta_{IV}, & u_V\beta_V, & u_{VI}\beta_{VI} \\ \beta_{IV}^2, & \beta_V^2, & \beta_{VI}^2 \\ 1, & 1, & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Dieselbe wird identisch erfüllt für

$$u_{IV} = \beta_{IV}, \quad u_V = \beta_V, \quad u_{VI} = \beta_{VI},$$

d. h. für die Coordinaten des conjugirten Steiner'schen Punktes $(IV\ V\ VI)$.

Die drei den Sechsecken $S_{I(IV\ V)}$, $S_{I(V\ VI)}$, $S_{I(VI\ IV)}$, welche alle drei zum System I. gehören, zugehörigen Pascal'schen Linien haben die Gleichungen:

$$\frac{u_I+u_{IV}}{\beta_I+\beta_{IV}}=\frac{u_I+u_{VI}}{\beta_I+\beta_{VI}},\quad \frac{u_I+u_{VI}}{\beta_I+\beta_{VI}}=\frac{u_I+u_V}{\beta_I+\beta_V},$$
$$\frac{u_I+u_V}{\beta_I+\beta_V}=\frac{u_I+u_{VI}}{\beta_I+\beta_{VI}}.$$

Wie aus diesen Gleichungen hervorgeht, schneiden sich diese drei Pascal'schen Linien in einem Punkt $K_{I(IV\,V\,VI)}$ oder auch $K_{I(II\,III)}$. Man erhält auf diese Weise 60 Punkte (Kirkmann'sche Punkte) und zwar liegen auf jeder Pascal'schen Linie drei derselben. Man kann jeden dieser Punkte einem Pascal'schen Sechsecke zuordnen, z. B. den Punkt $K_{I(II\,III)}$ dem Sechseck $S_{I(I\,II\,III)}$.

Der Punkt $k_{I(II\,III)}$ wird bestimmt durch die Gleichungen:

$$\frac{u_I+u_{IV}}{\beta_I+\beta_{IV}}=\frac{u_I+u_V}{\beta_I+\beta_V}=\frac{u_I+u_{VI}}{\beta_I+\beta_{VI}}.$$

Hieraus folgt die Gleichung:

$$\frac{u_{IV}-u_V}{\beta_{IV}-\beta_V}=\frac{u_V-u_{VI}}{\beta_V-\beta_{VI}},$$

oder in Determinatenform:

$$\begin{vmatrix} u_{IV}, & u_V, & u_{VI} \\ \beta_{IV}, & \beta_V, & \beta_{VI} \\ 1, & 1, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Gleichung wird ebenso erhalten für den Punkt $k\ II(III\ I)$ und $k\ III(II\ I)$. Diese drei Punkte liegen also auf einer Linie, welche eine Salmon'sche Linie genannt wird. Sie sei $sa\ (I\ II\ III)$ (nicht $sa\ (IV\ V\ VI)$). Die 20 Salmon'schen Linien entsprechen den 20 Steiner'schen Punkten, so z. B. $sa\ (I\ II\ III)$ dem Punkt $s\ (I\ II\ III)$.

Da die Gleichung der Linie $sa\ (I\ II\ III)$ identisch erfüllt wird für $u_{IV}=\beta_{IV}$, $u_V=\beta_V$, $u_{VI}=\beta_{VI}$, so geht sie durch den Steiner'schen Punkt $s\ (IV\ V\ VI)$ und erhält man daher den Satz:

Jede Salmon'sche Linie geht durch denjenigen Steiner'schen Punkt, welcher dem ihr entsprechenden Steiner'schen Punkte conjugirt ist.

Die vier Linien

$sa\ (I\ II\ III)$, $sa\ (I\ II\ IV)$, $sa\ (I\ II\ V)$, $sa\ (I\ II\ VI)$

haben die Gleichungen:

$$\begin{vmatrix} u_{IV}, & u_V, & u_{VI} \\ \beta_{IV}, & \beta_V, & \beta_{VI} \\ 1, & 1, & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} u_{III}, & u_V, & u_{VI} \\ \beta_{III}, & \beta_V, & \beta_{VI} \\ 1, & 1, & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} u_{III}, & u_{IV}, & u_{VI} \\ \beta_{III}, & \beta_{IV}, & \beta_{VI} \\ 1, & 1, & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} u_{III}, & u_{IV}, & u_V \\ \beta_{III}, & \beta_{IV}, & \beta_V \\ 1, & 1, & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Da zwischen den vier links stehenden Ausdrücken A_3, A_4, A_5, A_6 die beiden identischen Gleichungen stattfinden

$$A_3 - A_4 - A_5 - A_6 = 0$$
$$A_3\beta_{III} - A_4\beta_{IV} - A_5\beta_V - A_6\beta_{VI} = 0$$

so folgt, dass, wenn zwei derselben $= 0$ sind, die beiden anderen auch $= 0$ sein müssen, d. h. dass obige vier Salmon'sche Linien durch einen Punkt (Cayley'schen Punkt) gehen, welcher der Plücker-schen Linie $\frac{u_I}{\beta_I} = \frac{u_{II}}{\beta_{II}}$ entspricht.

Da die letzten Sätze den entsprechenden Sätzen über die Steiner-schen Punkte und Plücker'schen Linien reciprok sind, so hat Hesse in Crelle's Journal Band 68., pag. 193. die Frage aufgeworfen, ob die Kirkmann'schen Punkte, sowie die Salmon'schen Linien und Cayley'schen Punkte eine den Pascal'schen Linien, Steiner'schen Punkten und Plücker'schen Linien wirklich reciproke Figur bilden, wenn auch nicht in Bezug auf den betrachteten Kegelschnitt, so doch in Bezug auf einen anderen. Man kann indessen beweisen, dass, selbst wenn die Salmon'schen Linien und Cayley'schen Punkte den entsprechenden Steiner'schen Punkten und Plücker'schen Linien wirklich reciprok sein sollten, doch jedenfalls die Kirkmann'schen Punkte den Pascal'schen Linien nicht reciprok sein können, sondern, dass statt der Kirkmann'schen Punkte andere substituirt werden müssen.

Wenn nämlich die Kirkmann'schen Punkte den Pascal'schen Linien reciprok wären, so müssten den vier sich in einem Punkt und zwar im Punkt ((46), (12)) schneidenden Pascal'schen Linien:

$$\frac{u_I + u_{VI}}{\beta_I + \beta_{VI}} = \frac{u_I + u_{III}}{\beta_I + \beta_{III}}$$

$$\frac{u_I + u_{VI}}{\beta_I + \beta_{VI}} = \frac{u_{IV} + u_{VI}}{\beta_{IV} + \beta_{VI}}$$

$$\frac{u_{IV}+u_{II}}{\beta_{IV}+\beta_{II}}=\frac{u_{IV}+u_{III}}{\beta_{IV}+\beta_{III}}$$

$$\frac{u_{I}+u_{III}}{\beta_{I}+\beta_{III}}=\frac{u_{IV}+u_{I}}{\beta_{IV}+\beta_{I}}$$

auch vier Kirkmann'sche Punkte entsprechen, die in gerader Linie liegen. Man kann aber ihre Gleichungen schreiben in der Form:

$$\frac{u_{V}-u_{VI}}{\beta_{V}-\beta_{VI}}=\frac{u_{I}+u_{IV}}{\beta_{I}+\beta_{IV}}=\frac{u_{I}+u_{V}}{\beta_{I}+\beta_{V}}=\frac{u_{I}+u_{VI}}{\beta_{I}+\beta_{VI}}$$

$$\frac{u_{V}-u_{VI}}{\beta_{V}-\beta_{VI}}=\frac{u_{IV}+u_{I}}{\beta_{IV}+\beta_{I}}=\frac{u_{IV}+u_{V}}{\beta_{IV}+\beta_{V}}=\frac{u_{IV}+u_{VI}}{\beta_{IV}+\beta_{VI}}$$

$$\frac{u_{V}-u_{VI}}{\beta_{V}-\beta_{VI}}=\frac{u_{II}+u_{III}}{\beta_{II}+\beta_{III}}=\frac{u_{II}+u_{V}}{\beta_{II}+\beta_{V}}=\frac{u_{II}+u_{VI}}{\beta_{II}+\beta_{VI}}$$

$$\frac{u_{V}+u_{VI}}{\beta_{V}+\beta_{VI}}=\frac{u_{III}+u_{II}}{\beta_{III}+\beta_{II}}=\frac{u_{III}+u_{V}}{\beta_{III}+\beta_{V}}=\frac{u_{III}+u_{VI}}{\beta_{III}+\beta_{VI}}$$

Daraus folgt, dass die ersten beiden Punkte auf der geraden Linie liegen:

$$\frac{u_{V}-u_{VI}}{\beta_{V}-\beta_{VI}}=\frac{u_{I}+u_{IV}}{\beta_{I}+\beta_{IV}}$$

während die beiden anderen Punkte auf der geraden Linie liegen

$$\frac{u_{V}-u_{VI}}{\beta_{V}-\beta_{VI}}=\frac{u_{II}+u_{III}}{\beta_{II}+\beta_{III}}$$

was zwei verschiedene gerade Linien sind.

XVIII.

Bestimmung einer Fläche durch die eine ihrer zwei Mittelpunktsflächen.

Von

R. Hoppe.

---

§. 1. Differentialgleichung.

Dem Punkte P' auf einer Fläche Ω' entspreche der Punkt P auf der Mittelpunktsfläche Ω und der Punkt P_1 auf der Mittelpunktsfläche Ω_1, und zwar seien $\varrho = P'P$ und $\varrho_1 = P'P_1$ die zwei Hauptkrümmungsradien von Ω'.

Wir betrachten Ω nebst allen Bestimmungsgrössen als beliebig gegeben; x, y, z seien die cartesischen Coordinaten von P; p, q, r die Richtungscosinus der Normale; der Accent und der Index 1 bezeichne die entsprechenden Bestimmungsgrössen auf Ω' und Ω_1. Dann ist

$$x' = x - \varrho p'; \quad \text{etc.} \tag{1}$$

$$x_1 = x + (\varrho_1 - \varrho)p'; \quad \text{etc.} \tag{2}$$

Da die Normale von Ω' in P' die Fläche Ω in P berührt, so hat man:

$$pp' + qq' + rr' = 0$$

Differentiirt man Gl. (1), so erhält man für beliebige Variationsrichtung längs Ω:

$$\partial x' = \partial x - \varrho\,\partial p' - p'\partial\varrho, \quad \text{etc.}$$

Multiplicirt man mit p' und addirt die Analogen, so kommt:

$$p'\partial x + q'\partial y + r'\partial z = \partial\varrho$$

und die p', q', r' haben nun allein die Bedingung zu erfüllen, dass die linke Seite eine Differential ist. Sind u, v beliebige gemeinsame Parameter der 3 Flächen, so hat man hiernach zu ihrer Bestimmung das System von 3 Gleichungen:

$$p'\frac{\partial x}{\partial u}+q'\frac{\partial y}{\partial u}+r'\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial \varrho}{\partial u}$$

$$p'\frac{\partial x}{\partial v}+q'\frac{\partial y}{\partial v}+r'\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial \varrho}{\partial v}$$

$$p'p+q'q+r'r=0$$

Bezeichnen e, f, g die Coefficienten des allgemeinen Linienelements, auf Ω, so dass

$$\partial s^2=e\,\partial u^2+2f\,\partial u\,\partial v+g\,\partial v^2$$

und ist

$$t^2=eg-f^2$$

so ergiebt die Auflösung des obigen Systems:

$$t^2p'=\frac{\partial \varrho}{\partial u}\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial v} & f\\ \frac{\partial x}{\partial v} & g\end{vmatrix}+\frac{\partial \varrho}{\partial v}\begin{vmatrix}e & \frac{\partial x}{\partial u}\\ f & \frac{\partial x}{\partial v}\end{vmatrix};\ \text{etc.} \tag{3}$$

und die Quadratsumme der Analogen:

$$t^2=g\left(\frac{\partial \varrho}{\partial u}\right)^2-2f\frac{\partial \varrho}{\partial u}\frac{\partial \varrho}{\partial v}+e\left(\frac{\partial \varrho}{\partial v}\right)^2 \tag{4}$$

Hat man diese partielle Differentialgleichung allgemein oder speciell integrirt, so ist das Problem, die Urfläche zu einer gegebenen Mittelpunktsfläche zu finden, bzhw. allgemein oder speciell gelöst, sofern in Gl. (1) zunachst ϱ, dann durch Gl. (3) p' etc. in bekannten Grössen dargestellt sind. Die Darstellung der zweiten Mittelpunktsfläche (2) ist alsdann kein Problem mehr.

Aus der Form der Gl. (4) ist folgendes voraus zu ersehen. Da ϱ nur differentiirt vorkommt, so folgt der schon von Anfang deutliche Satz:

Entspricht irgend eine Urfläche einer gegebenen Mittelpunktsfläche, so entsprechen ihr auch alle der ersten parallelen Flächen.

Da ferner das allgemeine Integral der Gl. (4) eine willkürliche Function einer Variabeln enthält, so resultirt:

Zu jeder gegebenen Mittelpunktsfläche gehört im allgemeinen eine Familie von Urflächen, die sich durch die Werte einer willkürlichen Function einer Variabeln unterscheiden.

Die Coefficienten der Gl. (4) sind diejenigen Grössen, welche bei Biegung der Fläche Ω unverändert bleiben, welche also allen auf Ω abwickelbaren Flächen gemeinsam sind; daher sind ihnen auch die allgemeinen Werte von ϱ gemeinsam. Die p', q', r' ändern sich mit $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$, etc., bleiben aber an die, an Ω haftende Tangentialrichtung gebunden. Man kann das Resultat aussprechen:

Ist für eine Mittelpunktsfläche eine Urfläche gefunden, so ist dasselbe Problem für alle auf ihr abwickelbaren Flächen gelöst. Die Tangente, deren Endpunkt die Urfläche erzeugt, ist für alle gleich lang, und ihre Richtung ist durch den entsprechenden Nachbarpunkt bestimmt.

Die Urflächen sind offenbar im allgemeinen nicht auf einander abwickelbar.

§. 2. Einige Transformationen.

Von jetzt an seien u, v orthogonal geodätisch, so dass

$$e = 1; \qquad f = 0; \qquad g = t^2$$

wird, und man die Differentialformeln hat:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = Ep; \quad \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = Fp + \frac{\partial t}{t\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} \\ &\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = Gp - \frac{t\partial t}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial t}{t\partial v}\frac{\partial x}{\partial v} \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$\frac{\partial p}{\partial u} = -E\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{F}{t^2}\frac{\partial x}{\partial v}; \quad \frac{\partial p}{\partial v} = -F\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{G}{t^2}\frac{\partial x}{\partial v} \tag{6}$$

wo

$$E = p\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \ldots; \quad F = p\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + \ldots; \quad G = p\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + \ldots$$

Die Gl. (5) lassen sich auch schreiben:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = Ep; \quad \frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial x}{t\partial v} = \frac{F}{t}p; \quad \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial x}{t\partial v} = \frac{G}{t}p - \frac{\partial t}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} \tag{7}$$

Gl. (4) wird jetzt:

$$\left(\frac{\partial \varrho}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varrho}{t\partial v}\right)^2 = 1 \tag{8}$$

und lässt sich zerlegen in

$$\frac{\partial \varrho}{\partial u} = \sin \omega; \qquad \frac{\partial \varrho}{\partial v} = t \cos \omega \tag{9}$$

woraus nach Elimination von ϱ:

$$\frac{\partial \omega}{\partial v} = \frac{\partial t}{\partial u} - \frac{\partial \omega}{\partial u} t \operatorname{tg} \omega \tag{10}$$

Ist diese Gleichung integrirt, mithin ω in u, v bekannt, so hat man:

$$\varrho = \int_a \sin \omega \, \partial u + \int (t \cos \omega)_{u=a} \, \partial v \tag{11}$$

wo unter dem ersten Integralzeichen v als Constante zu betrachten ist.

Gl. (3) lautet nun:

$$p' = \frac{\partial x}{\partial u} \sin \omega + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\cos \omega}{t} \tag{12}$$

Von dem orthogonalen System der $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{t\partial v}$, p wollen wir zu dem neuen der ξ, p', p übergehen mit der Determinante:

$$\begin{vmatrix} \xi & p' & p \\ \eta & q' & q \\ \zeta & r' & r \end{vmatrix} = 1$$

dann ist

$$\xi = \frac{\partial x}{\partial u} \cos \omega - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\sin \omega}{t}$$

und umgekehrt

$$\frac{\partial x}{\partial u} = p' \sin \omega + \xi \cos \omega$$

$$\frac{\partial x}{t\partial v} = p' \cos \omega - \xi \sin \omega$$

Ferner wollen wir für folgende oft vorkommende Grössen Abkürzungen gebrauchen:

$$\mu = E \sin \omega + \frac{F}{t} \cos \omega \qquad \mu_1 = E \cos \omega - \frac{F}{t} \sin \omega \tag{13}$$

$$\nu = F \sin \omega + \frac{G}{t} \cos \omega \qquad \nu_1 = F \cos \omega - \frac{G}{t} \sin \omega$$

$$\varkappa = \mu \sin\omega + \frac{\nu}{t}\cos\omega \qquad \varkappa_2 = \mu_1 \cos\omega - \frac{\nu_1}{t}\sin\omega \tag{13}$$

$$\varkappa_1 = \mu_1 \sin\omega + \frac{\nu_1}{t}\cos\omega = \mu\cos\omega - \frac{\nu}{t}\sin\omega$$

woraus:

$$\varkappa + \varkappa_2 = E + \frac{G}{t^2}$$

und, wenn K die Krümmung der Fläche Ω bezeichnet:

$$\mu\nu_1 - \nu\mu_1 = -\frac{EG - F^2}{t} = -Kt \tag{14}$$

Dann kann man die Differentialformeln für die eingeführten Richtungscosinus folgendermassen schreiben:

$$\left.\begin{array}{ll}
\frac{\partial \xi}{\partial u} = \mu_1 p - \frac{\partial \omega}{\partial u} p' & \frac{\partial \xi}{\partial v} = \nu_1 p + \frac{\partial \omega}{\partial u} p' t \operatorname{tg}\omega \\
\frac{\partial p'}{\partial u} = \mu p + \frac{\partial \omega}{\partial u}\xi & \frac{\partial p'}{\partial u} = \nu p - \frac{\partial \omega}{\partial u}\xi t \operatorname{tg}\omega \\
\frac{\partial p}{\partial u} = -\mu p' - \mu_1 \xi & \frac{\partial p}{\partial v} = -\nu p' - \nu_1 \xi
\end{array}\right\} \tag{15}$$

Differentiirt man hiernach Gl. (1) und setzt noch zur Abkürzung

$$\delta = \cos\omega - \varrho \frac{\partial \omega}{\partial u}$$

so kommt:

$$\frac{\partial x'}{\partial u} = \delta\xi - \varrho\mu p \qquad \frac{\partial x'}{\partial v} = -\delta\xi t \operatorname{tg}\omega - \varrho\nu p \tag{16}$$

Hieraus ergiebt sich:

$$p't' = \begin{vmatrix} \frac{\partial y'}{\partial u} & \frac{\partial y'}{\partial v} \\ \frac{\partial z'}{\partial u} & \frac{\partial z'}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\varrho\delta\varkappa t}{\cos\omega} p'$$

also:

$$t' = \frac{\delta\varrho\varkappa t}{\cos\omega} \tag{17}$$

ferner die Werte:

$$e' = \delta^2 + \varrho^2\mu^2; \quad f' = -\delta^2 t \operatorname{tg}\omega + \varrho^2\mu\nu; \quad g' = (\delta t \operatorname{tg}\omega)^2 + \varrho^2\nu^2 \tag{18}$$

denen zufolge das Linienelement auf Ω' dargestellt wird durch

$$\partial s'^2 = \delta^2(\partial u - t\partial v \operatorname{tg}\omega)^2 + \varrho^2(\mu\partial u + \nu\partial v)^2 \tag{19}$$

§. 3. Hauptkrümmungen und zweite Mittelpunktsfläche.

Bekanntlich kann man die partiellen Differentialquotienten der Normale irgend einer Fläche in folgender Form darstellen:

$$\frac{\partial p'}{\partial u} = H' \frac{\partial x'}{\partial u} + H_1' \frac{\partial x'}{\partial v}; \quad \frac{\partial p'}{\partial v} = J' \frac{\partial x'}{\partial u} + J_1' \frac{\partial x'}{\partial v} \tag{20}$$

Führt man auf den linken Seiten die Werte (14), auf den rechten die Werte (15) ein, so müssen die Coefficienten von ξ und p auf beiden Seiten gleich sein, und man erhält die 2 Gleichungspare:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \omega}{\partial u} &= H'\delta - H_1'\delta t \operatorname{tg}\omega \\ \mu &= -H'\varrho\mu - H_1'\varrho\nu \\ -\frac{\partial \omega}{\partial u} t \operatorname{tg}\omega &= J'\delta - J_1'\delta t \operatorname{tg}\omega \\ \nu &= -J'\varrho\mu - J_1'\varrho\nu\end{aligned}$$

nach deren Auflösung sich ergiebt:

$$\left.\begin{aligned} H' &= \frac{\nu \cos^2\omega}{\varrho\delta\varkappa t} - \frac{1}{\varrho} \qquad & H_1' &= -\frac{\mu \cos^2\omega}{\varrho\delta\varkappa t} \\ J' &= -\frac{\nu \sin\omega \cos\omega}{\varrho\delta\varkappa} \qquad & J_1' &= \frac{\mu \sin\omega\cos\omega}{\varrho\delta\varkappa} - \frac{1}{\varrho}\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Aus diesen 4 Grössen lässt sich sehr einfach die Summe und das Product der Hauptkrümmungen bilden, nämlich

$$\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho_1} = -H' - J_1' = \frac{2}{\varrho} - \frac{\cos\omega}{\varrho\delta}$$

$$\frac{1}{\varrho\varrho_1} = H'J_1' - H_1'J' = \frac{1}{\varrho^2} - \frac{\cos\omega}{\varrho^2\delta}$$

Beide geben übereinstimmend:

$$\frac{1}{\varrho_1} = -\frac{1}{\delta}\frac{\partial\omega}{\partial u} \quad \text{oder} \tag{22}$$

$$\varrho_1 = \varrho - \frac{\cos\omega}{\frac{\partial\omega}{\partial u}} \tag{23}$$

Die Gleichungen der 2. Mittelpunktsfläche sind also:

$$x_1 = x - \frac{p'\cos\omega}{\frac{\partial\omega}{\partial u}}; \quad \text{etc.} \tag{24}$$

Aus den Gl. (21) erhält man noch beiläufig:

$$\left.\begin{aligned} E' &= -H'e' - H'f' = \varrho\mu^2 - \delta\frac{\partial\omega}{\partial u} \\ F' &= -H'f' - H_1'g' = -J'e' - J_1'f' = \varrho\mu\nu - \delta t \operatorname{tg}\omega\frac{\partial\omega}{\partial u} \\ G' &= -J'f' - J_1'g' = \varrho\nu^2 - \delta(t\operatorname{tg}\omega)^2\frac{\partial\omega}{\partial u} \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

§. 4. Krümmungslinien der Urfläche.

Die Hauptkrümmungsrichtungen von Ω' werden bestimmt durch

$$J'\left(\frac{\partial v}{\partial u}\right)^2 + (H' - J_1')\frac{\partial v}{\partial u} - H_1' = 0$$

das ist nach Einsetzung der Werte (21);

$$\nu t \sin\omega\left(\frac{\partial v}{\partial u}\right)^2 + (\mu t \sin\omega - \nu\cos\omega)\frac{\partial v}{\partial u} - \mu\cos\omega = 0$$

Die linke Seite zerfällt von selbst in 2 Factoren, so dass man hat:

$$\left(t\sin\omega\frac{\partial v}{\partial u} - \cos\omega\right)\left(\nu\frac{\partial v}{\partial u} + \mu\right) = 0$$

Demnach sind die Differentialgleichungen der Krümmungslinie auf Ω':

$$\partial u = t\operatorname{tg}\omega\partial v \quad \text{und} \quad \mu\partial u + \nu\partial v = 0 \tag{26}$$

Es fragt sich, welche von beiden der Kürzesten auf Ω entspricht?

Bezeichnet s einen Bogen auf Ω entsprechend dem erstern Variationsverhältniss, so ist

$$\partial s^2 = \partial u^2 + t^2\partial v^2 = \frac{\partial u^2}{\sin^2\omega} = \frac{t^2\partial v^2}{\cos^2\omega}$$

woraus:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \sin\omega; \quad \frac{\partial v}{\partial s} = \frac{\cos\omega}{t} \tag{27}$$

$$\frac{\partial x}{\partial s} = p'; \quad \text{etc.} \tag{28}$$

Letzteres nach den Formeln (15) differentiirt giebt:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial s^2} = \varkappa p$$

folglich ist s Kürzeste, und es ist die erstere der Gl. (26), welche diejenige Krümmungslinie auf Ω' bestimmt, deren Evolute auf Ω

liegt. Die durch $\mu\partial u + \nu\partial v = 0$ ausgedrückte Krümmungslinie steht dann in derselben Beziehung zu Ω_1.

Das System der Kürzesten s wird von einem System geodätischer Parallelen s_2 rechtwinklig geschnitten, längs welchen das Variationsverhältniss

$$\frac{\partial v}{\partial u} = -\frac{\operatorname{tg}\omega}{t}$$

ist. Diesem gemäss ist

$$\frac{\partial \varrho}{\partial s_2} = \left(\frac{\partial \varrho}{\partial u} - \frac{\partial \varrho}{\partial v}\frac{\operatorname{tg}\omega}{t}\right)\frac{\partial u}{\partial s_2} = 0$$

folglich entspricht s_2 auf Ω' eine Curve constanter erster Hauptkrümmung.

Wir wollen nun die 3 Curven auf Ω'

$$s' \quad \text{für} \quad \partial u \cos\omega - t\,\partial v \sin\omega = 0 \tag{29}$$

$$s_1' \quad \text{für} \quad \mu\partial u + \nu\partial v = 0 \tag{30}$$

$$s_2' \quad \text{für} \quad \partial\varrho = \partial u \sin\omega + t\,\partial v \cos\omega = 0 \tag{31}$$

einzeln untersuchen.

§. 5. Erste Krümmungslinie.

Für die Krümmungslinie (29) verschwindet in Gl. (19) der erste Term der rechten Seite, und man erhält:

$$\partial s' = \varrho(\mu\partial u + \nu\partial v) = \frac{\varrho\varkappa\,\partial u}{\sin\omega} = \frac{\varrho\varkappa t\,\partial v}{\cos\omega}$$

$$\frac{\partial u}{\partial s'} = \frac{\sin\omega}{\varrho\varkappa}; \quad \frac{\partial v}{\partial s'} = \frac{\cos\omega}{\varrho\varkappa t} \tag{32}$$

Hiernach findet man aus (15):

$$\frac{\partial \xi}{\partial s'} = \frac{\varkappa_1 p}{\varrho\varkappa}; \quad \frac{\partial p'}{\partial s'} = \frac{p}{\varrho}; \quad \frac{\partial p}{\partial s'} = -\frac{\varkappa_1\xi}{\varrho\varkappa} - \frac{p'}{\varrho} \tag{33}$$

Nach (16) werden jetzt die Richtungscosinus der Tangente an s':

$$\frac{\partial x'}{\partial s'} = -p; \quad \text{etc.} \tag{34}$$

also nach neuer Differentiation:

$$\frac{\partial^2 x'}{\partial s'} = \frac{\varkappa_1\xi}{\varrho\varkappa} + \frac{p'}{\varrho}; \quad \text{etc.} \tag{35}$$

Bezeichnet $\partial\tau$ den Contingenzwinkel der Tangente irgend einer Curve s, so ist

$$\left(\frac{\partial\tau'}{\partial s'}\right)^2 = \left(\frac{\varkappa_1}{\varrho\varkappa}\right)^2 + \frac{1}{\varrho^2} \tag{36}$$

Setzt man

$$\operatorname{tg}\pi' = \frac{\varkappa_1}{\varkappa} \tag{37}$$

so wird

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\partial\tau'}{\partial s'}\cos\pi'; \quad \frac{\varkappa_1}{\varrho\varkappa} = \frac{\partial\tau'}{\partial s'}\sin\pi' \tag{38}$$

daher sind die Richtungscosinus der Hauptnormale:

$$\frac{\partial}{\partial\tau'}\frac{\partial x'}{\partial s'} = \xi\sin\pi' + p'\cos\pi'; \quad \text{etc.} \tag{39}$$

Bezeichnen l, m, n die Richtungscosinus der Binormale irgend einer Curve s, so ergiebt sich aus (34) und (39):

$$l' = \xi\cos\pi' - p'\sin\pi'; \quad \text{etc.} \tag{40}$$

Nach Differentiation findet man:

$$-\frac{\partial}{\partial\tau'}\frac{\partial x'}{\partial s'}\frac{\partial\vartheta'}{\partial s'} = -(\xi\sin\pi' + p'\cos\pi')\frac{\partial\pi'}{\partial s'}$$

wo $\partial\vartheta'$ den Contingenzwinkel der Schmiegungsebene bezeichnet, und nach Division durch (39):

$$\frac{\partial\vartheta'}{\partial s'} = \frac{\partial\pi'}{\partial s'} \tag{40*}$$

Daher ist $\vartheta' - \pi'$ constant längs der ersten Krümmungslinie, und $\vartheta' = \pi'$, wenn man den Anfang der ϑ' in $\varkappa_1 = 0$ nimmt.

§. 6. Zweite Krümmungslinie.

Für die Krümmungslinie (30) verschwindet in Gl. (19) der zweite Term der rechten Seite, und man erhält:

$$\partial s_1' = \delta(\partial u - t\,\partial v\operatorname{tg}\omega) = \frac{\delta\varkappa t\,\partial u}{\nu\cos\omega} = -\frac{\delta\varkappa t\,\partial v}{\mu\cos\omega}$$

$$\frac{\partial u}{\partial s_1'} = \frac{\nu\cos\omega}{\delta\varkappa t}; \quad \frac{\partial v}{\partial s_1'} = -\frac{\mu\cos\omega}{\delta\varkappa t} \tag{41}$$

Aus den Formeln (15) geht hier hervor: (42)

$$\frac{\partial\xi}{\partial s_1'} = \frac{1}{\delta}\left(\frac{Kp\cos\omega}{\varkappa} - \frac{\partial\omega}{\partial u}p'\right); \quad \frac{\partial p'}{\partial s_1'} = \frac{\partial\omega}{\partial u}\frac{\xi}{\delta}; \quad \frac{\partial p}{\partial s_1'} = \frac{K\xi\cos\omega}{\delta\varkappa}$$

Der Richtungscosinus der Tangente wird

$$\frac{\partial x'}{\partial s_1'} = \xi; \quad \text{etc.} \tag{43}$$

woraus:

$$\frac{\partial^2 x'}{\partial s_1'^2} = \frac{Kp\cos\omega}{\delta\varkappa} - \frac{\partial\omega}{\partial u}\frac{p'}{\delta} \tag{44}$$

$$\left(\frac{\partial\tau_1'}{\partial s_1'}\right)^2 = \frac{1}{\delta^2}\left\{\left(\frac{K\cos\omega}{\varkappa}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial u}\right)^2\right\} \tag{45}$$

und wenn man

$$\operatorname{tg}\pi_1' = \frac{\varkappa}{K\cos\omega}\frac{\partial\omega}{\partial u} \tag{46}$$

setzt:

$$\frac{\partial}{\partial\tau_1'}\frac{\partial x'}{\partial s_1'} = -p'\sin\pi_1' - p\cos\pi_1'; \quad \text{etc.} \tag{47}$$

$$l_1' = p'\cos\pi_1' - p\sin\pi_1' \tag{48}$$

$$\frac{\partial\vartheta_1'}{\partial s_1'} = \frac{\partial\pi_1'}{\partial s_1'}$$

mithin $\vartheta_1' - \pi_1'$ constant längs der zweiten Krümmungslinie.

§. 7. Curve constanter erster Hauptkrümmung.

Für die Curve (31) wird

$$\partial u - t\,\partial v\operatorname{tg}\omega = \frac{\partial u}{\cos^2\omega}; \quad \mu\partial u + \nu\partial v = \frac{\varkappa_1\,\partial u}{\cos\omega}$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\delta = \gamma\sin\varepsilon\cos\omega; \quad \varrho\varkappa_1 = \gamma\cos\varepsilon \tag{49}$$

so erhält man aus (19):

$$\frac{\partial u}{\partial s_2'} = \frac{\cos\omega}{\gamma}; \qquad \frac{\partial v}{\partial s_2'} = -\frac{\sin\omega}{\gamma t} \tag{50}$$

und dann weiter nach (15):

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\xi}{\partial s_2'} &= \frac{\varkappa_2 p}{\gamma} - \frac{\partial\omega}{\partial u}\frac{p'}{\gamma\cos\omega} \\
\frac{\partial p'}{\partial s_2'} &= \frac{\varkappa_1 p}{\gamma} + \frac{\partial\omega}{\partial u}\frac{\xi}{\gamma\cos\omega} \\
\frac{\partial p}{\partial s_2'} &= -\frac{\varkappa_2\xi}{\gamma} - \frac{\varkappa_1 p'}{\gamma}
\end{aligned}\right\} \tag{51}$$

dann nach (16):

$$\frac{\partial x'}{\partial s_2'} = \xi \sin \varepsilon - p \cos \varepsilon; \quad \text{etc.} \tag{52}$$

Setzt man ferner

$$\operatorname{tg} \pi_2' = \frac{1}{\varrho} \frac{1 - \dfrac{\delta}{\gamma^2 \cos \omega}}{\dfrac{\varkappa_2}{\gamma} + \dfrac{\partial \varepsilon}{\partial s_2'}} \tag{53}$$

so findet man nach demselben Verfahren wie oben:

$$\left(\frac{\partial \tau_2'}{\partial s_2'}\right)^2 = \left(\frac{\varkappa_2}{\gamma} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial s_2'}\right)^2 + \frac{1}{\varrho^2}\left(1 - \frac{\delta}{\gamma^2 \cos \omega}\right)^2 \tag{54}$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau_2'} \frac{\partial x'}{\partial s_2'} = (\xi \cos \varepsilon + p \sin \varepsilon) \cos \pi_2' + p' \sin \pi_2'; \quad \text{etc.} \tag{55}$$

$$l_2' = (\xi \cos \varepsilon + p \sin \varepsilon) \sin \pi_2' - p' \cos \pi_2'; \quad \text{etc.} \tag{56}$$

$$\frac{\partial \vartheta_2'}{\partial s_2'} = \frac{\varkappa_1}{\gamma^2} - \frac{\partial \pi_2'}{\partial s_2'} \tag{57}$$

§. 8. Singulares Integral. Neue Auffassung des Problems.

Die Gl. (10) in der Form

$$\frac{\partial \omega}{\partial v} \cos \omega + \frac{\partial \omega}{\partial u} t \sin \omega - \frac{\partial t}{\partial u} \cos \omega = 0$$

wird speciell befriedigt durch

$$\omega = \mathrm{R}$$

Dem entspricht:

$$\varrho = u + \text{const}$$

wofür wir ohne Einbusse an Allgemeinheit $\varrho = u$ schreiben können. Hier wird

$$p' = \frac{\partial x}{\partial u}; \quad \xi = -\frac{\partial x}{t \partial v}$$

und die Gleichung der Urfläche lautet:

$$x' = x - u \frac{\partial x}{\partial u}; \quad \text{etc.} \tag{58}$$

das sind die Gleichungen der Evolvente der Curve auf Ω, deren Bogen u ist. Dieser Curve entspricht dann auf Ω' diejenige Krümmungslinie, zu der Ω als Mittelpunktsfläche gehört. Das Ergebniss lässt sich in folgenden Sätzen aussprechen.

Zu jedem orthogonal geodätischen Curvensystem auf einer beliebigen Fläche gehört eine einzige Schar paralleler Flächen, auf welcher den Kürzesten jenes Systems die eine Schar von Krümmungslinien entspricht. Jede dieser parallelen Fläche ist der Ort derjenigen Evolventen jener Kürzesten, deren Abwickelung in einer gemeinsamen orthogonalen Trajectorie derselben ihren Anfang nimmt.

Da aber auch umgekehrt auf jeder Urfläche Ω' für dieselbe Mittelpunktsfläche Ω die eine Schar von Krümmungslinien einer bestimmten Schar Kürzester entspricht, durch diese wieder die orthogonalen Trajectorien bestimmt sind, so ergiebt sich als zweiter Satz:

Die Allgemeinste Urfläche zu gegebener Mittelpuntsfläche ist der Ort der Evolventen der allgemeinsten Schar Kürzester auf ihr, beginnend in gemeinsamer orthogonaler Trajectorie.

Hiernach ist für eine beliebig gegebene Fläche das anfänglich gestellte Problem identisch mit dem Problem der Auffindung des allgemeinsten orthogonal geodätischen Systems: durch Integration der Gl. (4) ergiebt sich die Lösung des letztern und umgekehrt. Zwischen beiden Fällen bildet derjenige eine Vermittelung, wo irgend ein einzelnes orthogonal geodätisches System bekannt ist. Hier tritt an die Stelle der Gl. (4) die einfachere (10), durch deren Integration dann beide Fragen erledigt werden.

Für die singulare Lösung $\omega = R$ werden manche Formeln unbrauchbar. Differentiirt man die Gl. (58) direct nach den Formeln (5), so kommt:

$$\frac{\partial x'}{\partial u} = -Eup; \quad \frac{\partial x'}{\partial v} = \left(1 - \frac{u}{t}\frac{\partial t}{\partial u}\right)\frac{\partial x}{\partial v} - Fup \tag{59}$$

woraus:

$$e' = E^2u^2; \quad f' = EFu^2; \quad g' = \left(t - u\frac{\partial t}{\partial u}\right)^2 + F^2u^2 \tag{60}$$

$$t' = Eu\left(t - u\frac{\partial t}{\partial u}\right) \tag{61}$$

Die Gl. (20) lauten nach Einsetzung der Werte (5), (59)

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = Ep = -H'uEp + H_1'\left[\left(1 - \frac{u}{t}\frac{\partial t}{\partial u}\right)\frac{\partial x}{\partial v} - uFp\right]$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = Fp + \frac{\partial t}{t\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = -J'uEp + J_1'\left[\left(1 - \frac{u}{t}\frac{\partial t}{\partial u}\right)\frac{\partial x}{\partial v} - uFp\right]$$

woraus nach Coefficientenvergleichung:

$$\left.\begin{aligned} H' &= -\frac{1}{u}; \quad H_1' = 0 \\ J' &= -\frac{F}{Eu}\,\frac{t}{t-u\frac{\partial t}{\partial u}}; \quad J_1' = \frac{\frac{\partial t}{\partial u}}{t-u\frac{\partial t}{\partial u}} \end{aligned}\right\} \tag{62}$$

$$\varrho = -\frac{1}{H'} = u; \quad \varrho_1 = -\frac{1}{J'} = u - t:\frac{\partial t}{\partial u} \tag{63}$$

Die Gleicqungen der 2. Mittelpunktsfläche werden:

$$x_1 = x - \frac{\partial x}{\partial u}t:\frac{\partial t}{\partial u}; \quad \text{etc.} \tag{64}$$

und man findet wie in §. 3.

$$E' = E^2 u; \quad F' = EFu; \quad G' = F^2 u - \left(t - u\frac{\partial t}{\partial u}\right)\frac{\partial t}{\partial u} \tag{65}$$

Die Variationsverhältnisse sind nun für die Krümmungslinien s', s_1' nach (29) (30):

$$v = \text{const.}; \quad E\partial u + F\partial v = 0$$

für die Curve constanter erster Hauptkrümmung s_2' nach (31):

$$u = \text{const.}$$

Den 3 Curven entsprechen die Werte:

$$\frac{\partial u}{\partial s'} = \frac{1}{Eu}; \quad \frac{\partial v}{\partial s'} = 0 \tag{66}$$

$$\frac{\partial u}{\partial s_1'} = \frac{F}{E}\,\frac{1}{t-u\frac{\partial t}{\partial u}}; \quad \frac{\partial v}{\partial s_1'} = -\frac{1}{t-u\frac{\partial t}{\partial u}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial s_2'} = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial s_2'} = \frac{1}{\sqrt{\left(t-u\frac{\partial t}{\partial u}\right)^2 + F^2u^2}} = \frac{\cos\varepsilon}{Fu}$$

Die Richtungscosinus ihrer Tangenten sind demzufolge:

$$\frac{\partial x'}{\partial s'} = -p; \quad \frac{\partial x'}{\partial s_1'} = -\frac{\partial x}{t\,\partial v} \tag{67}$$

$$\frac{\partial x'}{\partial s_2'} = \frac{\left(1-\frac{u}{t}\frac{\partial t}{\partial u}\right)\frac{\partial x}{\partial v} - Fup}{\sqrt{\left(t-u\frac{\partial t}{\partial u}\right)^2 + F^2u^2}} = -\frac{\partial x}{t\,\partial v}\sin\varepsilon - p\cos\varepsilon$$

$$\operatorname{tg}\varepsilon = -\frac{1}{Fu}\left(t - u\frac{\partial t}{\partial u}\right) \tag{68}$$

Differentiirt man dies nach den Formeln (6) (7) mit Anwendung von (66), so kommt:

$$\frac{\partial^2 x'}{\partial s'^2} = \frac{1}{u}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{F}{Eut^2}\frac{\partial x}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 x'}{\partial s_1'^2} = \frac{\frac{Ktp}{E} - \frac{\partial t}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u}}{t - u\frac{\partial t}{\partial u}}$$

$$\frac{\partial^2 x'}{\partial s_2'^2} = \left(\frac{G\cos\varepsilon}{Fut} - \frac{\partial\varepsilon}{\partial s_2'}\right)\left(\frac{\partial x}{t\partial v}\cos\varepsilon - p\sin\varepsilon\right)$$
$$+ \frac{\cos\varepsilon}{u}\left(\cos\varepsilon + \frac{\partial t}{\partial u}\frac{\sin\varepsilon}{F}\right)\frac{\partial x}{\partial u}$$

Dies verglichen mit Gl. (44), worin

$$p' = \frac{\partial x}{\partial u};\quad \xi = -\frac{\partial x}{t\partial v};\quad \varrho = u$$

$$\varkappa = E;\quad \varkappa_1 = -\frac{F}{t};\quad \varkappa_2 = \frac{G}{t^2}$$

zu setzen ist, zeigt, dass

$$\frac{\cos\omega}{\delta} = \frac{t}{t - u\frac{\partial t}{\partial u}};\quad \frac{1}{\delta}\frac{\partial\omega}{\partial u} = \frac{\frac{\partial t}{\partial u}}{t - u\frac{\partial t}{\partial u}} \tag{69}$$

demgemäss also in Gl. (47) (48)

$$\operatorname{tg}\pi_1' = \frac{E}{Kt}\frac{\partial t}{\partial u} \tag{70}$$

und in den Gl. (49) (55) (56)

$$\gamma^2 = \left(\frac{\delta}{\cos\omega}\right)^2 + (\varrho\varkappa_1)^2 = \left(1 - \frac{u}{t}\frac{\partial t}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{Fu}{t}\right)^2 \tag{71}$$

$$\operatorname{tg}\pi_2' = \frac{F^2u - \left(t - u\frac{\partial t}{\partial u}\right)\frac{\partial t}{\partial u}}{\frac{G}{t}\sqrt{\left(t - u\frac{\partial t}{\partial u}\right)^2 + (Fu)^2} + \frac{\partial\varepsilon}{\partial s_2'}t^2} \tag{72}$$

wird. Nachdem hiermit die für den vorliegenden Fall unbestimmt werdenden Ausdrücke von ε, π_1' und π_2' definirt sind, gelten die Glei-

chungen für die Richtungscosinus der Haupt- und Binormale der 3 Curven unverändert fort, desgl. die für die Krümmungs- und Torsionswinkel τ, ϑ.

§. 9. Integration für besondere Fälle.

Gl. (10) ist in folgenden 2 Fällen leicht zu integriren: zuerst wenn t von der Form ist

$$t = UV$$

U Function von u, und V von v. Hier ist das allgemeine Integral

$$\int V\partial v = \int \frac{a\,\partial u}{U\sqrt{U^2 - a^2}} + \varphi'(a) \tag{71}$$

$$\varrho = \int \frac{U\partial u}{\sqrt{U^2 - a^2}} + a\varphi'(a) - \varphi(a) \tag{72}$$

wo nach Integration a, das während derselben constant bleibt,

$$a = U\cos\omega$$

zu setzen ist. Dieser Fall entspricht einer Rotationsfläche Ω, nämlich

$$x = U\cos\int V\partial v;\quad y = U\sin\int V\partial v;\quad z \text{ Funct. von } u$$

oder einer Fläche, die auf dieser abwickelbar ist. Ist Ω keine Kugel, so kann Ω' nur für $\omega = \mathrm{R}$ Rotationsfläche sein. Denn eine solche hat nur eine Mittelpunktsfläche, erzeugt durch Rotation der Evolute des Meridians um dieselbe Axe, und dieser Evolute entspricht nur eine einzige Schar paralleler Evolventen, so dass je zwei nicht parallele verschiedene Rotationsflächen Ω' verschiedenen Ω zugehören müssten.

Ist zweitens t von der Form

$$t = uV + V_1$$

so ist das allgemeine Integral der Gl. (10) (8):

$$u\cos\omega = \cos(\omega - v_0)\int V_1\sin v_0\,\partial v + \sin(\omega - v_0)\int V_1\cos v_0\,\partial v \\ + \varphi'(\omega - v_0) \tag{73}$$

$$\varrho = u\sin\omega - \sin(\omega - v_0)\int V_1\sin v_0\,\partial u + \cos(\omega - v_0)\int V_1\cos v_0\,\partial v \\ + \varphi(\omega - v_0) \tag{74}$$

wo zur Abkürzung

$$v_0 = \int V \partial u$$

gesetzt ist. Dieser Fall entspricht insbesondere einer auf der Ebene abwickelbaren Fläche Ω.

Auf beiden Arten von Flächen ist das allgemeinste orthogonal geodätische System bekannt; man kann daher Ω' immer in 2 Formen darstellen. Auf Flächen 2. Grades ist dasselbe gleichfalls bekannt; daraus ergiebt sich nach zweiter Methode Ω', und Gl. (4) ist auch hier integrabel. Das Integral ist nämlich nach §. 8. für jedes orthogonal geodätische System $\varrho = u + \text{const.}$ Bezeichnen nun zuerst u, v die Parameter der Krümmungslinien, u_1, v_1 die orthogonal geodätischen Parameter, so hat man in der T. LIX. S. 315. gegebenen Formel (151), welche u_1 in u, v darstellt, $\varrho = u_1 + \text{const.}$ zu setzen; dann ist dieser Ausdruck die allgemeinste Lösung von Gl. (8), auf welche sich Gl. (4) zurückführen lässt.

Zum Schluss wollen wir noch Anwendung auf die Kugel

$$x = c \sin\frac{u}{c}\cos v; \quad y = c\sin\frac{u}{c}\sin v; \quad z = -c\cos\frac{u}{c}$$

machen. Hier ist

$$t = c\sin\frac{u}{c}$$

also $U = t$; $V = 1$ zu setzen, und die Gl. (71) (72), wo

$$\frac{a}{c} = \sin w = \sin\frac{u}{c}\cos\omega$$

sei, ergeben leicht:

$$v = \varphi'(w) - \psi; \quad \varrho = c\varphi'(w) - \varphi(w) + c\chi$$

$$\sin\psi = \operatorname{tg} w \cot\frac{u}{c}; \quad \cos\chi\cos w = \cos\frac{u}{c}$$

Untersuchen wir die erste Krümmungslinie s' und notiren vorher die Werte

$$\varkappa = \frac{1}{c}; \quad \varkappa_1 = 0$$

dann zeigen die Gl. (38), dass

$$\pi' = 0; \quad \varrho = \frac{\partial s'}{\partial \tau'}$$

ist. Infolge dessen giebt Gl. (40*):

$$\frac{\partial \vartheta'}{\partial s'} = 0$$

Die Curve s' ist also eben und hat gleiche Krümmung mit dem Normalschnitt, ist demnach Kürzeste auf Ω'. Ferner findet man, dass hier ξ, η, ζ Richtungscosinus der Schmiegungsebene von s' sind, deren Gleichung also lautet:

$$(X-x')\xi+(Y-y')y+(Z-z')\zeta=0 \tag{75}$$

Nun ist aber $x=-cp$ etc., daher

$$x'=-cp-\varrho p'; \quad \text{etc.}$$

woraus:

$$x'\xi+y'\eta+z'\zeta=0$$

so dass Gl. (75) sich reducirt auf

$$X\xi+Y\eta+Z\zeta=0$$

Hiernach liegt s' in einer Ebene, die durch den Mittelpunkt geht und die Fläche Ω' rechtwinklig schneidet.

Differentiirt man ϱ längs s' nach den Formeln (9) (32), so kommt:

$$\frac{\partial\varrho}{\partial s'}=\frac{\sin^2\omega}{\varrho\varkappa}+\frac{t\cos^2\omega}{\varrho t\varkappa}=\frac{1}{\varrho\varkappa}=\frac{c}{\varrho}$$

oder

$$\frac{\varrho\,\partial\varrho}{\partial s'}=c$$

das ist die Gleichung einer Kreisevolvente, deren Krümmungsradius ϱ ist, wie nach zweiter Methode gleich anfangs ersichtlich war.

XIX.

Analytische Untersuchungen

über die Veränderungen der Axenverhältnisse, Schwerkräfte und der Rotationsgeschwindigkeiten homogen flüssiger, um ihre Axe frei rotirender, cylindrischer Gleichgewichtsfiguren, durch Condensation oder Expansion bei constanter Masse und Energie.

Von

O. Kuntze,

Candidat des höhern Schulamts in Güstrow.

Ein wegen seiner Bedeutung für die kosmischen Körper wichtiges Problem der mathematischen Physik ist dasjenige von den Gleichgewichtsfiguren. Nachdem zuerst Maclaurin*) die hydrostatischen Gleichgewichtsbedingungen für das Rotationsellipsoid erfüllt gefunden hatte, erkannten Laplace**), Legendre und Ivory die Rotationsellipsoide und die satellitischen Ringe in ihrer ganzen Ausdehnung als Gleichgewichtsfiguren. Ihnen reihte Jacobi***) das dreiaxige Ellipsoid an, und es folgte auch bald der Nachweis des hydrostatischen Gleichgewichts für die cylindrischen Gleichgewichtsfiguren, die coaxialen Hohlcylinder, die absoluten Ringfiguren und die concentrischen Ringsysteme von Matthiessen †), sowie für die Mondfiguren

---

*) Maclaurin, De causa physica fluxus et refluxus maris.

**) Laplace, Méc. cél., liv. I, cap. 4; liv. II, cap. 1—4; liv. III, cap. 44.

***) Jacobi, Ueber die Figur des Gleichgewichts, Pogg. Ann. XXXIII. (1834), p. 229 seq.

†) Matthiessen, Neue Untersuchungen über frei rotirende Flüssigkeiten etc., Kiel 1859. — Ueber Systeme kosmischer Ringe etc. (Zeitschr. f. Math. u. Phys., X, p. 59 etc. (1865). und — De aequilibrii figuris et revolutione homogeneorum annulorum sidereorum sine corpore centrali etc. Ann. di mat. pura ed appl. (2) III. Milani 1869.

von Roche*) und Vaughan**). Im Jahre 1859, fast gleichzeitig mit dem Matthiessen'schen Beweise, erschien in der „Zeitschrift für Mathematik und Physik" auch von Dahlander in Gothenburg der Beweis für die Möglichkeit des Gleichgewichtes für den hohlen Kreiscylinder.

Eine allgemeine Lösung des Problems der Gleichgewichtsfiguren ist bisher noch nicht aufgefunden worden und scheint auch nach den jetzigen Hülfsmitteln der Wissenschaften, wenn nicht überhaupt, unmöglich zu sein.

Zweck der vorliegenden Arbeit ist es, die Veränderungen der Axenverhältnisse, Rotationsgeschwindigkeiten, Schwerkräfte etc. der homogen flüssigen Gleichgewichtsfiguren mit cylindrischen Oberflächen, welche durch Condensation oder Expansion bei constanter Masse und Energie verursacht werden, analytisch zu untersuchen.

Es sei uns erlaubt, auf die Matthiessen'sche, das entsprechende Problem für die ellipsoidischen Gleichgewichtsfiguren behandelnde Arbeit: Ueber die Gesetze der Bewegung und Abplattung im Gleichgewichte befindlicher homogener Ellipsoide etc. (Zeitschr. f. Math. u. Phys., IV., 1869) hinzuweisen, welche diesen Untersuchungen wesentlich zum Vorbilde gedient hat.

Cap. I.

Ueber die cylindrischen Gleichgewichtsfiguren und die Bedingungen ihres Gleichgewichts.

Von den cylindrischen Gleichgewichtsfiguren mit Oberflächen zweiter Ordnung können der unendliche massive Kreiscylinder, der unendliche massive elliptische Cylinder und der unendliche kreisförmige Hohlcylinder im Zustande des hydrostatischen Gleichgewichtes sein. Wir wollen den Beweis hierfür kurz geben und zugleich einige der hauptsächlichsten Eigenschaften derselben entwickeln. Der Kürze wegen sollen in dieser Arbeit jene drei obengenannten Figuren als Kreis-, elliptischer und Hohlcylinder bezeichnet werden. Es wird im Folgenden stets vorausgesetzt, dass die Masse homogen ist.

---

*) Roche, Mém. sur les fig. ellips. etc., L'institut. Paris (1849), p. 187 seq.; (1850), p. 117 et 321.

**) Vaughan, On the form of satellites etc., Phil. Mag., XX., p. 409; XXI., p. 263.

a) Massive Cylinder.

Wir gehen aus von dem elliptischen Cylinder

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

oder

$$x^2(1+\lambda^2)+y^2=b^2, \tag{1}$$

wo

$$\frac{b^2}{a^2}=1+\lambda^2 \text{ ist.} \tag{2}$$

$\sqrt{1+\lambda^2}$ nennen wir das Axenverhältniss des elliptischen Cylinders.

Die allgemeine Gleichung für Niveauflächen ist

$$dp=\varrho\{Xdx+Ydy+Zdz+\omega^2(xdx+ydy)\},$$

wo p den Druck, ϱ die Dichtigkeit, X, Y, Z die Anziehungscomponenten eines Punktes der Masse und ω die Winkelgeschwindigkeit bezeichnet. Die Z Axe ist hier als Rotationsaxe vorausgesetzt.

Durch Integration folgt

$$\frac{p}{\varrho}=\int\{Xdx+Ydy+Zdz+\omega^2(xdx+ydy)\}+c.$$

Soll nun eine Gleichgewichtsfigur bestehen, so ist erforderlich, dass die äusserste Fläche eine Niveaufläche vom Drucke 0 sei, d. h. dass sei

$$\int\{Xdx+Ydy+Zdz+\omega^2(xdx+ydy)\}+c=0. \tag{3}$$

Die Anziehungscomponenten eines beliebigen Punktes der Oberfläche des elliptischen Cylinders leiten wir ab nach Laplace*):

Für die Newton'sche Attraction ist das Potential eines Körpers auf einen beliebigen Punkt

$$v=\iiint\frac{\varrho\,\partial\eta\,\partial\xi\,\partial\zeta}{r},$$

also für den unendlichen elliptischen Cylinder mit der Z Axe als Hauptaxe

*) Laplace, Mechan. d. Himm., übers. v. Burckhardt, liv. III, cap. 44; cf. auch

Matthiessen, Ueber das Integral der Gleichung $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$. (Zeitschr. f. Math. u. Phys. XVI. 1871. p. 228 seq.).

$$v = \iint \varrho \log r \,\partial\xi\,\partial\eta.$$

Sind die Coordinaten des anziehenden, resp. angezogenen Punktes ξ und η, resp. x und y, so ist

$$v = \tfrac{1}{2}\iint \varrho\,\partial\eta\,\partial\xi\, l\{(\eta-y)^2+(\xi-x)^2\}$$

$$= \tfrac{1}{2}\iint \varrho\partial\eta\partial\xi\, l\{(\eta+\xi i)-(y+xi)\} + \tfrac{1}{2}\iint \varrho\partial\eta\partial\xi\, l\{(\eta-\xi i)-(y-xi)\}$$

$$= f(y+xi)+\varphi(y-xi).$$

Es ist nun

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial(y+xi)}\cdot\frac{\partial(y+xi)}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial(y-xi)}\,\frac{\partial(y-xi)}{\partial y}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial(y+xi)}\cdot\frac{\partial(y+xi)}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial(y-xi)}\cdot\frac{\partial(y-xi)}{\partial x}$$

und wegen

$$\frac{\partial(y+xi)}{\partial y} = \frac{\partial(y-xi)}{\partial y} = 1$$

$$\frac{\partial(y+xi)}{\partial x} = -\frac{\partial(y-xi)}{\partial x} = i$$

$$Y = f\frac{\partial v}{\partial y} = f\frac{\partial v}{\partial(y+xi)} + f\frac{\partial v}{\partial(y-xi)}$$

$$X = f\frac{\partial v}{\partial x} = if\frac{\partial v}{\partial(y+xi)} - if\frac{\partial v}{\partial(y-xi)}.$$

also

$$Y - Xi = 2f\frac{\partial v}{\partial(y+xi)}.$$

Wir können nun $f(y+xi)$ erhalten, wenn wir $f(y)$ bestimmen und darauf $(y+xi)$ an Stelle von y setzen. Bestimmen wir nach Laplace die Anziehung eines Punktes $(u, 0)$ auf der Verlängerung der Y Axe, so folgt

$$v = \tfrac{1}{2}\int_{-b}^{+b}\int_{-\xi}^{+\xi} \varrho\,\partial\eta\,\partial\xi\, l\{(\eta-u)^2+\xi^2\},$$

also auch

$$2f\frac{\partial v}{\partial u} = Y - Xi = -2f\varrho\int_{-b}^{+b}\int_{-\xi}^{+\xi}\frac{(u-\eta)\partial\eta\,\partial\xi}{\xi^2+(u-\eta)^2}$$

$$= -4f\varrho\int_{-b}^{+b}\operatorname{arctang}\frac{\xi}{u-\eta}\,d\eta.$$

Setzen wir für ξ den aus der Relation $\eta^2 + \xi^2(1+\lambda^2) = b^2$ folgenden Wert ein, so ist

$$J = \int_{-b}^{+b} \operatorname{arctang} \frac{\sqrt{b^2-\eta^2}}{\sqrt{1+\lambda^2}(u-\eta)}\, d\eta,$$

und durch partielle Integration wird

$$J = \left\{ \eta \operatorname{arctang} \frac{\sqrt{b^2-\eta^2}}{\sqrt{1+\lambda^2}(u-\eta)} \right\}_{-b}^{+b}$$

$$- \int_{-b}^{+b} \frac{(b^2\eta - u\eta^2)\, d\eta \sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda^2 \left(\eta^2 - \frac{2u\eta(1+\lambda^2)}{\lambda^2} + \frac{b^2+u^2(1+\lambda^2)}{\lambda^2} \right) \sqrt{b^2-\eta^2}}.$$

Da der Ausdruck

$$\left\{ \eta \operatorname{arctang} \frac{\sqrt{b^2-\eta^2}}{\sqrt{1+\lambda^2}(u-\eta)} \right\}_{-b}^{+b}$$

verschwindet, so folgt, wenn wir mit dem Trinom

$$\left(\eta^2 - \frac{2u\eta(1+\lambda^2)}{\lambda^2} + \frac{b^2+u^2(1+\lambda^2)}{\lambda^2} \right)$$

in den Zähler dividiren,

$$J = \frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda^2} \Bigg[u \int_{-b}^{+b} \frac{d\eta}{\sqrt{b^2-\eta^2}}$$

$$- \int_{-b}^{+b} \frac{b^2\eta - \frac{2u^2\eta(1+\lambda^2)}{\lambda^2} + \frac{u(b^2+u^2(1+\lambda^2))}{\lambda^2}}{\eta^2 - \frac{2u\eta(1+\lambda^2)}{\lambda^2} + \frac{b^2+u^2(1+\lambda^2)}{\lambda^2}} \cdot \frac{d\eta}{\sqrt{b^2-\eta^2}} \Bigg]$$

Es ist nun

$$u \int_{-b}^{+b} \frac{d\eta}{\sqrt{b^2-\eta^2}} = u \left(\arcsin \frac{\eta}{b} \right)_{-b}^{+b} = u\pi;$$

im zweiten Integral zerlegen wir den Factor von $\frac{d\eta}{\sqrt{b^2-\eta^2}}$ in Partialbrüche; dann ist

$$J = \frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda^2}\left\{u\pi - \left[\int_{-b}^{+b} \frac{A d\eta}{\left(\eta - \frac{u(1+\lambda^2)}{\lambda^2} - \frac{\sqrt{u^2(1+\lambda^2)-b^2\lambda^2}}{\lambda^2}\right)\sqrt{b^2-\eta^2}}\right.\right.$$

$$\left.\left.+ \int_{-b}^{+b} \frac{B d\eta}{\left(\eta - \frac{u(1+\lambda^2)}{\lambda^2} + \frac{\sqrt{u^2(1+\lambda^2)-b^2\lambda^2}}{\lambda^2}\right)\sqrt{b^2-\eta^2}}\right]\right\},$$

wo A und B die Werte

$$A = \frac{1}{2\lambda^2}\left\{b^2\lambda^2 - 2u^2(1+\lambda^2) - u(2+\lambda^2)\sqrt{u^2(1+\lambda^2)-b^2\lambda^2}\right\}$$

$$B = \frac{1}{2\lambda^2}\left\{b^2\lambda^2 - 2u^2(1+\lambda^2) + u(2+\lambda^2)\sqrt{u^2(1+\lambda^2)-b^2\lambda^2}\right\}$$

zukommen. Mit Benutzung des Integrals

$$\int \frac{dz}{(z-a)\sqrt{1-z^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2-1}} \arcsin\frac{1-az}{z-a} + c, \quad (a^2 > 1),$$

dessen Richtigkeit durch Differentiation erhellt, ergiebt sich, wenn wir $z = \frac{\eta}{b}$ und

$$a_1 = \frac{u(1+\lambda^2) + \sqrt{u^2(1+\lambda^2)-b^2\lambda^2}}{b\lambda^2}, \text{ resp.}$$

$$a_2 = \frac{u(1+\lambda^2) - \sqrt{u^2(1+\lambda^2)-b^2\lambda^2}}{b\lambda^2}$$

setzen, wo a_1^2 und $a_2^2 > 1$ sind,

$$J = \frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda^2}\left\{u\pi - \frac{A}{b\sqrt{a_1^2-1}} \arcsin\left(\frac{1-\frac{a_1\eta}{b}}{\frac{\eta}{b}-a_1}\right)_{-b}^{+b}\right.$$

$$\left. - \frac{B}{b\sqrt{a_2^2-1}} \arcsin\left(\frac{1-\frac{a_2\eta}{b}}{\frac{\eta}{b}-a_2}\right)_{-b}^{+b}\right\}$$

$$= \frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda^2}\left\{u\pi - \left(\frac{A}{b\sqrt{a_1^2-1}} + \frac{B}{b\sqrt{a_2^2-1}}\right)\left(\arcsin(1) - \arcsin(-1)\right)\right\}$$

$$= \frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda^2}\left\{u\pi - \frac{\pi}{b}\left(\frac{A}{\sqrt{a_1^2-1}} + \frac{B}{\sqrt{a_2^2-1}}\right)\right\}.$$

Da der Wert der inneren Klammer $= b\sqrt{u^2 - \frac{b^2\lambda^2}{1+\lambda^2}}$ ist, so ergiebt sich für das gesuchte Integral

$$J = \frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda^2}\pi\left(u - \sqrt{u^2 - \frac{b^2\lambda^2}{1+\lambda^2}}\right),$$

und es ist

$$Y - Xi = -4\pi f\varrho\frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda^2}\left(u - \sqrt{u^2 - \frac{b^2\lambda^2}{1+\lambda^2}}\right)$$

$$= -4\pi f\varrho\frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda^2}\left(y + xi - \sqrt{(y+xi)^2 - \frac{b^2\lambda^2}{1+\lambda^2}}\right).$$

Setzt man für b^2 den Wert aus Gleichung (1) ein, so wird

$$Y - Xi = -4\pi f\varrho\frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda^2}\left\{y + xi - \sqrt{y^2 - x^2 + 2xyi - \frac{\lambda^2}{1+\lambda^2}(x^2(1+\lambda^2)+y^2)}\right\}$$

$$= -4\pi f\varrho\frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda^2}\left\{y + xi - \sqrt{\frac{y^2}{1+\lambda^2} - x^2(1+\lambda^2) + 2xyi}\right\}$$

$$= -4\pi f\varrho\frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda^2}\left\{y + xi - \frac{y}{\sqrt{1+\lambda^2}} - xi\sqrt{1+\lambda^2}\right\}$$

$$= -4\pi f\varrho\frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda^2}\left\{y\frac{\sqrt{1+\lambda^2}-1}{\sqrt{1+\lambda^2}} - xi(\sqrt{1+\lambda^2}-1)\right\}\frac{1+\sqrt{1+\lambda^2}}{1+\sqrt{1+\lambda^2}}$$

$$= -\frac{4\pi f\varrho}{1+\sqrt{1+\lambda^2}}(y - xi\sqrt{1+\lambda^2}).$$

Die Componenten der Anziehung erhalten wir, indem wir Reelles und Imaginäres trennen

$$\left.\begin{aligned} X &= -4\pi f\varrho\frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{1+\sqrt{1+\lambda^2}}x \\ Y &= -4\pi f\varrho\frac{1}{1+\sqrt{1+\lambda^2}}y \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

ferner ist $\qquad Z = 0.$

Durch Einführung dieser Werte in die Gleichung (3) folgt

$$0 = \int\left\{-\frac{4\pi f\varrho}{1+\sqrt{1+\lambda^2}}(ydy + xdx\sqrt{1+\lambda^2}) + \omega^2(xdx + ydy)\right\} + c$$

oder

$$0 = -\frac{2\pi f\varrho}{1+\sqrt{1+\lambda^2}}(y^2 + x^2\sqrt{1+\lambda^2}) + \frac{\omega^2(x^2+y^2)}{2} + c.$$

Damit nun diese Gleichung den elliptischen Cylinder $x^2(1+\lambda^2)+y^2=b^2$ darstelle, ist die hinreichende und notwendige Bedingung, dass bei Gleichheit des constanten Gliedes auch die Coefficienten von x^2 und y^2 einander gleich sind, d. h.

$$\frac{1+\lambda^2}{b^2:c}=\frac{\omega^2}{2}-\frac{2\pi f\varrho\sqrt{1+\lambda^2}}{1+\sqrt{1+\lambda^2}}$$

$$\frac{1}{b^2:c}=\frac{\omega^2}{2}-\frac{2\pi f\varrho}{1+\sqrt{1+\lambda^2}}.$$

Durch Elimination von $b^2:c$ ergiebt sich

$$\frac{\omega^2}{2}-\frac{2\pi f\varrho\sqrt{1+\lambda^2}}{1+\sqrt{1+\lambda^2}}=\frac{\omega^2}{2}(1+\lambda^2)-\frac{2\pi f\varrho(1+\lambda^2)}{1+\sqrt{1+\lambda^2}}$$

oder

$$\frac{\omega^2}{2\pi f\varrho}=\frac{2\sqrt{1+\lambda^2}(\sqrt{1+\lambda^2}-1)}{1+\sqrt{1+\lambda^2}}\cdot\frac{1+\sqrt{1+\lambda^2}}{1+\sqrt{1+\lambda^2}}\cdot\frac{1}{\lambda^2}$$

$$=\frac{2\sqrt{1+\lambda^2}}{(1+\sqrt{1+\lambda^2})^2}.$$

oder, wenn wir als Rotationsmoment definiren $v=\frac{\omega^2}{2\pi f\varrho}$, so ist

$$v=\frac{2\sqrt{1+\lambda^2}}{(1+\sqrt{1+\lambda^2})^2}. \tag{5}$$

Es ist nun auch die Schwerkraft für den elliptischen Cylinder stets nach dem Innern der Masse hin gerichtet, wie aus den später entwickelten Gleichungen (12) folgt.

Für den massiven Kreiscylinder $\frac{x^2+y^2}{r^2}=1$ gehen die Componenten der Anziehung in

$$\left.\begin{aligned} X&=-2\pi f\varrho x\\ Y&=-2\pi f\varrho y\\ Z&=0 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

über, und die Integralgleichung für das Bestehen des Kreiscylinders als Gleichgewichtsfigur ist

$$\frac{p}{\varrho}=0=-\pi f\varrho(x^2+y^2)+\frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2)+c.$$

Diese Bedingung besteht mit dem Kreiscylinder $x^2+y^2=r^2$ stets zusammen.

Damit nun auch die Schwerkraft nach dem Inneren der Masse hin gerichtet sei, ist erforderlich, dass die Schwungkraft kleiner als der absolute Betrag der Massenanziehung sei. Letztere ist aber

$$A = \sqrt{X^2 + Y^2} = -2\pi f\varrho\sqrt{x^2+y^2}$$
$$= -2\pi f\varrho r, \tag{7}$$

und es muss sein

$$\omega^2 r \leqq 2\pi f\varrho r, \quad \text{d. h.}$$

$$v \leqq 1. \tag{8}$$

Es sind noch die Maximal- und Minimalwerte von v beim elliptischen Cylinder zu bestimmen. Nach den gewöhnlichen Methoden findet man die correspondirenden Werte

$$\lambda = 0, \quad v = 0,5 \quad \text{(Maximum)}$$
$$\lambda = \infty, \quad v = 0 \quad \text{(Minimum).}$$

Die rechte Seite der Gleichung (5) ist stets positiv und reell für jeden beliebigen positiven und reellen Wert von $\sqrt{1+\lambda^2}$, d. h. es existiren für alle Axenverhältnisse reelle Winkelgeschwindigkeiten. Die Axenverhältnisse können die Werte von 1 bis ∞ durchlaufen (die Werte $\sqrt{1+\lambda^2} \lessgtr {1 \atop 0}$ schliessen wir aus, da durch dieselben nur eine Vertauschung der Axen ausgedrückt wird; wir nehmen also stets b als die grössere Axe an). Für die Grenzen $\lambda = 0$ und $\lambda = \infty$ folgt $v = 0,5$ und $v = 0$, d. h. es entsprechen den Axenverhältnissen von 1 bis ∞ Rotationsmomente, welche zwischen 0, 5 und 0 liegen, und bei wachsenden Axenverhältnissen nehmen die Rotationsmomente ab, und umgekehrt.

Aus Gleichung (5) folgt

$$\sqrt{1+\lambda^2} = -\left(1-\frac{1}{v}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{1-v}{v}\right)^2 - 1}$$
$$= w \pm \sqrt{w^2-1} \tag{9}$$

Es ist nun aber

$$w + \sqrt{w^2+1} = \frac{1}{w - \sqrt{w^2-1}}$$

d. h. es entspricht jedem Rotationsmomente nur ein Axenverhältniss, da die Reciprocität ja nur eine Vertauschung der Axen ausdrückt.

Damit das Verhältniss der Axen ein reelles sei, muss die Quadratwurzel in Gleichung (9) reell sein, d. h.

$$\left(1-\frac{1}{v}\right)^2-1 \geqq 0 \quad \text{oder} \quad v \leqq 0,5.$$

Es ergeben sich also folgende Resultate:

Jedem Rotationsmomente $v \leqq 1$ entspricht ein Kreiscylinder als Gleichgewichtsfigur, jedem Rotationsmomente $v \leqq 0,5$ ein elliptischer Cylinder. An den Grenzen $v = 0$ und $v = 0,5$ verhalten sich die Halbaxen der Querschnitte des letzteren

$$a : b = 0 : 1$$
$$a : b = 1 : 1.$$

Wir erhalten im ersten Falle die unendliche Lamelle, im zweiten den Kreiscylinder als Gleichgewichtsfigur.

Betrachten wir den Fall der Ruhe und nehmen zugleich die Dichtigkeit als nicht verschwindend klein an, so folgt

$$v = \frac{\omega^2}{2\pi f\varrho} = 0 \quad \text{und} \quad \lambda = \infty,$$

d. h. es ist die Lamelle Gleichgewichtsfigur für den Zustand der Ruhe.

Für den Kreiscylinder ist die Ruhefigur wieder ein Kreiscylinder.

Wir bringen noch einige bemerkenswerte Beziehungen, welche zwischen den Schwungkräften, absoluten Massenanziehungen und Schwerkräften (Fallgeschwindigkeiten) der elliptischen Cylinder stattfinden.

Die von der relativen Schwere gesonderten Massenanziehungen A' und B' an den Polen der Querschnitte eines elliptischen Cylinders sind

$$A' = B' = \sqrt{X^2+Y^2} = -4\pi f\varrho \frac{\sqrt{x^2(1+\lambda^2)+y^2}}{1+\sqrt{1+\lambda^2}},$$

also wegen $x^2(1+\lambda^2)+y^2 = b^2$

$$A' = B' = -4\pi f\varrho \frac{b}{1+\sqrt{1+\lambda^2}} = -4\pi f\varrho \frac{ab}{a+b} \tag{10}$$

Setzen wir den aus der Gleichgewichtsbedingung (5) folgenden Wert

$$2\pi f\varrho = \frac{\omega^2}{v} = \frac{\omega^2(1+\sqrt{1+\lambda^2})^2}{2\sqrt{1+\lambda^2}}$$

in Gleichung (10) ein, so ergiebt sich

$$A' = B' = -2\frac{\omega^2(1+\sqrt{1+\lambda^2})}{2\sqrt{1+\lambda^2}} \cdot \frac{a\sqrt{1+\lambda^2}}{1+\sqrt{1+\lambda^2}}$$

$$= -\omega^2 a(1+\sqrt{1+\lambda^2}) = -\omega^2(a+b),$$

also

$$A' = B' = -(k+l), \tag{11}$$

wo mit k und l die Schwungkräfte an den Polen der kleineren und grösseren Axe des Querschnitts bezeichnet sind.

Die Schwerkräfte A und B an denselben Polen sind

$$A = A' + \omega^2 a = A' + k$$
$$B = B' + \omega^2 b = B' + l,$$

also auch

$$\left.\begin{aligned} A &= -l \\ B &= -k \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Wir finden also folgende Resultate:

Die Schwerkräfte (Fallgeschwindigkeiten) an den Polen der grösseren (resp. kleineren) Axe der Querschnitte eines elliptischen, im Gleichgewichte befindlichen Cylinders sind den Schwungkräften an den Polen der kleineren (resp. grösseren) Axe gleich, aber von entgegengesetzter Richtung.

Die absoluten Massenanziehungen sind gleich der negativen Summe der Schwungkräfte an den Polen der grossen und kleinen Axe der Querschnitte oder gleich der Summe der Schwerkräfte an beiden Polen.

b) Hohle Kreiscylinder.

Die hohlen Kreiscylinder genügen ebenfalls den Gleichgewichtsbedingungen. Wir geben hier im wesentlichen den von Dahlander*) hierfür gelieferten Beweis wieder.

Bezeichnen X, Y und Z die Componenten der auf die Masseneinheit wirkenden Kräfte, r den innern Radius des Hohlcylinders und r' denjenigen eines beliebigen Punktes, so sind

$$\left.\begin{aligned} X &= -2\pi f\varrho\frac{r'^2 - r^2}{r'^2}x \\ Y &= -2\pi f\varrho\frac{r'^2 - r^2}{r'^2}y \\ Z &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

*) Zeitschr. f. Math. u. Phys., 4. B. (1859), p. 444 seq.

Setzt man diese Werte in die allgemeine Gleichung für Niveauflächen ein, so ist

$$\frac{dp}{\varrho} = \left\{\omega^2 - 2\pi f\varrho\frac{r'^2 - r^2}{r'^2}\right\}(xdx + ydy). \tag{14}$$

Da nun

$$x^2 + y^2 = r'^2,$$

also

$$xdx + ydy = \frac{dr'^2}{2},$$

so geht die Gleichung (14) über in

$$\frac{2dp}{\varrho} = \left(\omega^2 - 2\pi f\varrho\frac{r'^2 - r^2}{r'^2}\right)dr'^2$$

oder

$$\frac{2p}{\varrho} = \omega^2 r'^2 - 2\pi f\varrho r'^2 + 2\pi f\varrho r^2 l(r'^2) + C.$$

Für $r = r'$ wird $p = 0$, also

$$0 = \omega^2 r^2 - 2\pi f\varrho r^2 + 2\pi f\varrho r^2 l(r^2) + C,$$

und durch Subtraction der beiden letzten Gleichungen

$$\frac{2p}{\varrho} = \omega^2(r'^2 - r^2) - 2\pi f\varrho(r'^2 - r^2) + 2\pi f\varrho r^2 l\left(\frac{r'^2}{r^2}\right).$$

Für $r' = R$ muss p gleichfalls verschwinden; also muss sein

$$\omega^2(R^2 - r^2) = 2\pi f\varrho\left\{(R^2 - r^2) - r^2 l\left(\frac{R^2}{r^2}\right)\right\}$$

oder

$$\frac{\omega^2}{2\pi f\varrho} = v = 1 - \frac{r^2}{R^2 - r^2} l\left(\frac{R^2}{r^2}\right). \tag{15}$$

Setzen wir jetzt als Verhältniss der Radien der äusseren und inneren Grenzfläche

$$\frac{R}{r} = \sqrt{1 + \mu^2}, \tag{16}$$

so folgt aus $R \geqq r$ auch $\mu \geqq 0$, und die Gleichung (15) geht über in

$$\frac{\omega^2}{2\pi f\varrho} = v = 1 - \frac{l(1 + \mu^2)}{\mu^2}. \tag{17}$$

Als Bedingung für die Möglichkeit des Gleichgewichtes wird daher erfordert

$$v = 1 - \frac{l(1 + \mu^2)}{\mu^2} \geqq 0$$

oder

$$\mu^2 - l(1+\mu^2) \geqq 0$$

oder

$$(1+\mu^2) - l(1+\mu^2) \geqq 1.$$

Dieselbe ist aber stets erfüllt, da $\mu \geqq 0$.

Da ferner die Schwerkraft nach dem Innern der Masse hin gerichtet sein muss, so muss die absolute Massenanziehung

$$A' = \sqrt{X^2+Y^2} = -2\pi f\varrho \frac{R^2-r^2}{R^2}\sqrt{x^2+y^2}$$

$$= -2\pi f\varrho \frac{R^2-r^2}{R}, \tag{18}$$

ihrem absolutem Betrage nach grösser als die Schwungkraft sein, d. h.

$$\omega^2 R \leqq 2\pi f\varrho \frac{R^2-r^2}{R}$$

oder

$$v \leqq \frac{R^2-r^2}{R^2},$$

also auch

$$v \leqq \frac{\mu^2}{1+\mu^2}.$$

Wir finden demnach das Resultat, dass innerhalb der Grenzen $v=0$ und $v=1$ Hohlcylinder im Gleichgewichtszustande sein können und zwar solche von beliebigem Radienverhältnisse.

Dass v keinen grösseren Wert als 1 annehmen kann, folgt leicht; denn wäre dies der Fall, so müsste sein

$$v = 1 - \frac{l(1+\mu^2)}{\mu^2} > 1 \quad \text{oder} \quad \frac{l(1+\mu^2)}{\mu^2} < 0,$$

was unmöglich ist, da $l(1+\mu^2)$ und μ^2 positive Grössen sind.

Für $\sqrt{1+\mu^2} = \infty$ ergiebt sich $v = 1-0 = 1$. Ist μ sehr klein, so ist

$$\frac{\omega^2}{2\pi f\varrho} = v = 1 - \frac{\mu^2 - \frac{\mu^4}{2}}{\mu^2} = \frac{\mu^2}{2}. \tag{19}$$

Für verschwindende μ, d. h. für $\sqrt{1+\mu^2} = 1$ folgt hieraus $v=0$, und die Axen des Cylinders haben für diesen Fall die Verhältnisse

$$R:r:L = 1:1:\infty,$$

d. h. es folgt als Grenzfigur ein Hohlcylinder von unendlich geringer Dicke.

Da wegen der Constanz der Masse des cylindrischen Querschnitts für $\sqrt{1+\mu^2} = \infty$ offenbar $r = 0$ ist, so findet hier ein Uebergang zum massiven Kreiscylinder statt.

Für $v = 0$ war $\mu = 0$, für $v = 1$ dagegen $\mu = \infty$. Zwischen diesen Grenzwerten ändern sich die Werte von μ stetig mit stetig wachsendem oder fallendem v, d. h. die Axenverhältnisse wachsen oder fallen mit den Rotationsmomenten.

Für zwei kreisförmige Hohlcylinder mit sehr kleinen Axenverhältnissen folgt aus $v = \frac{\mu^2}{2}$

$$v : v_1 = \mu^2 : \mu_1^2$$

und

$$\frac{\omega}{\mu} : \frac{\omega_1}{\mu_1} = \sqrt{\varrho} : \sqrt{\varrho_1}.$$

Für sehr grosse Axenverhältnisse werden die Rotationsmomente constant, und es folgt

$$\omega^2 : \omega_1^2 = \varrho : \varrho_1.$$

Der Fall der Ruhe würde bei endlicher Dichtigkeit eintreten für

$$v = \left(\frac{\omega^2}{2\pi f \varrho}\right)_{\omega=0},$$

d. h. für $v = 0$ und $\sqrt{1+\mu^2} = 1$. Es ist also ein Hohlcylinder von unendlich geringer Dicke die Grenzfigur für den Ruhezustand.

Cap. II.

Von den Beziehungen der Elemente v, λ, μ der drei Cylinder zu der Energie ihrer Bewegung.

Unter Energie wollen wir die Flächensumme, multiplicirt in die Massenelemente verstehen; dieselbe ist gleichbedeutend mit dem Product aus der halben Winkelgeschwindigkeit und dem Trägheitsmomente, d. h.

$$E = \iiint \frac{\partial m}{2}\left(X\frac{dy}{dt} - Y\frac{dx}{dt}\right) = \frac{\omega}{2}\int r^2 \partial m.$$

Versehen wir die Elemente ω, r, v, E mit dem Index 1, 2 oder 3, jenachdem sie dem Kreis-, dem elliptischen oder Hohlcylinder angehören, so ist

$$E_1 = \frac{\omega_1}{2}\int r_1^2 \partial m = \frac{\omega_1}{2}\cdot\frac{M.r_1^2}{2} = \omega_1 r_1^2 . \frac{M}{4}$$

$$E_2 = \frac{\omega_2}{2}\int r_2^2 \partial m = \frac{\omega_2}{2}\cdot\frac{M(a^2+b^2)}{4} = \frac{\omega_2(a^2+b^2)}{2}\cdot\frac{M}{4}$$

$$E_3 = \frac{\omega_3}{2}\int r_3^2 \partial m = \frac{\omega_3}{2}\,\frac{M(R_3^2+r_3^2)}{2} = \omega_3(R_3^2+r_3^2).\frac{M}{4}.$$

Eliminiren wir r_1, a, b, R_3, r_3 und führen die Rotationsmomente $v = \frac{\omega^2}{2\pi f \varrho}$ ein, so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned}
E_1 &= \frac{\omega_1 . M^2}{4\pi\varrho L} = \sqrt{v_1}.\frac{\sqrt{2\pi f\varrho}.M^2}{4\pi\varrho L}\\
E_2 &= \frac{\omega_2(2+\lambda^2)a^2 M}{8} = \frac{\omega_2(2+\lambda^2)M^2}{8\pi\varrho L\sqrt{1+\lambda^2}}\\
&= \frac{\sqrt{v_2}}{2}.\frac{(2+\lambda^2)}{\sqrt{1+\lambda^2}}\;\frac{M^2.\sqrt{2\pi f\varrho}}{4\pi\varrho L}\\
E_3 &= \omega_3 r_3^2(2+\mu^2)\frac{M}{4} = \frac{\omega_3(2+\mu^2)M^2}{\mu^2.4\pi\varrho L}\\
&= \sqrt{v_3}\,\frac{2+\mu^2}{\mu^2}.\frac{M^2.\sqrt{2\pi f\varrho}}{4\pi\varrho L}
\end{aligned}\right\} \quad (20)$$

Um eine klarere Anschauung von dem Abhängigkeitsverhältnisse der Elemente v, E, λ und μ zu erhalten, fügen wir eine Tafel berechneter Werte v, E, λ, μ bei und geben eine graphische Darstellung der Grössen v und E, indem wir v als Abscisse und E als Ordinate eines orthogonalen Coordinatensystems ansehen. Setzen wir dabei zur Vereinfachung

$$\frac{\sqrt{2\pi f\varrho}.M^2}{4\pi\varrho L} = 1,$$

so gehen die vorstehenden Gleichungen über in

$$E_1 = \sqrt{v_1}$$

$$E_2 = \sqrt{v_2}.\frac{2+\lambda^2}{2\sqrt{1+\lambda^2}} = \sqrt{v_2}\left(\frac{1+(1+\lambda^2)+2\sqrt{1+\lambda^2}}{2\sqrt{1+\lambda^2}} - \frac{2\sqrt{1+\lambda^2}}{2\sqrt{1+\lambda^2}}\right)$$

$$= \sqrt{v_2}\left(\frac{1}{v_2}-1\right) = \frac{1}{\sqrt{v_2}} - \sqrt{v_2}$$

$$E_3 = \sqrt{v_3}.\frac{2+\mu^2}{\mu^2}.$$

Es ist demnach für sehr grosse Rotationsmomente (d. h. $\lim v_1 = 1$, $\lim v_2 = 0,5$, $\lim v_3 = 1$)

$$E_1 = 1$$

$$E_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}} - \sqrt{\tfrac{1}{2}} = \sqrt{2} - \sqrt{\tfrac{1}{2}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}} = 0,707$$

$$E_3 = \left\{\sqrt{v_3} \cdot \frac{2+\mu^2}{\mu^2}\right\}_{\mu=\infty} = 1.$$

Für sehr kleine Rotationsmomente wird

$$E_1 = \sqrt{v_1} = 0$$

$$E_2 = \frac{1}{\sqrt{v_2}} - \sqrt{v_2} = \infty$$

$$E_3 = \sqrt{v_3} \cdot \frac{2}{\mu^2} = \sqrt{\frac{\mu^2}{2}} \cdot \frac{2}{\mu^2} = \sqrt{\frac{2}{\mu^2}} = \frac{1}{\sqrt{v_3}} = \infty.$$

Ferner ist für sehr kleine v wegen $v = \frac{\mu^2}{2}$

v	E_1	E_2	E_3	$\sqrt{1+\lambda^2}$	$\sqrt{1+\mu^2}$
0	0	∞	∞	∞	1
0,0001	0,01	99,99	100,0	19998	1,0001
0,01	0,10	9,90	10,0	198	1,01
0,02	0,14	6,93	7,07	98,00	1,02
0,03	0,17	5,54	5,88	64,66	1,03
0,04	0,20	4,80	4,91	47,98	1,04
0,05	0,22	4,25	4,57	37,97	1,05
0,10	0,32	2,85	3,56	17,94	1,09
0,15	0,39	2,19	2,51	11,24	1,15
0,20	0,45	1,79	2,10	7,87	1,24
0,25	0,50	1,50	1,81	6,83	1,33
0,30	0,55	1,28	1,68	4,44	1,40
0,35	0,60	1,10	1,54	3,42	1,50
0,40	0,63	0,95	1,42	2,62	1,61
0,45	0,67	0,82	1,34	1,92	1,73
0,50	0,71	0,71	1,27	1,00	1,87
0,55	0,74		1,21		2,04
0,60	0,78		1,16		2,25
0,65	0,81		1,12		2,49
0,70	0,84		1,08		2,81
0,75	0,87		1,05		3,22
0,80	0,89		1,03		3,78
0,85	0,92		1,012		4,63
0,90	0,95		1,010		6,09
0,95	0,98		1,008		9,55
1,00	1,00		1,000		∞

$$\sqrt{1+\mu^2} = \sqrt{1+2v_3} = 1+v_3,$$

$$\sqrt{1+\lambda^2} = \frac{1-v_2+\sqrt{1-2v_2}}{v_2} = \frac{2(1-v_2)}{v_2}.$$

Aus der graphischen Darstellung, sowie aus der Tabelle erkennt man, dass die Curven $E = f(v)$ gemeinschaftliche Schnittpunkte besitzen und zwar für die beiden massiven Cylinder bei $v = 0{,}5$, $E = \sqrt{2}$, für den Kreis- und den Hohlcylinder bei $v = 1$, $E = 1$, für den Hohl- und den elliptischen Cylinder bei $v = 0$, $E = \infty$. Es ergeben sich hieraus folgende Sätze:

Die Energie eines ruhenden massiven Kreiscylinders ist Null. Erhält derselbe ein Drehungsmoment, so bewahrt er die Form des massiven Kreiscylinders. Bei fortwährend durch successive Impulse wachsender Energie nimmt auch das Rotationsmoment (und somit die Rotationsgeschwindigkeit) zu. Hat letzteres die Grösse $v = 0{,}5$ bei $E = 0{,}707$ erreicht, so sind zwei Fälle möglich: entweder bleibt die Figur ein Kreiscylinder mit wachsendem Rotationsmoment, oder sie geht in einen elliptischen Cylinder mit abnehmender Rotationsgeschwindigkeit über. Bei fortgesetzten Impulsen plattet letzterer sich mehr und mehr ab, bei abnehmender Rotationsgeschwindigkeit, da das Trägheitsmoment $\int r^2 \partial m$ in $E = \frac{\omega}{2}\int r^2 \partial m$ stärker wächst als die Energie selbst, bis er bei $E = \infty$, $v = 0$ an seiner Grenze die Form der unendlichen Lamelle annimmt. Der Kreiscylinder wird im Gleichgewichtszustande beharren, bis die correspondirenden Werte $E = 1$, $v = 1$ erreicht sind, und alsdann übergehen in den Hohlcylinder, dessen Rotationsmomente bei wachsender Energie und abnehmender Dicke des Cylinders kleiner und kleiner werden, bis an der Grenze $E = \infty$, $v = 0$ die Dicke des Cylinders eine unendlich geringe wird.

Da noch an der Grenze $v = 0$, $E = \infty$ die Curven $E_2 = f(v_2)$ und $E_3 = \varphi(v_3)$ einen Punkt gemein haben, so folgt hieraus, dass es ursprüngliche Kräfte oder Energien giebt, durch welche eine freischwebende, rotirende Flüssigkeitsmasse in zwei völlig verschiedene cylindrische Gleichgewichtsfiguren übergeführt werden kann, nämlich bei den Grenzwerten $v = 0$, $E = \infty$ in die unendliche Lamelle mit dem Axenverhältnisse $a:b = 0:1$ oder in einen Hohlcylinder von unendlich geringer Dicke mit dem Verhältnisse der Radien der inneren und äusseren Grenzfläche $r:R = 1:1$.

Erhalten dagegen diese drei Gleichgewichtsfiguren fortwährend der Drehung entgegengesetzte Impulse, so nimmt die Energie ab, und die Figuren durchlaufen dieselbe Reihe der Zustände in um-

gekehrter Ordnung. Die elliptischen und Hohlcylinder erhalten grössere Rotationsmomente und gehen bei $v = 0{,}5$, $E = 0{,}707$, resp. $v = 1$, $E = 1$ in den massiven Kreiscylinder über. Letzterer verliert bei abnehmender Energie allmählig seine Rotationsgeschwindigkeit, bis bei $E = 0$, $v = 0$ als Grenzfigur ein ruhender Kreiscylinder auftritt.

Eine Zerstörung des Cylinders, wie z. B. ein Uebergang in eine andere Gleichgewichtsfigur, findet nirgends statt, da ja für den elliptischen Cylinder innerhalb der Grenzen $v = 0$ und $v = 0{,}5$, für die beiden kreisförmigen Cylinder innerhalb der Grenzen $v = 0$ und $v = 1$ die absolute Massenanziehung nie kleiner als die Schwungkraft werden kann.

Betrachten wir noch die Fälle, in welchen Kreis-, elliptische und Hohlcylinder von gleicher Masse und Energie bei gleicher Dichtigkeit zusammenbestehen können, so finden wir folgende Ergebnisse:

1) Den massiven Kreiscylindern vom Rotationsmomente $v = 0$ bis $v = 0{,}5$ entspricht weder ein elliptischer, noch ein Hohlcylinder.

2) Den massiven Kreiscylindern von den Rotationsmomenten $v = 0{,}5$ bis $v = 1$ entsprechen elliptische Cylinder mit Rotationsmomenten und Axenverhältnissen, welche zwischen

$$v = 0{,}5 \quad \text{und} \quad v = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \text{ resp.}$$

$$\sqrt{1 + \lambda^2} = 1 \quad \text{und} \quad \sqrt{1 + \lambda^2} = \tfrac{1}{4}(1 + \sqrt{5} + \sqrt{2(1 + \sqrt{5})})$$

variiren; Hohlcylinder entsprechen aber auch ihnen nicht.

3) Den Hohlcylindern entsprechen elliptische Cylinder, deren Axenverhältnisse zwischen

$$\sqrt{1 + \lambda^2} = \tfrac{1}{4}\{1 + \sqrt{5} + \sqrt{2(1 + \sqrt{5})}\} \quad \text{und} \quad \sqrt{1 + \lambda^2} = \infty$$

und deren Rotationsmomente zwischen

$$v = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{und} \quad v = 0$$

gelegen sind.

Cap. III.

Von den Veränderungen der Axenverhältnisse, Rotationsgeschwindigkeiten, Schwerkräfte etc. der homogen flüssigen, cylindrischen Gleichgewichtsfiguren durch Condensation und Expansion, bei gleicher Masse und Energie.

Wirken auf homogen flüssige, im hydrostatischen Gleichgewichte befindliche, unendliche Cylinder irgend welche inneren oder äusseren

Einflüsse, welche eine Aenderung ihrer Dichtigkeit, d. h. Expansion oder Condensation herbeiführen, mögen es nun chemische Processe, Abkühlung, Wärmezuführung von aussen oder dergl. sein, so werden sich mit der Dichtigkeit zugleich auch die Rotationsgeschwindigkeiten, Axenverhältnisse etc. ändern und zwar in bestimmter Weise, wenn Masse und Energie constant bleiben.

Es übt nun, wie aus dem Laufe der Untersuchungen erhellt, eine Condensation auf die Axenverhältnisse etc. dieselben Wirkungen aus, wie eine Vermehrung der Energie bei constanter Masse; umgekehrt wirkt eine Expansion, wie eine Verminderung der Energie.

Wir behandeln nach einander die drei cylindrischen Gleichgewichtsfiguren.

a) Massive Kreiscylinder.

Die Energie des Kreiscylinders war nach Gleichung (20)

$$E = \frac{\omega}{2} r^2 M = \frac{\omega}{4} \cdot \frac{M^2}{4\pi\varrho L} = \frac{\sqrt{2\pi f \varrho v}}{4\pi\varrho L} \cdot M^2,$$

wo $M = r^2 \pi \varrho L$.

Betrachten wir nun zwei Kreiscylinder von gleicher Masse und Energie und sehen die durch gestrichene Buchstaben bezeichneten Elemente als constant an, so ergiebt sich aus dem Werte von E

$$\omega : \omega_1 = r_1^2 : r^2 = \varrho : \varrho_1 = v : v_1;$$

ferner folgt noch aus der für die Umlaufszeiten geltenden Relation $\omega T = \omega_1 T_1$

$$\varrho : \varrho_1 = T_1 : T = \omega : \omega_1 = v : v_1 = r_1^2 : r^2. \tag{21}$$

Diese Beziehungen gelten aber nur so lange, als sie mit der Gleichgewichtsbedingung $v \leqq 1$ vereinbar sind.

Für die Grenze der Expansion, d. h. für $\varrho = 0$, besteht Gleichgewicht, und es treten die correspondirenden Werte auf

$$\varrho = 0,\ \omega = 0,\ v = 0,\ T = \infty,\ r = \infty. \tag{22}$$

Der Querschnitt des Cylinders wird also ein unendlich grosser, bei verschwindender Rotationsgeschwindigkeit und Rotationsmoment.

Sollte nun ϱ unendlich grosse Werte annehmen, so müsste auch $v = \infty$ werden. Dies ist aber nicht möglich, da $\max. v = 1$.

Nehmen wir der Einfachheit halber an, dass $\pi f = 1$ sei, und dass $v_1 = \frac{1}{2}$ die Werte $\varrho_1 = 1$, $\omega_1 = 1$, $r_1 = 1$, $T_1 = 1$, d. h. auch

$k_1 = 1$, $A_1' = -2$, $A_1 = -1$ entsprechen, so folgt für die Grenze derjenigen Condensation, bei welcher die Kreiscylinder aufhören zu bestehen,

$$\left.\begin{aligned} v = 1, \quad \varrho = 2, \quad \omega = 2 \\ r = \sqrt{\tfrac{1}{2}} = 0{,}707, \quad T = 0{,}5 \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Es existiren demnach bei gleicher Masse und Energie für Dichtigkeiten, welche zwischen 0 und 2 variiren, Kreiscylinder als Gleichgewichtsfiguren. Es kann bei der Condensation aber keineswegs r unendlich klein und ω unendlich gross werden, da ihre Minimal-, resp. Maximalwerte $r = 0{,}707$ und $\omega = 2$ sind.

Innerhalb der gefundenen Grenzen wachsen also die Rotationsgeschwindigkeiten und Rotationsmomente mit wachsender Dichtigkeit, dagegen nehmen die Umlaufszeiten und die Radien des Querschnitts ab.

Die Schwungkraft k an der äusseren Grenzfläche ist $k = \omega^2 r$, also $k : k_1 = \omega^2 r : \omega_1^2 r_1$ und, da nach (21) $\omega : \omega_1 = r_1^2 : r^2$

$$k : k_1 = \omega^{\frac{3}{2}} : \omega_1^{\frac{3}{2}} = \varrho^{\frac{3}{2}} : \varrho_1^{\frac{3}{2}} = r_1^3 : r^3 = v^{\frac{3}{2}} : v_1^{\frac{3}{2}}$$

oder

$$k^2 : k_1^2 = \varrho^3 : \varrho_1^3 = \omega^3 : \omega_1^3 = v^3 : v_1^3 = r_1^6 : r^6 = T_1^3 : T^3. \tag{24}$$

An der Grenze der Expansion wird die Schwungkraft $k = 0$, für $v = \frac{1}{2}$ ist $k = 1$, für $v = 1$ dagegen $k = 2\sqrt{2} = 2{,}828$.

Die absolute Massenanziehung an der äusseren Fläche des Cylinders ist nach Gleichung (7)

$$A' = B' = -2\pi f \varrho r.$$

Mit Hülfe der Relation (24) ergiebt sich hieraus

$$A'^2 : A_1'^2 = r_1^2 : r^2 = \varrho : \varrho_1 = \omega : \omega_1 = v : v_1 = k^{\frac{2}{3}} : k_1^{\frac{2}{3}}, \tag{25}$$

und es entsprechen einander die Werte

$$\begin{aligned} \varrho = 0, \quad & A' = 0 \\ \varrho = 1, \quad & A' = -2 \\ \varrho = 2, \quad & A' = -2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Die Schwerkräfte an der äusseren Grenzfläche sind

$$A = A' + \omega^2 r = A' + k$$

oder

$$A = -2\pi f \varrho r + \omega^2 r = 2\pi f \varrho r (v - 1),$$

also

$$A : A_1 = r\varrho(v-1) : r_1\varrho_1(v_1-1)$$

$$= \frac{(v-1)v}{\sqrt{v}} = \frac{(v_1-1)v_1}{\sqrt{v_1}}$$

$$= \sqrt{v}(v-1) : \sqrt{v_1}(v_1-1). \tag{26}$$

Für sehr starke Expansionen wird nahezu $v = 0 = \omega$; für zwei stark expansirte Kreiscylinder ist demnach

$$A = -2\pi f\varrho r,$$

also

$$A : A_1 = \varrho r : \varrho_1 r_1 = \varrho\sqrt{\varrho_1} : \varrho_1\sqrt{\varrho} = \sqrt{\varrho} : \sqrt{\varrho_1},$$

d. h. es wachsen oder fallen die Schwerkräfte bei starker Expansion mit den Quadratwurzeln aus den Dichtigkeiten.

An der Grenze der Expansion, d. h. für $\varrho = 0$ und $v = 0$ ist zugleich $A = 0$; für $\varrho = 1$, $v = \frac{1}{2}$ ist $A = -1$; es verschwindet A aber auch für das Maximum $\varrho = 2$, $v = 1$. An diesen Grenzen hört die Stabilität des Kreiscylinders auf, da die Schwerkraft verschwindet. Innerhalb der Grenzen $\varrho = 0$ und $\varrho = 2$ (oder $v = 0$ und $v = 1$) prävalirt dagegen die Massenanziehung über die Schwungkraft, d. h. die Schwerkraft (Fallgeschwindigkeit) ist stets nach dem Inneren der Masse hin gerichtet. Es ist deswegen innerhalb dieser Grenzen auch eine Abschleuderung von Materie nicht denkbar.

Es war schon gezeigt worden, dass an der Grenze $v = 1$ ($\varrho = 2$, $\omega = 2$, $r = 0{,}707$, $T = 0{,}5$) ein Uebergang des massiven Kreiscylinders in den hohlen Kreiscylinder stattfindet; ähnlich ist bei $v = 0{,}5$ ($\varrho = 1$, $\omega = 1$, $r = 1$, $T = 1$) ein Uebergang des Kreiscylinders in einen elliptischen Cylinder möglich.

b) Elliptische Cylinder.

Aus dem Werte der Energie (20)

$$E = \frac{\omega}{2}\int r^2\partial m = \frac{\omega}{8}M(a^2+b^2) = \omega . a^2\frac{(2+\lambda^2)}{8}.M$$

$$= \frac{\omega . M^2(2+\lambda^2)}{8\pi\varrho L\sqrt{1+\lambda^2}} = \sqrt{v}\,\frac{2+\lambda^2}{\sqrt{1+\lambda^2}}\cdot\frac{M^2\sqrt{2\pi f\varrho}}{8\pi\varrho L}$$

folgt für zwei elliptische Cylinder von invariabler Masse und Energie

$$\frac{\omega}{\varrho}\cdot\frac{2+\lambda^2}{\sqrt{1+\lambda^2}} = \frac{\omega_1}{\varrho_1}\cdot\frac{2+\lambda_1^2}{\sqrt{1+\lambda_1^2}};$$

ferner ist

$$v : v_1 = \frac{\omega^2}{\varrho} : \frac{\omega_1^2}{\varrho_1} = \frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{(1+\sqrt{1+\lambda^2})^2} : \frac{\sqrt{1+\lambda_1^2}}{(1+\sqrt{1+\lambda_1^2})^2},$$

also

$$\omega : \omega_1 = \frac{2+\lambda^2}{(1+\sqrt{1+\lambda^2})^2} : \frac{2+\lambda_1^2}{(1+\sqrt{1+\lambda_1^2})^2} \tag{27}$$

und

$$\varrho : \varrho_1 = \frac{(2+\lambda^2)^2}{\sqrt{1+\lambda^2}(1+\sqrt{1+\lambda^2})^2} : \frac{(2+\lambda_1^2)^2}{\sqrt{1+\lambda_1^2}(1+\sqrt{1+\lambda_1^2})^2}. \tag{28}$$

Für $\varrho = \infty$ wird auch $\sqrt{1+\lambda^2}$ unendlich gross, dagegen $v = 0$. Es findet also an der Grenze der Condensation noch hydrostatisches Gleichgewicht statt.

Für sehr grosse Axenverhältnisse und somit auch sehr grosse Dichtigkeiten gilt die Relation

$$v = \frac{2\sqrt{1+\lambda^2}}{(1+\sqrt{1+\lambda^2})^2} = \frac{2}{\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}+2+\sqrt{1+\lambda^2}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1+\lambda^2}} = \frac{2}{\lambda},$$

und für zwei elliptische Cylinder von starker Condensation ist

$$\left.\begin{aligned} v : v_1 &= \lambda_1 : \lambda, \\ \omega : \omega_1 &= 1:1, \quad \text{d. h. } \omega = \omega_1, \\ \varrho : \varrho_1 &= \sqrt{1+\lambda^2} : \sqrt{1+\lambda_1^2} = \lambda : \lambda_1 \\ v : v_1 &= \varrho_1 : \varrho \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Bei zwei elliptischen Cylindern von sehr grosser Dichtigkeit sind bei derselben Masse und Energie die Dichtigkeiten den Axenverhältnissen direct, den Rotationsmomenten umgekehrt proportional, während die Winkelgeschwindigkeiten constant werden.

Das Maximum des Rotationsmomentes tritt ein für

$$v = \frac{\omega^2}{2\pi f\varrho} = \left\{\frac{2\sqrt{1+\lambda^2}}{(1+\sqrt{1+\lambda^2})^2}\right\}_{\lambda=0} = \tfrac{1}{2}.$$

Auf den für diesen Wert bestehenden Cylinder beziehen wir alle Elemente mit gestrichenen Buchstaben und setzen $\pi f = 1$, $\omega_1 = 1$, $a_1 = b_1 = 1$, also auch $k_1 = l_1 = 1$, $A_1' = B_1' = -2$, $A_1 = B_1 = -1$.

Es ist dann bei dieser Wahl der Constanten $\varrho = 1$ das geringste Mass der Dichtigkeit, welches beim elliptischen Cylinder aufzutreten vermag. Bei unendlich grossen Axenverhältnissen, d. h. bei unendlich

kleinen Rotationsmomenten ist dann $\varrho : 1 = \infty : 1$ oder $\varrho = \infty$, d. h. der elliptische Cylinder wird bei zunehmender Dichtigkeit stets im Gleichgewichte bleiben können.

Es würde ferner an den Grenzen der Condensation sein $\omega : 1 = 1 : \frac{1}{2}$ oder $\omega = 2$; ferner wegen $a_1 b_1 \varrho_1 = 1$

$$a^2 = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}.\varrho} = 0$$

$$b^2 = \frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\varrho} = \left\{\frac{(1+\lambda^2)(1+\sqrt{1+\lambda^2})^2}{(2+\lambda^2)^2}\right\}_{\lambda=\infty} = 1.$$

An der Grenze der Condensation verschwindet also das Rotationsmoment und die kleinere Axe des Querschnitts; die Umdrehungsgeschwindigkeit nimmt den Wert 2 an und verdoppelt sich also nur während des ganzen Verlaufes der Condensation. Der Wert der grösseren Axe wird $= 1$, bleibt also endlich und ist gleich dem Werte, welcher bei dem Rotationsmomente $v = \frac{1}{2}$ oder $\varrho = 1$ statt hatte.

Es findet für b ein Maximum statt; es ist

$$b^2 = \frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\varrho}$$

und

$$b^2 : b_1^2 = \frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\varrho} : \frac{\sqrt{1+\lambda_1^2}}{\varrho_1}$$

oder

$$b^2 : b_1^2 = \frac{(1+\lambda^2)(1+\sqrt{1+\lambda^2})^2}{(2+\lambda^2)^2} : \frac{(1+\lambda_1^2)(1+\sqrt{1+\lambda_1^2})^2}{(2+\lambda_1^2)^2},$$

also

$$b^2 = \frac{(1+\lambda^2)(1+\sqrt{1+\lambda^2})^2}{(2+\lambda^2)^2}.$$

Bei der Bestimmung des Maximums von b verfahren wir nach den gewöhnlichen Methoden:

$$\{2\lambda(1+\sqrt{1+\lambda^2})^2(2+\lambda^2)^2 + 2\lambda\sqrt{1+\lambda^2}(1+\sqrt{1+\lambda^2})(2+\lambda^2)^2$$
$$-4\lambda(1+\lambda^2)(1+\sqrt{1+\lambda^2})^2(2+\lambda^2)\}\frac{1}{(2+\lambda^2)^4} = 0$$

oder

$$0 = \frac{2\lambda(1+\sqrt{1+\lambda^2})}{(2+\lambda^2)^3}\{2\sqrt{1+\lambda^2} - \lambda^2\}.$$

Diese Gleichung wird befriedigt durch $\lambda = 0$, $\lambda = \infty$, $\lambda = \sqrt{2+2\sqrt{2}}$, also durch die Axenverhältnisse

$$\sqrt{1+\lambda^2} = 1,$$
$$\sqrt{1+\lambda^2} = \infty,$$
$$\sqrt{1+\lambda^2} = \sqrt{3+2\sqrt{2}} = 2{,}41421 = 1+\sqrt{2}.$$

Die beiden ersten Werte liefern Minima von b, nämlich $b = 1$; letzterer dagegen ein Maximum, nämlich

$$b = \frac{\sqrt{1+\lambda^2}(1+\sqrt{1+\lambda^2})}{1+(1+\lambda^2)} = \frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{2} = 1{,}2071,$$

da für $\sqrt{1+\lambda^2} = \sqrt{3+2\sqrt{2}}$ ist $1+(1+\lambda^2) = 2\{1+\sqrt{1+\lambda^2}\}$.

Diesem Werte entspricht

$$a = \frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{2\sqrt{1+\lambda^2}} = 0{,}5.$$

Die correspondirende Dichtigkeit folgt aus

$$ab\varrho = a_1 b_1 \varrho_1 = 1,$$

also

$$\varrho = \frac{1}{a^2\sqrt{1+\lambda^2}}$$

oder

$$\varrho = 1{,}6569.$$

Die Rotationsgeschwindigkeit ist

$$\omega(a^2+b^2) = \omega_1(a_1^2+b_1^2) = 2,$$

also

$$\omega = \frac{2}{a^2+b^2} = \frac{2}{a^2(2+\lambda^2)} = \frac{8}{6{,}82842}$$

oder

$$\omega = 1{,}171574;$$

endlich ist

$$v = \frac{2.2{,}41421}{3{,}41421^2} = 0{,}4337.$$

Aus der Constanz der Energie resultirte

$$\omega : \omega_1 = (a_1^2+b_1^2) : (a^2+b^2),$$

ferner da $\omega T = \omega_1 T_1$, so ist

$$T : T_1 = (a^2+b^2) : (a_1^2+b_1^2) = \omega_1 : \omega. \tag{30}$$

Für sehr grosse Dichtigkeiten und Axenverhältnisse wird a sehr klein, und es ist

$$\omega : \omega_1 = b_1^2 : b^2 = T_1 : T. \tag{31}$$

Es war ferner

$$\varrho : \varrho_1 = a_1 b_1 : ab = \frac{b_1^2}{\sqrt{1+\lambda_1^2}} : \frac{b^2}{\sqrt{1+\lambda^2}} = a_1^2\sqrt{1+\lambda_1^2} : a^2\sqrt{1+\lambda^2},$$

oder

$$\left.\begin{aligned} \varrho\sqrt{1+\lambda^2} : \varrho_1\sqrt{1+\lambda_1^2} &= a_1^2 : a^2 \\ \frac{\varrho}{\sqrt{1+\lambda^2}} : \frac{\varrho_1}{\sqrt{1+\lambda_1^2}} &= b_1^2 : b^2 \end{aligned}\right\}.$$

Für die Schwungkräfte k und l an den Polen der kleineren und grösseren Axe des cylindrischen Querschnitts ist

$$\left.\begin{aligned} k : k_1 &= \omega^2 a : \omega_1^2 a_1 \\ l : l_1 &= \omega^2 b : \omega_1^2 b_1 \end{aligned}\right\},$$

also

$$\frac{l}{k} : \frac{l_1}{k_1} = \frac{b}{a} : \frac{b_1}{a_1} = \sqrt{1+\lambda^2} : \sqrt{1+\lambda_1^2}, \tag{32}$$

folglich für sehr grosse Dichtigkeiten nach Gleichung (29)

$$\frac{l}{k} : \frac{l_1}{k_1} = \lambda : \lambda_1 = \varrho : \varrho_1 = v_1 : v. \tag{33}$$

Bei sehr starken Condensationen sind also die Quotienten aus den Schwungkräften an den Polen den Dichtigkeiten direct, den Rotationsmomenten umgekehrt proportional.

Aus den voraufgehenden Gleichungen resultirt noch

$$\left.\begin{aligned} k : k_1 &= a(a_1^2 + b_1^2)^2 : a_1(a^2 + b^2)^2 \\ l : l_1 &= b(a_1^2 + b_1^2)^2 : b_1(a^2 + b^2)^2 \end{aligned}\right\}, \tag{34}$$

also für sehr grosse Dichtigkeiten und Axenverhältnisse:

$$\left.\begin{aligned} k : k_1 &= \frac{b_1^4}{a_1} : \frac{b^4}{a} = b_1^3\sqrt{1+\lambda_1^2} : b^3\sqrt{1+\lambda^2} \\ l : l_1 &= b_1^3 : b^3 = \omega^{\frac{3}{2}} : \omega_1^{\frac{3}{2}} \end{aligned}\right\}. \tag{35}$$

Aus den früheren Relationen leitet man auch leicht die Gleichung ab

$$\begin{aligned} (k^2 + l^2) : (k_1^2 + l_1^2) &= \omega^4(a^2 + b^2) : \omega_1^4(a_1^2 + b_1^2) \\ &= \omega^3 : \omega_1^3 = (a_1^2 + b_1^2)^3 : (a^2 + b^2)^3. \end{aligned} \tag{36}$$

An der Grenze der Condensation war

$$a = 0, \quad \sqrt{1+\lambda^2} = \infty, \quad b = 1, \quad \omega = 2,$$

also ist

$$k = 0, \quad l = 4;$$

für den Maximalwert von b sind

$$k = \omega^2 a = \frac{1{,}1716^2}{2} = 0{,}6863$$

$$l = \omega^2 b = 1{,}1716^2 . 1{,}2071 = 1{,}6569.$$

Mit Hülfe der oben gefundenen Relationen über den Zusammenhang der Schwungkräfte an den Polen mit den absoluten Massenanziehungen und den Schwerkräften folgt, da $k = -B$, $l = -A$, $(k+l) = -A' = -B'$,

$$\frac{A}{B} : \frac{A_1}{B_1} = \sqrt{1+\lambda^2} : \sqrt{1+\lambda_1^2},$$

und für sehr grosse Dichtigkeiten

$$\frac{A}{B} : \frac{A_1}{B_1} = \lambda : \lambda_1 = \varrho : \varrho_1 = v_1 : v.$$

Es ist nun auch

$$\left.\begin{array}{l} B : B_1 = a(a_1^2+b_1^2)^2 : a_1(a^2+b^2)^2 \\ A : A_1 = b(a_1^2+b_1^2)^2 : b_1(a^2+b^2)^2 \end{array}\right\},$$

und ferner

$$(A^2+B^2) : (A_1^2+B_1^2) = (k^2+l^2) : (k_1^2+l_1^2)$$
$$= \omega^3 : \omega_1^3 = (a_1^2+b_1^2)^3 : \; (a^2+b^2)^3.$$

Bei sehr starken Condensationen verhält sich

$$B : B_1 = b_1^3\sqrt{1+\lambda_1^2} : b^3\sqrt{1+\lambda^2} \quad \text{und}$$
$$A : A_1 = b_1^3 : b^3 = \omega^{\frac{3}{2}} : \omega_1^{\frac{3}{2}}$$

Für die absolute Massenanziehung folgt

$$A' : A_1' = \omega^2(a+b) : \omega_1^2(a_1+b_1) = (k+l) : (k_1+l_1),$$

woraus für sehr grosse Dichtigkeiten resultirt

$$A' : A_1' = l : l_1 = A : A_1 = b_1^3 : b^3 = \omega^{\frac{3}{2}} : \omega_1^{\frac{3}{2}}.$$

An der Grenze der Condensation gehen die Werte A, B und A' über in

$$A = -4$$
$$B = \;\; 0$$
$$A' = -4,$$

während dem Maximum von b die correspondirenden Werte

$$A = -1{,}6569$$
$$B = -0{,}6863$$
$$A' = -2{,}3432$$

entsprechen.

c. Hohle Kreiscylinder.

Die Energie des kreisförmigen Hohlcylinders ist nach Gleichung (20)

$$E = \frac{\omega}{4}(R^2+r^2)M = \omega r^2(2+\mu^2)\frac{M}{4} = \frac{\omega(2+\mu^2)M^2}{4\mu^2 . \pi\varrho L}$$

$$= \sqrt{v} . \frac{2+\mu^2}{\mu^2} . \frac{M^2 . \sqrt{2\pi f\varrho}}{4\pi\varrho L},$$

und es ist demnach für zwei Hohlcylinder von derselben Masse und Energie

$$\omega : \omega_1 = (R_1^2+r_1^2) : (R^2+r^2)$$
$$\varrho : \varrho_1 = (R_1^2-r_1^2) : (R^2-r^2) = t_1^2 : t^2, \tag{37}$$

wo die t die Länge der Tangenten bezeichnen, welche von einem Punkte der äusseren Oberfläche an die innere gezogen werden können. Den Quadraten dieser Tangenten sind also die Dichtigkeiten umgekehrt proportional.

Es verhält sich ferner

$$\frac{\omega(2+\mu^2)}{\mu^2} : \frac{\omega_1(2+\mu_1^2)}{\mu_1^2} = \varrho : \varrho_1 = \omega\frac{R^2+r^2}{R^2-r^2} : \omega_1\frac{R_1^2+r_1^2}{R_1^2-r_1^2} \tag{38}$$

und hieraus folgt für sehr grosse Verhältnisse der Radien bei Vernachlässigung der sehr kleinen Werte $\frac{2}{\mu^2}$ und $\frac{2}{\mu_1^2}$

$$\omega : \omega_1 = \varrho : \varrho_1,$$

d. h. bei starken Condensationen sind die Rotationsgeschwindigkeiten den Dichtigkeiten proportional; weiter ist auch

$$v : v_1 = \omega : \omega_1 = \varrho : \varrho_1.$$

Ferner folgt

$$\frac{2+\mu^2}{\mu^2} : \frac{2+\mu_1^2}{\mu_1^2} = \sqrt{\frac{\varrho}{v}} : \sqrt{\frac{\varrho_1}{v_1}}$$

oder

$$\varrho : \varrho_1 = \frac{(2+\mu^2)^2}{\mu^4} v : \frac{(2+\mu_1^2)^2}{\mu_1^4} . v_1. \tag{39}$$

Diese Relationen gelten nur so lange, als sie mit der Gleichgewichtsbedingung $v = \frac{\omega^2}{2\pi f\varrho} = 1 - \frac{l(1+\mu^2)}{\mu^2}$ vereinbar sind.

Als Grenze von v bei unendlich grossem μ fanden wir $v = 1$ hier war R endlich, r dagegen unendlich klein, d. h. es fand ein Uebergang vom massiven zum hohlen Kreiscylinder statt.

Beziehen wir die durch gestrichene Buchstaben bezeichneten Elemente auf das Maximum des Rotationsmomentes und setzen, wie vorher, $\pi f = 1$, so correspondiren die Werte $v_1 = 1$, $\varrho_1 = 2$, $\omega_1 = 2$, $R_1 = 0{,}707$, $r = 0$, $\sqrt{1+\mu_1^2} = \infty$; ferner ist $k_1 = 4\sqrt{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}$ $A_1' = 2\sqrt{2}$; $A_1 = 0$.

Es ist zunächst nach Gleichung (39)

$$\varrho : \varrho_1 = \left(\frac{2+\mu^2}{\mu^2}\right)^2 \left(1 - \frac{l(1+\mu^2)}{\mu^2}\right) : \left(\frac{2+\mu_1^2}{\mu_1^2}\right)^2 \left(1 - \frac{l(1+\mu_1^2)}{\mu_1^2}\right), \quad (40)$$

also:

$$\varrho = 2\left(\frac{2+\mu^2}{\mu^2}\right)^2 \left(1 - \frac{l(1+\mu^2)}{\mu^2}\right),$$

und für unendlich kleine μ

$$\varrho = 2\left(\frac{2+\mu^2}{\mu^2}\right)^2 \frac{\mu^2}{2} = \frac{4}{\mu^2} = \infty.$$

Die Dichtigkeit wird also eine unendlich grosse sein können, oder der Hohlcylinder wird bei jeder noch so grossen Condensation im Gleichgewichtszustande beharren können, wenn Masse und Energie invariabel bleiben.

Es war nach Gleichung (38)

$$\omega : \omega_1 = \varrho \frac{\mu^2}{2+\mu^2} : \varrho_1 \frac{\mu_1^2}{2+\mu_1^2},$$

also

$$\omega = 2 . \frac{2+\mu^2}{\mu^2} \left(1 - \frac{l(1+\mu^2)}{\mu^2}\right),$$

d. h. für unendlich kleine μ

$$\omega = \frac{2(2+\mu^2)}{\mu^2} . \frac{\mu^2}{2} = 2.$$

Für verschwindende μ ist $\sqrt{1+\mu^2} = 1$, also $R = r$. Da nun

$$\omega : \omega_1 = (R_1^2 + r_1^2) : (R^2 + r^2),$$

und somit $a(R^2+r^2) = 1$, so ist für verschwindende μ

$$r^2 = \frac{1}{\omega(2+\mu^2)} = \frac{1}{4},$$

also auch

$$r = \frac{1}{2}, \quad R = \frac{1}{2}.$$

Es wird demnach für den Fall, dass bei unendlich grosser Dichtigkeit der cylindrische Ring unendlich dünn wird, die Oeffnung des Cylinders doch keineswegs eine unendlich grosse. Vielmehr wird der

Radius der äusseren Grenzfläche sich bei der Condensation von 0,707 bis auf 0,5 verkürzt haben. Die Rotationsgeschwindigkeit hat wieder denselben Wert angenommen, welchen sie bei $v = 1$, d. h. beim Uebergang des Hohlcylinders in den massiven Kreiscylinder hatte. Die Werte von ω fallen zuerst bis zu einem Minimum, welches etwa bei $\omega = 1{,}70$, $v = 0{,}6$, $\sqrt{1+\mu^2} = 2{,}25$ gelegen ist, und wachsen dann wieder bis $\omega = 2$.

Für sehr kleine μ war angenähert $v = \frac{\mu^2}{2}$, also

$$v : v_1 = \mu^2 : \mu_1^2;$$

ferner

$$\varrho : \varrho_1 = \frac{(2+\mu^2)^2}{\mu^4} \cdot \frac{\mu^2}{2} : \frac{(2+\mu_1^2)^2}{\mu_1^4} \cdot \frac{\mu_1^2}{2} = \mu_1^2 : \mu^2,$$

also auch

$$\varrho : \varrho_1 = v_1 : v = \mu_1^2 : \mu^2;$$

ferner ist

$$\omega : \omega_1 = \frac{\mu^2 \mu_1^2}{2+\mu^2} : \frac{\mu_1^2 \mu^2}{2+\mu_1^2} = \frac{1}{2+\mu^2} : \frac{1}{2+\mu_1^2} = 1 : 1,$$

d. h. $\omega = \omega_1$. Es finden also bei starker Condensation für den Hohl- und den elliptischen Cylinder (cf. Gleichung (29)) analoge Verhältnisse statt.

Für die Schwungkräfte K und k an der äusseren und inneren Grenzfläche gelten folgende Beziehungen

$$K = \omega^2 R, \quad k = \omega^2 r,$$

also

$$\frac{K}{k} = \frac{R}{r} = \sqrt{1+\mu^2}$$

und

$$\frac{K}{k} : \frac{K_1}{k_1} = \frac{K}{K_1} : \frac{k}{k_1} = \sqrt{1+\mu^2} : \sqrt{1+\mu_1^2}.$$

Es ist nun auch

$$(K^2+k^2) : (K_1^2+k_1^2) = \omega^4(R^2+r^2) : \omega_1^4(R_1^2+r_1^2),$$

also mit Benutzung der Gleichung

$$\omega : \omega_1 = (R_1^2+r_1^2) : (R^2+r^2),$$

$$(K^2+k^2) : (K_1^2+k_1^2) = \omega^3 : \omega_1^3 = (R_1^2+r_1^2)^3 : (R^2+r^2)^3.$$

Für sehr kleine Werte von r und k folgt

$$K^2 : K_1^2 = \omega^3 : \omega_1^3 = R_1^6 : R^6.$$

An der Grenze der Condensation wird

$$K = \omega^2 R = 2,$$
$$k = \omega^2 r = 2.$$

Die absoluten Massenanziehungen an den äusseren Grenzflächen waren

$$A' = -2\pi f \varrho \frac{R^2 - r^2}{R},$$

also auch

$$A' = -\frac{2Mf}{RL},$$

woraus sich ergiebt

$$A' : A_1' = R_1 : R,$$

d. h. die Massenanziehungen sind den Radien der äusseren Grenzfläche umgekehrt proportional.

An der Grenze der Condensation ist

$$A' = \frac{A_1'}{R} \,.\, R_1 = -\frac{2\sqrt{2}}{0{,}5} \sqrt{\tfrac{1}{2}} = -4.$$

Für die Schwerkräfte A an der äusseren Grenzfläche folgt

$$A = A' + K = \omega^2 R - 2\pi f \varrho \frac{R^2 - r^2}{R} = \omega^2 R - \frac{2fM}{LR},$$

also

$$A : A_1 = \left\{ \omega^2 R^2 - \frac{2fM}{L} \right\} \cdot \frac{1}{R} : \left\{ \omega_1^2 R_1^2 - \frac{2fM}{L} \right\} \cdot \frac{1}{R_1}$$
$$= \left\{ KR - \frac{2fM}{L} \right\} A' : \left\{ K_1 R_1 - \frac{2fM}{L} \right\} A_1';$$

sodann ist auch

$$A = 2\pi f \varrho R \left\{ \frac{\omega^2}{2\pi f \varrho} - \frac{R^2 - r^2}{R^2} \right\}$$
$$= 2\pi f \varrho R \left\{ v - \frac{\mu^2}{1 + \mu^2} \right\}$$
$$= 2\pi f \varrho R \left\{ \frac{1}{1 + \mu^2} - \frac{l(1 + \mu^2)}{\mu^2} \right\},$$

und für zwei Hohlcylinder von derselben Masse und Energie

$$A : A_1 = \varrho R \left\{ \frac{1}{1 + \mu^2} - \frac{l(1 + \mu^2)}{\mu^2} \right\} : \varrho_1 R_1 \left\{ \frac{1}{1 + \mu_1^2} - \frac{l(1 + \mu_1^2)}{\mu_1^2} \right\}.$$

Für sehr kleine μ war $v = \frac{\mu^2}{2}$, also

$$A_{(\mu=0)} = 2\pi f \varrho R \left(v - \frac{2v}{1 + 2v} \right) = 2\pi f \varrho v R \left(1 - \frac{2}{1 + 2v} \right)$$
$$= \omega^2 R \left(\frac{2v - 1}{2v + 1} \right) = K \,.\, \frac{2v - 1}{2v + 1}.$$

Der Ausdruck $\frac{2v-1}{2v+1}$ nähert sich nun aber für verschwindende μ und v der Grenze -1, da

$$\lim \frac{2v-1}{2v+1} = \lim \left(-\frac{2v+1}{2v+1} - \frac{4v}{2v+1}\right) = -1.$$

Es ergiebt sich also für verschwindende Axenverhältnisse die Relation

$$A = -\omega^2 R = -K$$

und

$$A : A_1 = \omega^2 R : \omega_1{}^2 R_1 = K : K_1,$$

d. h. bei sehr starken Condensationen sind die Schwerkräfte an der äusseren Oberfläche des Hohlcylinders den Schwungkräften proportional.

Für die Grenze der Condensation wird also $A = -K = -2$, wie sich aus $A = A' + K = -4 + 2 = -2$ ergiebt.

XX.

Ueber einige Abel'sche Gleichungen vom sechsten Grade, die sich mit Hülfe einer Gleichung vom vierten Grade auflösen lassen.

Von

Herrn Moritz Weiss

in Wien.

Alle Methoden, mit deren Hülfe die algebraische Auflösung der Gleichungen vollführt wird, laufen darauf hinaus, die Auflösung der vorgelegten Gleichung von der Auflösung einer anderen leichter lösbaren Gleichung abhängig zu machen, deren Wurzeln bestimmte Functionen der Wurzeln der vorgelegten Gleichung sind, so dass die letzteren bekannt sind, sobald man jene der Hülfsgleichung gefunden hat.

Da diese Methoden, auf die Gleichungen von höherem als dem 4. Grade angewendet, nicht mehr zum Ziele führten, drängte sich von selbst die Frage auf, ob diese Gleichungen überhaupt algebraisch auflösbar seien, oder ob die algebraische Auflösbarkeit derselben an bestimmte, näher zu ermittelnde Bedingungen geknüpft sei? Abel zeigte nun, dass Gleichungen von höherem als dem 4. Grade, deren Wurzeln irgend welche, unter einander in keinem Zusammenhange stehende Grössen sind, d. h. deren Coefficienten völlig unbestimmt bleiben, nicht algebraisch auflösbar sind, und gab mehrere Classen algebraischer Gleichungen an, die in Folge bestimmter Eigenschaften ihrer Wurzeln eine algebraische Auflösung zulassen. So bewies er auch folgenden Satz:

Eine beliebige Gleichung $f(x) = 0$ lässt sich algebraisch auflösen, sobald alle ihre Lösungen rationale Functionen einer und derselben Lösung x_1 dieser Gleichung sind, wenn diese rationalen Abhängigkeiten vertauschbar d. h. so beschaffen sind, dass, wenn $\varphi(x_1)$ und $\psi(x_1)$ 2 andere Lösungen der vorgelegten Gleichung sind, die Beziehung:

$$\varphi[\psi(x_1)] = \psi[\varphi(x_1)]$$

stattfindet.

Diese Kriterien der algebraischen Auflösbarkeit will ich nun auf einige Classen von algebraischen Gleichungen 6. Grades anwenden, indem ich für die rationalen Functionen bestimmte Annahmen treffe und dann die Bedingungen, die sich daraus für die Coefficienten ergeben, ableite.

I.

Es seien $x_1, x_2 \ldots x_6$ die Lösungen einer Gleichung 6. Grades, und zwar seien $x_2, x_3 \ldots x_6$ rationale Functionen von x_1 von der einfachen Beschaffenheit, dass:

$$x_2 = \frac{c}{b}x_1, \quad x_3 = \frac{d}{b}x_1, \quad x_4 = \frac{c}{a}x_1, \quad x_5 = \frac{d}{a}x_1 \quad \text{und} \quad x_6 = \frac{cd}{ab}x_1$$

ist, wobei a, b, c, d constante Grössen bezeichnen mögen, so haben diese rationalen Functionen die geforderte Eigenschaft der Vertauschbarkeit,, folglich wird sich jene Gleichung 6. Grades, die die angegebenen Grössen zu Wurzeln hat, algebraisch auflösen lassen. Macht man nun noch die Annahme, dass $x_1 = ab$ sei, so sieht man, dass die gegebene Gleichung in diesem Falle die Wurzeln:

$$ab, \quad ac, \quad ad, \quad bc, \quad bd \quad \text{und} \quad cd$$

besitzt; unter der Voraussetzung, dass a, b, c, d die Wurzeln einer Gleichung 4. Grades

$$x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$$

seien, hat also die vorgelegte Gleichung 6. Grades alle möglichen Combinationen zu zweien der Lösungen jener Gleichung 4. Grades zu ihren Lösungen, so dass diese bekannt sind, sobald man jene der Gleichung 4. Grades gefunden hat. Nun lässt sich aber jede Gleichung 4. Grades algebraisch auflösen, indem man mit Hülfe der linearen Function $y = x_1 - x_2 + x_3 - x_4$ ihrer Lösungen die Resolvente, die ich im Folgenden benutzen werde

$$z^3-(3p^2-8q)z^2+(3p^4-16p^2q+16q^2+16pr-64s)z-(-p^3+4pq-8r)^2=0,$$

wo $y = \sqrt{z}$ ist, bildet; hat nun diese die Lösungen z_1, z_2 und z_3, so ergeben sich als Lösungen der Gleichung 4. Grades die Werte:

$$x_1 = \frac{p + \sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}}{4} \qquad x_2 = \frac{p - \sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}}{4}$$

$$x_3 = \frac{p + \sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}}{4} \qquad x_4 = \frac{p - \sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}}{4}$$

folglich wird auch wirklich jene Gleichung 6. Grades von besagter Eigenschaft algebraisch auflösbar sein. Es handelt sich jetzt nur noch darum, die Bedingungen aufzustellen, dass eine Gleichung 6. Grades eben jene Combinationen zu zweien der Wurzeln einer Gleichung 4. Grades zu ihren Wurzeln habe. Zu diesem Zwecke will ich, von der Gleichung 4. Grades ausgehend, jene Gleichung 6. Grades bilden und berücksichtige dabei, dass ihre Coefficienten symmetrische Functionen von a, b, c, d sind, sich also durch die Coefficienten der Gleichung 4. Grades darstellen lassen. Auf diese Weise ergibt sich unter der Voraussetzung, dass die Gleichung

$$x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$$

die Wurzeln a, b, c, d habe, als Gleichung 6. Grades mit den Wurzeln ab, ac ... cd

$$x^6 - qx^5 + (pr - s)x^4 - (p^2s + r^2 - 2qs)x^3 + (pr - s)sx^2 - qs^2x + s^3 = 0$$

Wie man sieht, ergeben sich also für die allgemeine Gleichung 6. Grades

$$x^6 - p_1x^5 + p_2x^4 - p_3x^3 + p_4x^2 - p_5x + p_6 = 0$$

die Bedingungen:

$$\frac{p_5}{p_1} = \sqrt[3]{p_6^2} \quad \text{und} \quad \frac{p_4}{p_2} = \sqrt[3]{p_6}.$$

Man kann also sagen jede Gleichung 6. Grades von der Form:

$$(1) \qquad x^6 - p_1x^5 + p_2x^4 - p_3x^3 + p_2\sqrt[3]{p_6}x^2 - p_1\sqrt[3]{p_6^2}x + p_6 = 0$$

ist algebraisch auflösbar; man braucht eben nur die 4 Coefficienten jener Gleichung 4. Grades zu bestimmen, welche auf die angegebene Weise zu den Lösungen dergelegten Gleichung 6. Grades führt, und die ich der Kürze halber „die zugehörige" Gleichung 4. Grades nennen will. Zu dieser Bestimmung dienen die 4 Gleichungen:

$$\begin{aligned} q &= p_1 \\ pr - s &= p_2 \\ p^2s + r^2 - 2bqs &= p_3 \\ s^3 &= p_6 \end{aligned}$$

Aus welchen sich ergiebt:

$$q = p_1 \quad s = \sqrt{p_6}$$

während die beiden anderen Coefficienten p und r sich aus den beiden Bedingungsgleichungen:

$$pr = p_2 + \sqrt[3]{p_6}$$
$$p^2 \sqrt{p_6} + r^2 = p_3 + 2p_1 \sqrt[3]{p_6}$$

ergeben. Mithin ist die zugehörige Gleichung 4. Grades bekannt, somit auch die Lösungen der vorgelegten Gleichung 6. Grades (1), indem man nur die Lösungen jener Gleichung 4. Grades zu je zweien mit einander multiplicirt.

Doch ist zu berücksichtigen, dass die beiden Bedingungsgleichungen in p und r für diese Coefficienten je 4 Werte liefern, da man durch Elimination von r in p die biquadratische Gleichung:

$$p^4 \sqrt[3]{p_6} - (p_3 + 2p_1 \sqrt[3]{p_6})p^2 + (p_2 + \sqrt[3]{p_6})^2 = 0$$

erhält, welche von der Form

$$p^4 - 2mp^2 + n^2 = 0$$

ist, wo m und n bekannte Functionen der Coefficienten der vorgelegten Gleichung sind. Es ergeben sich also für p die 4 Werte:

$$p' = \sqrt{m + \sqrt{m^2 - n^2}} \qquad p'' = -\sqrt{m + \sqrt{m^2 - n^2}} = -p'$$
$$p''' = \sqrt{m - \sqrt{m^2 - n^2}} \qquad p^{IV} = -\sqrt{m - \sqrt{m^2 - n^2}} = -p'''$$

Die entsprechenden Werte für r sind dann, wie leicht zu sehen:

$$r' = p_3 \sqrt[6]{p_6} \qquad r'' = -p_3 \sqrt[6]{p_6} = -r'$$
$$r''' = p_1 \sqrt[6]{p_6} \qquad r^{IV} = -p_1 \sqrt[6]{p_6} = -r'''.$$

Wir erhalten demnach zur vorgelegten Gleichung 6. Grades 4 zugehörige Gleichungen 4. Grades

$$x^4 - p' x^3 + qx^2 - r' x + s = 0$$
$$x^4 + p' x^3 + qx^2 + r' x + s = 0$$
$$x^4 - p''' x^3 + qx^2 - r''' x + s = 0$$
$$x^4 + p''' x^3 + qx^2 + r''' x + s = 0$$

Es ist nun zu zeigen, dass es ganz gleichültig ist, welche von diesen Gleichungen man zur weiteren Rechnung benutzt; jede dieser Gleichungen gibt in ihren 4 Wurzeln Grössen, welche immer zu je zweien mit einender multiplicirt dieselben 6 Producte nur in verschiedener Reihenfolge ergeben. Dass die beiden ersten Gleichungen für sich

diese Eigenschaft besitzen, ersieht man leicht daraus, dass beide dieselbe Resolvente besitzen, weil sich jene beiden Gleichungen nur dadurch unterscheiden, dass die Coefficienten p' und r' in der 2ten die entgegengesetzten Zeichen haben als in der ersten, und die Resolvente nur Glieder von geradem Grade in p und r enthält, mithin ergeben sich für z_1, z_2, z_3 in beiden Fällen dieselben Werte. Da aber

$$\sqrt{z_1}\cdot\sqrt{z_2}\cdot\sqrt{z_3} = -p^3+4pq-8r$$

ist, welcher Ausdruck für beide Gleichungen von entgegengesetztem Zeichen ist, so wird bei der Bestimmung der Lösungen beider Gleichungen 4. Grades bei der 2ten Gleichung nur für $\sqrt{z^3}$ der entgegengesetzt bezeichnete Wert zu nehmen sein; es werden also die beiden ersten der Gleichungen 4. Grades resp. folgende Lösungen haben:

$$a = \frac{p'+\sqrt{z_1}+\sqrt{z_2}+\sqrt{z_3}}{4} \qquad b_I = \frac{p'-\sqrt{z_1}-\sqrt{z_2}+\sqrt{z_3}}{4}$$

$$c = \frac{p'+\sqrt{z_1}-\sqrt{z_2}+\sqrt{z_3}}{4} \qquad d = \frac{p'-\sqrt{z_1}+\sqrt{z_2}-\sqrt{z_3}}{4}$$

$$a' = \frac{-p'+\sqrt{z_1}+\sqrt{z_2}-\sqrt{z_3}}{4} \qquad b' = \frac{-p'-\sqrt{z_1}-\sqrt{z_2}-\sqrt{z_3}}{4}$$

$$c' = \frac{-p'+\sqrt{z_1}-\sqrt{z_2}-\sqrt{z_3}}{4} \qquad d' = \frac{-p'-\sqrt{z_1}+\sqrt{z_2}+\sqrt{z_3}}{4}$$

die Producte zu je zweien sind aber, wie man sich leicht überzeugen kann, in beiden Fällen dieselben. Ebenso verhält es sich mit den beiden letzten Gleichungen 4. Grades für sich. Man kann aber auch leicht zeigen, dass alle 4 Gleichungen die angegebene Eigenschaft haben müssen. Sind nämlich a_k, b_k, c_k, d_k die Lösungen derselben, wobei man resp. für $k = 1, 2, 3, 4$ zu setzen hat, je nachdem sie Lösungen der 1., 2., 3. oder 4. Gleichung bezeichnen, so gilt allgemein:

$$\begin{aligned}
&a_kb_k+a_kc_k+a_kd_k+b_kc_k+b_kd_k+c_kd_k = q\\
&(a_kb_k)(a_kc_k)+\ldots+(b_kd_k)(c_kd_k) = pr-s\\
&(a_kb_k)(a_kc_k)(a_kd_k)+\ldots = p^2s+r^2-2sq\\
&(a_kb_k)(a_kc_k)(a_kd_k)(b_kc_k)+\ldots = (pr-s)s\\
&(a_kb_k)(a_kc_k)(a_kd_k)(b_kc_k)(b_kd_k)+\ldots = qs^2\\
&(a_kb_k)(a_kc_k)(a_kd_k)(b_kc_k)(b_kd_k)(c_kd_k) = s^3
\end{aligned}$$

für alle 4 Gleichungen, wobei nach dem vorigen die rechten Seiten eindeutig bestimmt sind, also ergeben sich für die Producte $(ab).(cd)$ für alle 4 Gl. dieselben Werte.

Ich will nun noch die gewonnenen Resultate auf eine vorgelegte Zahlengleichung 6. Grades, welche den geforderten Bedingungen genügt, anwenden und dieselbe wirklich auflösen.

Es sei gegeben:

$$x^6 + 7x^5 - 7x^4 - 91x^3 - 42x^2 + 252x + 216 = 0$$

bei derselben ist

$$\frac{p_5}{p_1} = \sqrt[3]{p_6^2} \quad \text{und} \quad \frac{p_4}{p_2} = \sqrt[3]{p_6},$$

mithin die Gleichung nach der angegebenen Methode auflösbar. Wir erhalten zur Bestimmung der Coefficienten der zugehörigen Gleichung 4. Grades folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} q &= -7 \\ pr - s &= -7 \\ p^2 s + r^2 - 25q &= 91 \\ s^3 &= 216 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} q = -7 \quad s &= 6 \\ pr &= -1 \\ 6p^2 + r^2 &= 7 \end{aligned}\right\}$$

also ergibt sich für p die Gleichung

$$6p^4 - 7p^2 + 1 = 0$$

folglich

$$p' = -1, \quad p'' = +1, \quad p''' = -\sqrt{\tfrac{1}{6}}, \quad p^{\prime V} = +\sqrt{\tfrac{1}{6}}$$

mithin

$$r' = +1, \quad r'' = -1, \quad r''' = +\sqrt{6}, \quad r^{\prime V} = -\sqrt{6}$$

also erhält man die beiden ganz verschiedenen zugehörigen Gleichungen:

1) $$x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = 0$$

welche die Lösungen

$$a = 1, \quad b = -2, \quad c = 3, \quad d = -1$$

besitzt, die für die vorgelegte Gleichung 6. Grades die Lösungen: $-2, +3, -1, -6, +2, -3$ ergeben.

2) $$x^4 - \sqrt{\tfrac{1}{6}}x^3 - 7x^2 + \sqrt{6}x + 6 = 0$$

welche die Lösungen

$$a = \sqrt{6}, \quad b = -\sqrt{6}, \quad c = -\frac{2}{\sqrt{6}}, \quad d = \frac{3}{\sqrt{6}}$$

besitzt, und welche dieselben Wurzeln der vorgelegten Gleichung 6. Grades geben.

II.

Es sei ferner:

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 - (b-c) \\ x_3 &= x_1 - (b-d) \\ x_4 &= x_1 - (a-c) \\ x_5 &= x_1 - (a-d) \\ x_6 &= x_1 - (a+b-c-d), \end{aligned}$$

wo a, b, c, d constante Grössen bedeuten, so sind auch diese rationalen Abhängigkeiten von der Beschaffenheit, dass sie vertauschbar sind, also wird auch jene Gleichung 6. Grades, die $x_1, x_2 \dots x_6$ zu Wurzeln hat, algebraisch auflösbar sein. Ist nun ausserdem $x_1 = a+b$, so sieht man, dass die betreffende Gleichung 6. Grades die Lösungen

$$a+b, \quad a+c, \quad a+d, \quad b+c, \quad b+d, \quad c+d$$

hat, und setzt man ferner wie im vorigen Falle voraus, dass a, b, c und d die Lösungen einer Gleichung 4. Grades seien, so erkennt man, dass dann die Wurzeln der Gleichung 6. Grades aus ihnen gefunden werden, wenn man je 2 derselben addirt. Ist also umgekehrt eine Gleichung 6. Grades gegeben, welche der Bedingung genügt, dass ihre Lösungen erhalten werden, wenn man immer je 2 von 4 constanten Grössen addirt, so hat man nur die zugehörige Gleichung 4. Grades aufzustellen, welche eben jene 4 Grössen zu Wurzeln hat. Es kommt also wieder nur darauf an, die Bedingungen dafür aufzustellen, dass die Gleichung 6. Grades Wurzeln besitze, die zu denen einer gegebenen Gleichung 4. Grades in den angegebenen Beziehungen stehen. Die Coefficienten der ersteren werden symmetrische Functionen von a. b, c, d sein, also rational durch die Coefficienten der Gleichung 4. Grades

$$x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$$

ausdrückbar, und zwar wird jene Gleichung 6. Grades lauten:

$$\begin{aligned} (2) \quad & x^6 - 3px^5 + (3p^2+2q)x^4 - (p^3+4pq)x^3 + (2p^2q+q^2+pr-4s)x^2 \\ & -(pq^2+p^2r-4ps)x + (pqr-r^2-p^2s) = 0 \end{aligned}$$

Ist also allgemein eine Gleichung 6. Grades:

$$(3) \qquad x^6 - p_1x^5 + p_2x^4 - p_3x^3 + p_4x^2 - p_5x + p_6 = 0$$

gegeben, und will man die zugehörige Gleichung 4. Grades aufstellen, so erhält man zur Bestimmung der 4 Coefficienten derselben durch Gleichsetzung der entsprechenden Coefficienten in (2) und (3) 6 Bedingungsgleichungen, folglich müssen, wenn die Aufgabe bestimmt

sein soll, zwischen den Coefficienten der gegebenen Gleichung (3) 2 Bedingungen stattfinden, die sich aus den 6 Gleichungen:

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} 3p &= p_1 \\ 3p^2+2q &= p_2 \\ p^3+4pq &= p_3 \\ 2p^2q+q^2+pr-4s &= p_4 \\ pq^2+p^2r-4ps &= p_5 \\ pqr-r^2-p^2s &= p_6 \end{aligned}\right.$$

durch Elimination von p, q, r, s in der Form:

$$p_3 = \frac{p_1}{3}\cdot\frac{18p_2-5p_1^2}{9}$$

$$p_4 = \frac{3p_5}{p_1}+\frac{p_1^2}{9}\;\frac{3p_2-p_1^2}{3}$$

ergeben. Sobald also für die vorgelegte Gleichung 6. Grades diese beiden Bedingungen erfüllt erscheinen, lässt sich dieselbe algebraisch auflösen, indem man aus den beiden ersten und letzten der Gleichungen (4) die Coefficienten p, q, r, s der zugehörrigen Gleichung 4. Grades bestimmt; dann braucht man nur diese aufzulösen und erhält in den Summen je zweier derselben die Lösungen der vorgelegten Gleichung. Bei der Bestimmung von r und s erhält man für dieselben 2 Werte, also auch 2 zugehörige Gleichungen 4. Grades, eine ganz ähnliche Betrachtung wie im ersten Falle zeigt aber, dass es auch hier gleichgültig ist, welche von beiden man zur weiteren Rechnung benutzt.

Wie man sieht, ergeben sich in diesem Falle keine so einfachen Bedingungen wie im ersten; ich will deshalb auf auf anderem Wege unter Benutzung der bisherigen Resultate, eine Reihe von Gleichungen 6. Grades aufstellen, die sich algebraisch auflösen lassen, indem ich von der Gleichueg 4. Grades ausgehe und voraussetze:

$$1)\qquad p^2 = -4q,$$

dann ist $p_3 = 0$; und wir erhalten einen speciellen Fall des allgemeinen; es erscheinen die beiden Bedingungen in der Form:

$$p_2 = \frac{5p_1^2}{18},\quad p_5 = \frac{p_1}{3}\left[p_4+\frac{p_1^4}{162}\right] = \frac{p_1}{3}\left[p_4+\frac{1}{2}\left(\frac{p_1}{3}\right)^4\right],$$

so dass man also sagen kann: Jede Gleichung 6. Grades von der Form

$$(5)\qquad x^6-p_1x^5+\frac{5}{2}\left(\frac{p_1}{3}\right)^2x_4+p_4x^2-\frac{p_1}{3}\left[p_1+\frac{1}{2}\left(\frac{p_1}{3}\right)^4\right]x+p_6=0$$

ist algebraisch auflösbar, indem man zuerst die zugehörige Gleichung 4. Grades

$$x^4-px^3+qx^2-sx+s=0,$$

wobei

$$p=\frac{p_1}{3},\qquad q=-\frac{p_1^2}{36}$$

ist, und r, s aus den beiden Gleichungen

$$p(q^2+pr-4s)=p_5=\frac{p_1}{3}\left[p_4+\frac{1}{2}\left(\frac{p_1}{3}\right)^4\right]$$

$$pqr-r^2-p^2s=p_6$$

folgen, auflöst und ihre Wurzeln durch Addition zu je zweien verbindet.

Die Gleichung (5) kann man übrigens, wie leicht zu sehen, auch die Form:

$$(6)\qquad x^6-p_1x^5+\frac{5}{2}\left(\frac{p_1}{3}\right)^2x^4+\left[\frac{3p_5}{p_1}-\frac{1}{2}\left(\frac{p_1}{3}\right)^4\right]x^2-p_5x+p_6=0$$

geben. Ein sehr interessanter Fall ergibt sich aus (5), wenn man voraussetzt, dass $p_4=0$ sei; man erhält dann das Resultat, dass jede Gleichung 6. Grades von der Form:

$$(7)\qquad x^6-p_1x^5+\frac{5}{2}\left(\frac{p_1}{3}\right)^2x^4-\frac{1}{2}\left(\frac{p_1}{3}\right)^4x^2+p_6=0$$

algebraisch auflösbar ist. Ebenso ergibt sich aus (6) für die Specialisirung $p_5=0$ die algebraisch auflösbare Gleichung 6. Grades:

$$(8)\qquad x^6-p_1x^5+\frac{5}{2}\left(\frac{p_1}{3}\right)^2x^4-\frac{1}{2}\left(\frac{p_1}{3}\right)^4x^2+p_6=0$$

Die Auflösung der Gleichungen (7) und (8) geschieht ebenso wie jene der allgemeineren Gleichungen (5) und (6).

2) $q=0$.

Diese Voraussetzung gibt für die Gleichung 6. Grades die Bedingungen in der Form:

$$p_2=\frac{p_1^2}{3},\quad p_3=\frac{p_1^3}{27},\quad p_5=\frac{p_1p_4}{3}.$$

Also lässt sich die Gleichung 6. Grades

$$(9)\qquad x^6-p_1x^5+\frac{p_1^2}{3}x^4-\frac{p_1^3}{27}x^3+p_4x^2-\frac{p_1p_4}{3}x+p_6=0$$

algebraisch auflösen, indem man die zugehörige Gleichung 4. Grades

$$x^4 - px^3 - rx + s = 0$$

bildet, wobei $p = \frac{p_1}{3}$ ist, während sich r und s aus den beiden Gleichungen:

$$pr - 4s = p_4$$
$$-r^2 - p^2 s = p_6$$

ergeben. Für $p_4 = 0$ ergiebt sich aus (9) der interessante specielle Fall einer algebraisch auflösbaren Gleichung:

$$x^6 - p_1 x^5 + \frac{p_1^2}{3} x^4 - \frac{p_1^3}{27} x^3 + p_6 = 0. \tag{10}$$

3) $r = 0$.

In diesem Falle kommt man leicht zu dem Resultate, dass jede Gleichung 6. Grades von der Form:

$$x^6 - p_1 x^5 + p_2 x^4 - \frac{p_1}{3}\left[2p_2 - 5\left(\frac{p_1}{3}\right)^2\right] x^3 + p_4 x^2 \tag{11}$$
$$-\frac{p_1}{3}\left[p_4 - p_2\left(\frac{p_1}{3}\right)^2 + 3\left(\frac{p_1}{3}\right)^4\right] x + \frac{p_1^2}{36}\left[p_4 + \left(\frac{p_1}{3}\right)^2 \frac{p_2}{2} + \frac{3}{4}\left(\frac{p_1}{3}\right)^4 - \frac{p_2^2}{4}\right] = 0$$

algebraisch auflösbar ist, indem man die zugehörige Gleichung 4. Grades:

$$x^4 - px^3 + qx^2 + s = 0$$

bildet, wobei

$$p = \frac{p_1}{3}, \quad q = \frac{3p_2 - p_1^2}{6}, \quad s = \frac{2p^2 q + q^2 - p_4}{4}$$

ist. Setzt man in (11) $p_2 = 0$ und $p_4 = 0$, so erhält man den speciellen Fall der algebraisch auflösbaren Gleichung 6. Grades:

$$x^6 - p_1 x^5 + 5\left(\frac{p_1}{3}\right)^3 x^3 - 3\left(\frac{p_1}{3}\right)^5 x + \frac{1}{6}\left(\frac{p_1}{3}\right)^6 = 0. \tag{12}$$

In dem Falle endlich, in welchem man voraussetzt, dass

4) $q = 0$ und $r = 0$

sei, ergibt sich durch eine einfache Substitution das Resultat, dass jede Gleichung 6. Grades von der Form:

$$x^6 - p_1 x^5 + \frac{p_1^2}{3} x^4 - \frac{p_1^3}{27} x^3 + p_4 x^2 - \frac{p_1 p_4}{3} x + \frac{p_1^2 p_4}{36} = 0 \tag{13}$$

algebraisch auflösbar ist, indem man die zugehörige Gleichung 4. Grades

$$x^4 - px^3 + s = 0$$

bildet, wobei

$$p = \frac{p_1}{3}, \quad s = -\frac{p_4}{4}$$

ist, dieselbe auflöst und die Wurzeln zu je zweien addirt.

Die Gleichung (13) ist aber nur ein specieller Fall der Glei- (9) und wird erhalten, wenn man in dieser $p_6 = \frac{p_1^2 p_4}{36}$ setzt, in welchem Falle sich aber die Rechnung sehr vereinfacht.

Ich will nun noch zum Schlusse eine Zahlengleichung, welche den Bedingungen der Gleichung (9) genügt, annehmen, dieselbe wirkauflösen und zeigen, dass es gleichgültig ist, welche von den beiden zugehörigen Gleichungen 4. Grades man benutzt.

Es sei jene Gleichung 6. Grades von der Form (9):

$$x^6 - 12x^5 + 48x^4 - 64x^3 - 20x^2 + 80x - 25 = 0$$

so ist

$$p = \frac{p_1}{3} = 4$$

und

$$\left.\begin{array}{r} pr - 4s = -20 \\ -r^2 - ps = -25 \end{array}\right\} \text{ oder } \begin{array}{r} 4r - 4s = -20 \\ -r^2 - 16s = -25 \end{array}$$

folglich ist

$$r^2 + 16r + 55 = 0$$

also

$$r_1 = -11, \quad r_2 = -5$$

und die entsprechenden Werte von s sind:

$$s_1 = -6, \quad s_2 = 0$$

Wir erhalten also die folgenden zugehörigen Gleichungen:

1) $$x^4 - 4x^3 + 11x - 6 = 0$$

mit den Wurzeln:

$$a = 3, \quad b = 2, \quad c = -\tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{5}), \quad d = -\tfrac{1}{2}(1 - \sqrt{5}),$$

welche also als Wurzeln der vorgelegten Gleichung die folgenden ergeben:

$$5, \quad \tfrac{1}{2}(5 - \sqrt{5}), \quad \tfrac{1}{2}(5 + \sqrt{5}), \quad \tfrac{1}{2}(3 - \sqrt{5}), \quad \tfrac{1}{2}(3 + \sqrt{5}) \quad \text{und} \quad -1$$

2) $$x^4 - 4x^3 + 5x = 0$$

mit den Wurzeln:

$$a = 0, \quad b = -1, \quad c = \tfrac{1}{2}(5 + \sqrt{5}), \quad d = \tfrac{1}{2}(5 - \sqrt{5}),$$

welche für die Gleichung 6. Grades, wie dies auch sein muss, dieselben 6 Wurzeln ergeben.

XXI.

Ueber Flächen mit gegebener Mittelpunktsfläche und über Krümmungsverwandtschaft*).

Von

F. August.

Bekanntlich liegen die beiden Hauptkrümmungsmittelpunkte M_1 und M_2 eines beliebigen Punktes P einer Fläche (P) auf zwei Flächen, welche man die beiden Mittelpunktsflächen (M_1) und (M_2) der Fläche (P) nennt, und welche mit den beiden Schaaren von Krümmungslinien so zusammenhängen, dass die Normalen der Fläche in zwei benachbarten Punkten einer Krümmungslinie der einen Schaar sich auf (M_1), die der andern sich auf (M_2) schneiden. Man kann die Flächen (M_1) und (M_2) als die zur ersten, bezw. zweiten Schaar von Krümmungslinien gehörige Evolutenfläche von (P) und umgekehrt die Fläche (P) nebst ihren Parallelen eine Evolventenfläche der Flächen (M_1) und (M_2) nennen. Die Normale in (P) ist Tangente von (M_1) und (M_2), und jeder Krümmungslinie von (P) entspricht auf der zugehörigen Evolutenfläche eine kürzeste Linie. Es ist nun die Aufgabe der nachfolgenden Arbeit die der Aufsuchung der Evolventenflächen zu einer gegebenen Fläche (M_1).

---

*) Dieser Aufsatz und der Nr. XVIII., welche beide zunächst dieselbe Frage untersuchen, sind infolge einer im Gespräch erhaltenen gemeinsamen Anregung von beiden Verfassern ohne Verabredung gleichzeitig bearbeitet worden. Ungeachtet mehrfach übereinstimmender Ergebnisse wird es die Verschiedenheit der Auffassungs- und Behandlungsweise und des weiteren Ganges der Untersuchung wol rechtfertigen, dass beide Arbeiten hier neben einander veröffentlicht werden. Die Red.

Was die Bezeichnung anbetrifft, so bin ich ganz der in der Flächentheorie des Herrn Hoppe gewählten gefolgt.

Sind uv die Parameter, durch welche ein Punkt P der Fläche (P) gegeben ist, so bezeichne ich nach Herrn Hoppe die Fundamentalgrössen erster Ordnung folgendermassen:

$$e = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$$

$$f = \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$g = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$$

Ferner ist $t^2 = (eg - f^2)$ und p, q, r sind die Richtungscosinus der Normale, so dass

$$pt = \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} \text{ etc.}$$

Endlich sind die Fundamentalgrössen zweiter Ordnung

$$E = p\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + q\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + r\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$$

$$F = p\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + q\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + r\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}$$

$$G = p\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + q\frac{\partial^2 y}{\partial v^2} + r\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

Für die Flächen (M_1) und (M_2) sollen die entsprechenden Grössen durch dieselben Buchstaben mit den Indices 1 respective 2 bezeichnet werden.

1. Aufsuchung der Evolventenflächen.

Es seien $x_1 y_1 z_1$ die rechtwinkligen Coordinaten des Punktes M_1 der Fläche (M_1), als Functionen der Parameter u und v gegeben. Der Fall, wo $x_1 y_1 z_1$ nur von einer Variablen abhängen, wird im 9. und den folgenden Abschnitten behandelt, hier aber ausgeschlossen. Dann sind

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x_1 + \varrho\alpha \\ \eta &= y_1 + \varrho\beta \\ \zeta &= z_1 + \varrho\gamma, \quad \text{wo } \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \end{aligned}\right\} \qquad \text{I.}$$

die Coordinaten eines Punktes Q, welcher im Abstande ϱ von M_1 so liegt, dass MQ die Richtungscosinus $\alpha\beta\gamma$ hat. Sind $\alpha\beta\gamma$ Functionen von u und v, während ϱ unbestimmt bleibt, so charakterisiren

die Gleichungen I. ein Strahlensystem in der Art, dass jedem Parametersystem uv ein Strahl entspricht. Ist auch ϱ als Function von u und v bestimmt, so ist der Ort von Q eine Fläche (Q), und die Fläche (M_1) und (Q) sind durch die Strahlen des bezeichneten Strahlensystems oder durch die Parameter uv auf einander abgebildet. Soll nun jenes Strahlensystem ein Normalensystem sein, so muss sich ϱ so bestimmen lassen, dass $\alpha d\xi + \beta d\eta + \gamma d\zeta = 0$ ist. Also, mit Rücksicht auf I.

$$\alpha dx_1 + \beta dy_1 + \gamma dz_1 + d\varrho = 0. \qquad \text{II.}$$

Also muss $\alpha dx_1 + \beta dy_1 + \gamma dz_1$ ein vollständiges Differential sein, woraus die bekannte Bedingung folgt:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial u}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial v} + \frac{\partial\beta}{\partial u}\cdot\frac{\partial y_1}{\partial v} + \frac{\partial\gamma}{\partial u}\cdot\frac{\partial z_1}{\partial v} = \frac{\partial\alpha}{\partial v}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial u} + \frac{\partial\beta}{\partial v}\cdot\frac{\partial y_1}{\partial u} + \frac{\partial\gamma}{\partial v}\cdot\frac{\partial z_1}{\partial u} \qquad \text{III.}$$

Wir wollen nun das Strahlensystem so wählen, dass der Strahl durch M_1 Tangente der Parametercurve $v = \text{const}$ auf (M_1) ist. Da allgemein

$$ds_1^2 = e_1 du^2 + 2 f_1 du dv + g_1 dv^2$$

ist, so ergeben sich die Richtungscosinus der Tangente der Curve $v = \text{const}$:

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{e_1}}\frac{\partial x_1}{\partial u}, \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{e_1}}\frac{\partial y_1}{\partial u}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{e_1}}\frac{\partial z_1}{\partial u}, \qquad \text{IV.}$$

also

$$\frac{\partial\alpha}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{e_1}}\frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2} - \frac{1}{2\sqrt{e_1^3}}\frac{\partial e_1}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial u},$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{e_1}}\frac{\partial^2 x_1}{\partial u\partial v} - \frac{1}{2\sqrt{e_1^3}}\frac{\partial e_1}{\partial v}\frac{\partial x_1}{\partial v}, \text{ und die Analogen.}$$

Soll nun dio Fläche (M_1) Mittelpunktsfläche von einer Fläche (P) sein, und nehmen wir zu Parameterlinien diejenigen Curven, welche auf (M_1) der Schaar der Krümmungslinien entsprechen, so müssen ihre Tangenten ein Normalensystem bilden; wir haben also nur die Werte $\frac{\partial\alpha}{\partial u}, \frac{\partial\alpha}{\partial v}$ u. s. w. in die Gleichung III. einzusetzen, um die verlangte Bedingung zu erhalten. Dann folgt

$$\frac{1}{\sqrt{e_1}}\left(\frac{\partial f_1}{\partial u} - \tfrac{1}{2}\frac{\partial e_1}{\partial v}\right) - \frac{f_1}{2\sqrt{e_1^3}}\frac{\partial e_1}{\partial u} = 0. \qquad \text{V.}$$

Diese Bedingung sagt aus, dass die Parametercurven $v = \text{const.}$ geodätische sein müssen. (Vgl. Hoppe, Flächentheorie § 30). Ist diese Bedingung erfüllt, so findet man für ϱ einen Wert, den wir ϱ_1 nennen wollen, aus II., nämlich

also

$$\left.\begin{aligned} d\varrho_1 &= -\left(\sqrt{e_1}\,du + \frac{f_1}{\sqrt{e_1}}\,dv\right), \\ \varrho_1 &= -\int_{u_0}^{u} \sqrt{e_1}\,\partial u - \int_{u=u_0} f_1\,dv + k \end{aligned}\right\} \qquad \text{VI.}$$

wo u_0 und k beliebige Constante bedeuten, im ersten Integral v während des Integrirens als constanter Parameter betrachtet wird, während im zweiten $u = u_0$ gesetzt ist.

Den Punkt Q, welchen die Gleichungen I. unter Voraussetzung von IV. und VI. ergeben, bezeichnen wir mit P. Dann ist für jeden Wert von k der Ort von P eine Evolventenfläche (P) von (M_1), für einen anderen Wert von k eine parallele Fläche, und ϱ_1 der eine Krümmungsradius in P. Die Coordinaten von P sind also:

$$x = x_1 + \frac{\varrho_1}{\sqrt{e_1}} \frac{\partial x_1}{\partial u} \text{ und die Analogen.} \qquad \text{VII.}$$

Das Resultat der bisherigen Untersuchung lässt sich so aussprechen:

Die Tangenten jeder Schaar Kürzester der Fläche (M_1) bilden ein Normalensystem, und es entspricht jeder Schaar Kürzester auf (M_1) ein System paralleler Flächen (P), welche die Fläche (M_1) so zur gemeinsamen Mittelpunktsfläche haben, dass die Normalen längs des einen Systems ihrer Krümmungslinien die Tangenten der gegebenen Schaar Kürzester der Fläche (M_1) sind.

2. Aufsuchung der zweiten Mittelpunktsfläche.

Wir bestimmen nun die zweite Mittelpunktsfläche (M_2) von (P), unter Voraussetzung der Gleichungen V. und VI. Die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= x_1 + w\frac{\partial x_1}{\partial u} \qquad \varrho_0 = w\sqrt{e_1} \\ y_2 &= y_1 + w\frac{\partial y_1}{\partial u} \\ z_2 &= z_1 + w\frac{\partial z_1}{\partial u} \end{aligned}\right\}$$

stellen bei beliebig variirendem w einen beliebigen Punkt der Tangente der geodätischen Parameterlinie $v =$ const dar, und ϱ_0 ist die Entfernung des Punktes $x_2 y_2 z_2$ von M_1. Die zweite Mittelpunktsfläche ist der Ort der Punkte, wo eine solche Tangente von einer Nachbartangente geschnitten wird, während die Berührungspunkte

nicht derselben Parameterlinie angehören, sondern benachbarten. Wir haben also in VII. w und du und dv so zu bestimmen, dass $dx_2 = 0$, $dy_2 = 0$, $dz_2 = 0$, aber mit Ausschluss der Lösung $dv = 0$, welche auf den Punkt M_1 zurückführen würde.

Man erhält so zunächst die Bedingungen:

$$\left.\begin{aligned} dx_1 + w\, d\frac{\partial x_1}{\partial u} + \frac{\partial x_1}{\partial u} dw = 0 \\ dy_1 + w\, d\frac{\partial y_1}{\partial u} + \frac{\partial y_1}{\partial u} dw = 0 \\ dz_1 + w\, d\frac{\partial z_1}{\partial u} + \frac{\partial z_1}{\partial u} dw = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{VIII.}$$

Die Elimination von w und dw ergiebt:

$$\begin{vmatrix} dx_1, & d\frac{\partial x_1}{\partial u}, & \frac{\partial x_1}{\partial u} \\ dy_1, & d\frac{\partial y_1}{\partial u}, & \frac{\partial y_1}{\partial u} \\ dz_1, & d\frac{\partial z_1}{\partial u}, & \frac{\partial z_1}{\partial u} \end{vmatrix} = 0,$$

oder

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u} du + \frac{\partial x_1}{\partial v} dv, & \frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2} du + \frac{\partial^2 x_1}{\partial u \partial v} dv, & \frac{\partial x_1}{\partial u} \\ \frac{\partial y_1}{\partial u} du + \frac{\partial y_1}{\partial v} dv, & \frac{\partial^2 y_1}{\partial u^2} du + \frac{\partial^2 y_1}{\partial u \partial v} dv, & \frac{\partial y_1}{\partial u} \\ \frac{\partial z_1}{\partial u} du + \frac{\partial z_1}{\partial v} dv, & \frac{\partial^2 z_1}{\partial u^2} du + \frac{\partial^2 z_1}{\partial u \partial v} dv, & \frac{\partial z_1}{\partial u} \end{vmatrix} = 0,$$

oder, wenn nach Potenzen von du und dv geordnet wird,

$$t_1 dv [E_1 du + F_1 dv] = 0$$

Dies giebt einmal die singuläre Lösung $t_1 = 0$, welche im Allgemeinen nicht stattfinden kann, sondern nur in bestimmten Punkten; über diese wird unter (4) das Nähere besprochen werden.

Die Lösung $dv = 0$ haben wir bereits ausgeschlossen. Es bleibt aber noch die Bedingung

$$E_1 du + F_1 dv = 0, \qquad \text{IX.}$$

und unter Voraussetzung derselben ist aus den Gleichungen VIII. w und ϱ_0 zu bestimmen. Die beiden letzten Gleichungen VIII. können so geschrieben werden:

$$\frac{\partial y_1}{\partial v} dv + w\left(\frac{\partial^2 y_1}{\partial u^2} du + \frac{\partial^2 y_1}{\partial u \partial v} dv\right) + (dw + du)\frac{\partial y_1}{\partial u} = 0,$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial v}dv + w\left(\frac{\partial^2 z_1}{\partial u^2}du + \frac{\partial^2 z_1}{\partial u \partial v}dv\right) + (dw + du)\frac{\partial z_1}{\partial u} = 0,$$

und die Elimination von $(dw+du)$ ergiebt

$$w\left[\left(\frac{\partial^2 y_1}{\partial u^2}\,\frac{\partial z_1}{\partial u} - \frac{\partial^2 z_1}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial y_1}{\partial u}\right)du + \left(\frac{\partial^2 y_1}{\partial u \partial v}\cdot\frac{\partial z_1}{\partial u} - \frac{\partial^2 z_1}{\partial u \partial v}\cdot\frac{\partial y_1}{\partial u}\right)dv\right] = p_1 t_1 dv.$$

Wir multipliciren diese Gleichung mit

$$\frac{\partial y_1}{\partial u}\cdot\frac{\partial z_1}{\partial v} - \frac{\partial z_1}{\partial u}\cdot\frac{\partial y_1}{\partial v} = p_1 t_1,$$

bilden die beiden Analogen durch cyklische Vertauschung von $x_1 y_1 z_1$ und addiren. Dann kommt nach einiger Rechnung:

$$w\left[\left(\tfrac{1}{2}f_1\frac{\partial e_1}{\partial u} - e_1\left(\frac{\partial f_1}{\partial u} - \tfrac{1}{2}\frac{\partial e_1}{\partial v}\right)\right)du + \left(\tfrac{1}{2}f_1\frac{\partial e_1}{\partial v} - \tfrac{1}{2}e_1\frac{\partial g_1}{\partial u}\right)dv\right] = t_1^2 dv.$$

Wegen der Gleichung V. fällt das Glied mit du fort, alsdann kann durch dv dividirt werden, und wir erhalten:

$$\left.\begin{aligned} w &= \frac{2t_1^2}{f_1\frac{\partial e_1}{\partial v} - e_1\frac{\partial g_1}{\partial u}} \\ \varrho_0 &= \frac{2\sqrt{e_1}\,t_1^2}{f_1\frac{\partial e_1}{\partial v} - e_1\frac{\partial g_1}{\partial u}} \end{aligned}\right\} \qquad \text{X.}$$

Die Coordinaten des entsprechenden Punktes M_2 der zweiten Mittelpunktsfläche (M_2) sind also

$$x_2 = x_1 + \frac{2t_1^2}{f_1\frac{\partial e_1}{\partial v} - e_1\frac{\partial g_1}{\partial u}}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial u} \text{ und die Analogen,}$$

und der zweite Hauptkrümmungsradius von (P) ergiebt sich aus VI. und X.

$$\varrho_2 = (\varrho_1 - \varrho_0).$$

Die Gleichung IX. stellt auf (M_1) die Curven dar, welche der zweiten Schaar der Krümmungslinien von (P) entsprechen. Nun ist allgemein, wenn man die Werte von $\left(\frac{dv}{du}\right)$ für zwei conjugirte Richtungen in (M_1) mit k und k' bezeichnet,

$$E_1 + F_1(k+k') + G_1 kk' = 0.$$

Für $k' = 0$ geht diese Gleichung über in

$$E_1 + F_1 k = 0 \quad \text{d. h.}$$

$$E_1 du + F_1 dv = 0 \text{ ist conjugirt zu } dv = 0.$$

Die Gleichung IX. giebt also die der Richtung $dv = 0$ conjugirte Richtung an, wie dies auch leicht geometrisch aus bekannten Eigenschaften der conjugirten Richtungen gefolgert werden kann, und wir erhalten den Satz:

Den beiden Schaaren von Krümmungslinien auf (P) entsprechen auf jeder von beiden Mittelpunktsflächen (M_1) und (M_2) je eine Schaar Kürzester nebst der Schaar der sie in conjugirten Richtungen schneidenden Linien, und zwar wechselsweise.

Will man nun die ursprünglich gestellte Aufgabe allgemein lösen, so kann man folgendermassen verfahren:

Man nimmt eine Curve auf (M_1) ganz beliebig an, construirt in jedem ihrer Punkte die sie in conjugirter Richtung schneidende kürzeste Linie, und dann zu dieser Schaar Kürzester die Schaar der sie in conjugirten Richtungen schneidenden. Dann erhält man die beiden Curvenschaaren, welchen die Krümmungslinien derjenigen Flächen entsprechen, die zum Normalensystem das System der Tangenten jener Schaar Kürzester haben, und zur einen Mittelpunktsfläche die gegebene Fläche. Die gestellte Aufgabe hat also wesentlich so viel Lösungen, als sich Curven auf (M_1) durch irgend einen Punkt legen lassen, und die Auflösung des Problems ist auf die Aufsuchung einer Schaar Kürzester zurückgeführt.

Wenn wir jene beiden Schaaren als Parametercurven wählen, so sind die Bedingungen

$$e_1\left(2\frac{\partial f_1}{\partial u} - \frac{\partial e_1}{\partial v}\right) - f_1\frac{\partial e_1}{\partial u} = 0, \quad F_1 = 0,$$

und es sind die Parametercurven $v =$ const. geodätisch, die Curven $u =$ const. schneiden sie in conjugirten Richtungen. Das so beschaffene Parametersystem kann man für (M_1) ein geodätisch conjugirtes nennen. Jedem geodätisch conjugirten Parametersystem auf (M_1) entspricht also eine bestimmte Schaar (P) von Evolventenflächen der Fläche (M_1) und eine zu (M_1) conjugirte Mittelpunktsfläche (M_2), für welche die Curven $u =$ const. geodätisch und $v =$ const. dazu conjugirt sind; auf (P) sind dann die Parametercurven die Krümmungslinien.

Es empfiehlt sich aber noch mehr, als zweite Parameterlinien die Orthogonalen zu $v =$ const. zu wählen; dann können, wie in der Flächentheorie (Hoppe, § 30) gezeigt wird, die Parameter selbst so bestimmt werden, dass

$$e_1 = 1, \quad f_1 = 0, \quad g_1 = t_1^2 \tag{XI.}$$

wird. Man nennt dann die Parameter **orthogonal geodätisch**. Dann ergiebt sich aus VI. und X.

$$\varrho_1 = (k-u), \qquad \varrho_0 = -\frac{t_1}{\frac{\partial t_1}{\partial u}}, \tag{XII.}$$

und die Coordinaten von P und M_2 werden

$$\left.\begin{aligned}
x &= x_1 + (k-u)\frac{\partial x_1}{\partial u}; \qquad x_2 = x_1 - \frac{t_1}{\frac{\partial t_1}{\partial v}} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial u}; \\
y &= y_1 + (k-u)\frac{\partial y_1}{\partial u}; \qquad y_2 = y_1 - \frac{t_1}{\frac{\partial t_1}{\partial v}} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial u}; \\
z &= z_1 + (k-u)\frac{\partial z_1}{\partial u}; \qquad z_2 = z_1 - \frac{t_1}{\frac{\partial t_1}{\partial v}} \cdot \frac{\partial z_1}{\partial u}.
\end{aligned}\right\} \tag{XIII.}$$

3. Bestimmung der Fundamentalgrössen für die gefundenen Flächen (P) und (M_2).

Wir wollen unter Voraussetzung orthogonal geodätischer Parameter (XI. XII. XIII.) die Richtungscosinus der Normale und die Fundamentalgrössen für (P) und (M_2) bestimmen.

Die Richtungscosinus der Fläche (P) sind

$$p = \frac{\partial x_1}{\partial u}; \quad q = \frac{\partial y_1}{\partial u}; \quad r = \frac{\partial z_1}{\partial u}. \tag{XIV.}$$

Die Normale der Fläche (M_2) steht senkrecht zu den Normalen von (M_1) und von (P), ist also parallel der Tangente an die Parameterlinie $u =$ const., d. h. es ist

$$p_2 = \frac{1}{t_1}\frac{\partial x_1}{\partial v}; \quad q_2 = \frac{1}{t_1}\frac{\partial y_1}{\partial v}; \quad r_2 = \frac{1}{t_1}\frac{\partial z_1}{\partial v}. \tag{XV.}$$

Bei dieser Wahl der Vorzeichen ist die Determinante

$$\begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p & q & r \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} = +1, \tag{XVI.}$$

also liegen die drei positiven Normalen von (M_1) (P) (M_2) zu einander, wie die Axen x, y, z.

Ferner ist nach XIII.

$$\frac{\partial x}{\partial u} = (k-u)\frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2}; \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial x_1}{\partial v} + (k-u)\frac{\partial^2 x_1}{\partial u \partial v};$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = -\frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2} + (k-u)\frac{\partial^3 x_1}{\partial u^3}; \quad \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = (k-u)\frac{\partial^3 x_1}{\partial u^2 \partial v};$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = +\frac{\partial^2 x_1}{\partial v^2} + (k-u)\frac{\partial^3 x}{\partial u \partial v^2} \quad \text{etc.}$$

Folglich wird

$$e = (k-u)^2\left[\left(\frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2}\right)^2 + +\right];$$

$$f = (k-u)\left[\frac{\partial x_1}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2} + +\right] + (k-u)^2\left[\frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial^2 x_1}{\partial u \partial v} + +\right];$$

$$g = \left[\left(\frac{\partial x_1}{\partial v}\right)^2 + +\right] + 2(k-u)\left[\frac{\partial x_1}{\partial v}\frac{\partial^2 x_1}{\partial u \partial v} + +\right] + (k-u)^2\left[\left(\frac{\partial^2 x_1}{\partial u \partial v}\right)^2 + +\right].$$

Nun wird in der Flächentheorie bewiesen, dass bei orthogonal geodätischen Parametern

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2} = E_1 p_1; \quad \frac{\partial^2 x_1}{\partial u \partial v} = \frac{1}{t_1}\frac{\partial t_1}{\partial u}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial v} + F_1 p_1 \text{ ist, u. s. w.,}$$

und mit Rücksicht hierauf und auf die Bedeutung von e, f, g kommt

$$e = (k-u)^2 E_1^2;$$

$$f = (k-u)^2 E_1 F_1;$$

$$g = g_1 + 2(k-u)\tfrac{1}{2}\frac{\partial g_1}{\partial u} + (k-u)^2\left[\frac{1}{t_1^2}\left(\frac{\partial t_1}{\partial u}\right)^2 g_1 + F_1^2\right]$$

$$= \left[t_1 + (k-u)\frac{\partial t_1}{\partial u}\right]^2 + (k-u)^2 F_1^2.$$

Um die Grösse $t = \sqrt{eg - f^2}$ auch dem Vorzeichen nach richtig zu bestimmen, bilden wir:

$$pt = \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Diese Gleichung ergiebt, wenn man für die Differential-Quotienten

rechts ihre Werte setzt, und berücksichtigt, dass nach bekannten Formeln der Orthogonalsubstitutionen

$$p = (q_2 r_1 - q_1 r_2) \text{ ist:}$$

$$t = -(k-u)E_1\left(t_1 + (k-u)\frac{\partial t_1}{\partial u}\right).$$

Ferner ergiebt sich:

$$E = \frac{\partial x_1}{\partial u}\left(-\frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2} + (k-u)\frac{\partial^3 x_1}{\partial u^3}\right) + + = -\tfrac{1}{2}\frac{\partial e_1}{\partial u} + (k-u)\left[\frac{\partial x_1}{\partial u}\cdot\frac{\partial^3 x_1}{\partial u^3} + +\right];$$

$$F = \frac{\partial x_1}{\partial u}\left[(k-u)\frac{\partial^3 x_1}{\partial u^2 \partial v}\right] = (k-u)\left[\frac{\partial x_1}{\partial u}\cdot\frac{\partial^3 x_1}{\partial u^2 \partial v} + +\right],$$

$$G = \frac{\partial x_1}{\partial u}\left[+\frac{\partial^2 x_1}{\partial v^2} + (k-u)\frac{\partial^3 x_1}{\partial u \partial v^2}\right] + + = \left(\frac{\partial f_1}{\partial v} - \tfrac{1}{2}\frac{\partial g_1}{\partial u}\right)$$
$$+ (k-u)\left[\frac{\partial x_1}{\partial u}\cdot\frac{\partial^3 x}{\partial u \partial v^2} + +\right].$$

Es ist aber

$$\frac{\partial x_1}{\partial u}\cdot\frac{\partial^3 x_1}{\partial u^3} + + = \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 e_1}{\partial u^2} - E_1^2 = -E_1^2;$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial u}\cdot\frac{\partial^3 x_1}{\partial u^2 \partial v} + + = \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 e_1}{\partial u \partial v} - E_1 F_1 = -E_1 F_1;$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial u}\cdot\frac{\partial^3 x_1}{\partial u \partial v^2} + + = \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 e_1}{\partial v^2} - \left(\left(\frac{\partial t_1}{\partial u}\right)^2 + F_1^2\right) = -F_1^2 - \left(\frac{\partial t_1}{\partial u}\right)^2.$$

Mithin erhalten wir

XVII.

$$e = (k-u)^2 E_1^2,\quad f = (k-u)^2 E_1 F_1,\quad g = \left(t_1 + (k-u)\frac{\partial t_1}{\partial u}\right)^2 + (k-u)^2 F_1^2$$

$$E = -(k-u)E_1^2,\ F = -(k-u)E_1 F_1,\ G = -(k-u)\left(F_1^2 + \left(\frac{\partial t_1}{\partial u}\right)^2\right)$$

Die Fundamentalgrössen von (M_2) bestimmen sich folgendermassen. Es ist

$$\frac{\partial x_2}{\partial u} = \frac{\partial x_1}{\partial u}\left(1 + \frac{\partial \varrho_0}{\partial u}\right) + \varrho_0\frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2},\quad \frac{\partial x_2}{\partial v} = \frac{\partial x_1}{\partial u}\cdot\frac{\partial \varrho_0}{\partial v} + \frac{\partial x_1}{\partial v} + \varrho_0\frac{\partial^2 x_1}{\partial u \partial v},$$

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial u^2} = \frac{\partial x_1}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 \varrho_0}{\partial u^2} + \left(1 + 2\frac{\partial \varrho_0}{\partial u}\right)\frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2} + \varrho_0\frac{\partial^3 x_1}{\partial u^3},$$

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial u \partial v} = \frac{\partial x_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 \varrho_0}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial \varrho_0}{\partial v} + \frac{\partial^2 x_1}{\partial u \partial v}\left(1 + \frac{\partial \varrho_0}{\partial u}\right) + \varrho_0 \frac{\partial^3 x_1}{\partial u^2 \partial v},$$

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial v^2} = \frac{\partial x_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 \varrho_0}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 x_1}{\partial u \partial v} \cdot 2\frac{\partial \varrho_0}{\partial v} + \frac{\partial^2 x_1}{\partial v^2} + \varrho_0 \frac{\partial^3 x_1}{\partial u \partial v^2}.$$

Folglich wird

$$e_2 = \left(1 + \frac{\partial \varrho_0}{\partial u}\right)^2 + \varrho_0^2 E_1^2,$$

$$f_2 = \frac{\partial \varrho_0}{\partial v}\left(1 + \frac{\partial \varrho_0}{\partial u}\right) + \varrho_0^2 E_1 F_1, \qquad \text{XVIII.}$$

$$g_2 = \left(\frac{\partial \varrho_0}{\partial v}\right)^2 + \varrho_0^2 F_1^2.$$

Um die Grösse t_2 dem Vorzeichen nach richtig zu bestimmen, bilden wir

$$p_2^2 t_2 = p_2\left(\frac{\partial y_2}{\partial u} \cdot \frac{\partial z_2}{\partial v} - \frac{\partial z_2}{\partial u} \cdot \frac{\partial y_2}{\partial v}\right),$$

ebenso die Analogen und addiren, dann kommt

$$t_2 = \varrho_0\left(\frac{\partial \varrho_0}{\partial v} E_1 - \left(1 + \frac{\partial \varrho_0}{\partial u}\right) F_1\right),$$

endlich erhält man die Fundamentalgrössen zweiter Ordnung für (M_2) folgendermassen

$$E_2 = -\frac{\varrho_0 E_1 F_1}{t_1},$$

$$F_2 = -\frac{\varrho_0 F_1^2}{t_1},$$

$$G_2 = \frac{\partial \varrho_0}{\partial v} \cdot \frac{\partial t_1}{\partial u} - \frac{\varrho_0 F_1 G_1}{t_1^2}.$$

Es verdient bemerkt zu werden, dass, wenn t_1 Function von u allein und $F_1 = 0$ ist, t_2, f_2 und g_2 Null werden. In diesem Falle, der weiter unten genauer besprochen wird, degenerirt die zweite Mittelpunktsfläche in eine Curve.

4. Ueber die Punkte für welche t_1 verschwindet.

Die Schaar der Parameterlinien $v = \text{const.}$ hat im Allgemeinen auf (M_1) eine Enveloppe, deren Gleichung ist $t_1 = 0$. Für die Punkte, welche dieser Bedingung genügen, wird im Allgemeinen, d. h. wenn nicht gleichzeitig $\frac{\partial t_1}{\partial u} = 0$ ist, ϱ_0 gleich Null. Die Punkte der Enveloppe sind also solche, welche die Fläche (M_1) mit (M_2) gemein hat. Die beiden Hauptkrümmungen der Fläche (P) werden für die entsprechenden Punkte einander gleich. Diese sind also Nabelpunkte. Haben mithin die Parametercurven $v = \text{const.}$ eine reelle Enveloppe, so hat die Evolutenfläche (P) eine reelle Nabellinie. Wenn dagegen die Bedingung $t_1 = 0$ auf (M_1) nur für einzelne reelle Punkte erfüllt ist, so haben die Flächen M_1 und M_2 nur diese als entsprechende Punkte gemein, und die Flächen P haben einzelne Nabelpunkte. Wenn endlich die Gleichung $t_1 = 0$ für keinen reellen Punkt der Fläche (M_1) erfüllt wird, so haben (M_1) und (M_2) keine reellen entsprechenden Punkte gemein, und die Flächen (P) haben keine reellen Nabelpunkte.

5. Krümmungsverwandtschaft.

Die vorangegangenen Entwickelungen, speciell die Gleichungen XII. und XIII. zeigen, dass ϱ_1 und ϱ_0, also auch $\varrho_2 = (\varrho_1 - \varrho_0)$ nur von den Fundamentalgrössen erster Ordnung der Fläche (M_1) abhängen, also unverändert bleiben, wenn man die Fläche (M_1) biegt, oder sogar etwas allgemeiner, wenn man sie so deformirt, dass $e_1 = 1$ und $f_1 = 0$ unverändert bleiben, während t_1 ersetzt wird durch $t_1 V$. Ebenso bleibt auch die Gleichung V. bestehen, d. h. die Parametercurven $v = \text{const.}$ bleiben geodätische; dagegen bleiben die Curven, welche ursprünglich zu $v = \text{const.}$ conjugirt waren, dies bei der Deformation nicht, sondern werden durch andere ersetzt.

Denkt man sich also durch jeden Punkt M_1 die geodätische Parametercurve $v = \text{const.}$ gezogen und trägt auf der Tangente die Abschnitte $M_1 P = \varrho_1$ und $M_1 M_2 = \varrho_0$ ab, so also, dass der Ort von P die Evolventenfläche (P) und der von M_2 die conjugirte Mittelpunktsfläche ist, und deformirt die Fläche (M_1) in der angegebenen Weise, ohne die Grösse der Abschnitte $M_1 P$ und $M_1 M_2$ zu ändern, so gehen die Flächen $(M_1)(M_2)(P)$ in die Flächen (M_1') $(M_2')(P_2')$ über, welche in derselben Beziehung zu einander stehen, so dass (M_1') und (M_2') die Mittelpunktsflächen zu (P') sind. Zwischen den Flächen (P') und (P) existirt dann eine Verwandtschaft der Art, dass in entsprechenden Punkten jeder der beiden Hauptkrümmungsradien für beide Flächen dieselbe Grösse hat, und dass ausser-

dem das eine System von Krümmungslinien sich in beiden Flächen entspricht, das andere im Allgemeinen nicht. Ich werde diese Verwandtschaft als unsymmetrische oder einseitige Krümmungsverwandtschaft bezeichnen. Wenn ausserdem noch die andern Krümmungslinien sich entsprechen sollen, so muss

$$E_1 F_1' - E_1' F = 0$$

sein. Tritt dies ein, so wollen wir die Krümmungsverwandtschaft eine symmetrische oder vollkommene nennen. Dass eine solche existirt, werden wir weiter unten sehen.

Zwischen den Flächen (M_2') und (M_2) existirt eine weniger einfache Verwandtschaft. Es entsprechen sich auf denselben die Linienschaaren $v =$ const. in der Weise, dass das System der sie conjugirt schneidenden in beiden Flächen ein geodätisches ist, oder dass die ihnen conjugirten Tangenten an beiden ein Normalensystem bilden, welches gleiche Werte für ϱ_0 und ϱ_2 ergiebt, so dass $\varrho_0' = \varrho_0$, $\varrho_2' = \varrho_2$ wird.

Unterscheidet man die entsprechenden Stücke bei der oben genannten Deformation durchweg durch Accente, so dass ds und ds' die entsprechenden Linienelemente auf den krümmungsverwandten Flächen (P) und (P'), ds_2' und ds_2 diejenigen auf den Flächen (M_2') und (M_2) sind, so ist

$$ds'^2 - ds^2 = (k-u)^2[(E_1'du + F_1'dv)^2 - (E_1du + F_1dv)^2],$$

$$ds_2'^2 - ds_2^2 = \frac{t^2}{\left(\frac{\partial t}{\partial u}\right)^2}[(E_1'du + F_1'dv)^2 - (E_1du + F_1dv)^2];$$

d. h. die Linien

$$(E_1'du + F_1'dv) \pm (E_1du + F_1dv) = 0$$

behalten bei der aus der bezeichneten Deformation von (M_1) in (M_1') hervorgehenden Deformation der Flächen (P) und (M_2) auf diesen Flächen ihre Längen. Diese Linien sind harmonisch zu denjenigen, deren eine vor, deren andere nach der Deformation auf (P) das System der zweiten Krümmungslinien, auf (M_2) das System der ihnen entsprechenden Kürzesten darstellen.

6. Allgemeinste Abbildung nach einseitiger Krümmungsverwandtschaft.

Wir beantworten nun die Frage: Welches ist die allgemeinste Abbildung einer Fläche nach Krümmungsverwandtschaft, wobei eine bestimmte Schaar Krümmungslinien als die sich erhaltende gegeben ist.

Es sei (P) die Urfläche und (P') die Abbildung. Wir construiren zu beiden diejenige Evolutenfläche (M_1) und (M_1'), welche zu der Schaar der sich erhaltenden Krümmungslinien gehört.

Wir wählen die Parameter auf (M_1) orthogonal geodätisch, so dass

$$e_1 = 1, \quad f_1 = 0, \quad g_1 = t_1^2$$

und dass den Parameterlinien $v = \text{const.}$ auf (P_1) die sich erhaltenden Krümmungslinien entsprechen, ferner dass v_1 Function von v allein ist. Unter Beibehaltung der früheren Bezeichnungen muss sein

$$d\varrho_1' = d\varrho_1 \quad \text{d. h.}$$

$$\sqrt{e_1'}\,du + \frac{f_1'}{\sqrt{e_1'}}\,dv_1 = du,$$

und zwar für jede Wahl von du und dv_1, also

$$e_1' = 1, \quad f_1' = 0, \quad g_2' = t_1'^2.$$

Es muss aber ferner $\varrho_0' = \varrho_0$ sein, also

$$\frac{t_1'}{\frac{\partial t_1'}{\partial u}} = \frac{t_1}{\frac{\partial t_1}{\partial u}},$$

woraus folgt $t_1' = Vt_1$, wo V Function von v allein ist. Es ist also die oben bezeichnete Art der Deformation der Fläche (M_1) die einzige, bei welcher (P) in eine krümmungsverwandte Fläche übergeht, wenn die erste Schaar von Krümmungslinien einander entsprechen sollen.

Es lässt sich auch nachweisen, dass die Verwandtschaft, wie sie zwischen (M_2) und (M_2') oben definirt ist, nur besteht, wenn zwischen (M_1) und (M_1') die eben besprochene Verwandtschaft besteht. Doch kann der Nachweis wohl füglich übergangen werden.

Uebrigens ist zu bemerken, dass auch wenn die beiden Mittelpunktsflächen einer Gleichung genügen, und die beiden Schaaren von Krümmungslinien in einander übergehen, bei der Deformation der Fläche (P) in eine krümmungsverwandte Fläche diese selbst ebenso wie die ganze Mittelpunktsfläche zweimal abgebildet wird, indem jeder Punkt der letzteren einerseits als Punkt von (M_1), andrerseits als Punkt von (M_2) aufzufassen und demgemäss abzubilden ist.

Eine allgemeine Durchführung der ursprünglich gestellten Aufgabe an einer beliebig gegebenen Fläche würde, wie wir gesehen haben, in Wesentlichen nur eine Wiederholung des Problems der

Kürzesten sein, und die Aufsuchung der Flächen, die zu einer beliebig gegebenen Fläche (P) krümmungsverwandt sind, reducirt sich auf die Aufsuchung der Mittelpunktsflächen, die Einführung der oben speciell charakterisirten geodätisch orthogonalen Parameter für eine derselben, etwa (M_1), so dass $e_1 = 1$, $f_1 = 0$, $g_1 = t_1^2$ wird, und die Deformation der Fläche (M_1) in (M_1'), so dass $e_1' = 1$, $f_1' = 0$, $g_1' = V^2 t_1^2$ wird, wofür eine Speciallösung die Biegung ist. Die allgemeinste Durchführung dieser Rechnung würde also auf ein in geschlossener Form ungelöstes Problem führen. Doch sind zwei Specialfälle vorhanden, welche eine einfache Durchführung gestatten, und von denen der zweite den singulären Fall behandelt, wo die gegebene Mittelpunktsfläche in eine Curve degenerirt, während der erste den Fall betrifft, dass die gegebene Mittelpunktsfläche abwickelbar ist.

7. Abwickelbare Mittelpunktsflächen.

Ist (M_1) eine abwickelbare Fläche, so lässt sich die gestellte Aufgabe geometrisch sehr anschaulich behandeln. Wir setzen hierbei den allgemeinsten Fall voraus, dass (M_1) Tangentenfläche einer Raumcurve, welche man ihre Gratlinie (auch Rückkehrcurve) nennt, sei, weil sich daraus die Fälle, wo sie conisch oder cylindrisch ist, leicht ableiten lassen, ohne dass es einer Wiederholung der ganzen Betrachtung bedürfte.

Um auf (M_1) eine beliebige Schaar Kürzester zu charakterisiren, denken wir uns in einer Ebene (E) eine beliebige Schaar Gerader, deren Enveloppe wir (m_2), und deren rechtwinklige Trajectorien wir (p) nennen, so dass (m_2) die Evolute aller Parallelcurven (p) ist. Den Berührungspunkt einer Geraden der Schaar mit der Enveloppe (m_2) nennen wir M_2, den Durchschnitt mit einer beliebigen Curve (p) nennen wir P. (Ist die Schaar Gerader ein Strahlbüschel, so werden die Curven (p) concentrische Kreise, die Enveloppe (m_2) geht in einen Punkt über. Wird die Schaar Gerader parallel, so werden die Curven (p) Gerade, und (m_2) geht in's Unendliche). Bringen wir nun die Ebene (E) in irgend einer Weise in die Lage einer Tangentialebene von (M_1) d. h. einer Schmiegungsebene der Gratlinie von (M_1), lassen dieselbe sich vorwärts und rückwärts auf der Fläche (M_1) abrollen und nennen M_1 den augenblicklichen Berührungspunkt der Geraden M_2P mit der Fläche (M_1), welcher auf der Tangente der Gratlinie liegt; dann ist die Spur jeder der Geraden M_2M_1P auf (M_1) eine Kürzeste, und die Schaar der Geraden, in jeder möglichen Lage der Ebenen gedacht, bildet das System der Tangenten einer bestimmten Schaar Kürzester auf (M_1). Die Trajectorien der

Curven (p) sind die parallelen Flächen (P), welche jenes System von Tangenten zum Normalensystem haben, und folglich die Fläche (M_1) zu einer Mittelpunktsfläche. Dieser Mittelpunktsfläche entspricht auf (P) als das erste System von Krümmungslinien die Schaar der Trajectorien, welche die einzelnen Punkte der Curve (p) bei der Bewegung beschreiben. Die zweite Schaar der Krümmungslinien von (P) sind die ebenen Curven (p) in allen möglichen Lagen. Jeder derselben entspricht auf (M_1) die Tangente der Gratlinie, längs welcher die Ebene von (m_2) die abwickelbare Fläche (M_1) berührt. Die Tangenten der Gratlinien schneiden in der Tat auf (M_1) die Schaar der Kürzesten in conjugirten Richtungen, weil nämlich auf einer abwickelbaren Fläche zu einer beliebigen Tangential-Richtung in M_1 die Richtung der Tangente der Gratlinie durch M_1 conjugirt ist.

Die zweite Mittelpunktsfläche (M_2) ist die Trajectorie der Enveloppe (m_2). Der ersten Schaar Krümmungslinien auf (P), oder der Schaar der Kürzesten auf (M_1') entsprechen also hier die Trajectorien der einzelnen Punkte m_2; der zweiten Schaar Krümmungslinien auf (P), also den Tangenten der Gratlinie, entsprechen auf (M_2) die ebenen Curven (m_2); die letzteren sind auf (M_2) Kürzeste, die ihnen conjugirten Trajectorien stehen darauf senkrecht.

Wird die Curve (m_2) durch einen Punkt vertreten, so degenerirt (M_2) in eine Curve, die Curven (p) werden concentrische Kreise, und die Flächen (P) werden **Canalflächen** im gewöhnlichen Sinne. E möchte sich empfehlen, den Begriff der Canalflächen so zu erweitern, dass man unter einer **Canalfläche mit beliebigem Querschnitt** die Trajectorie einer ebenen Curve versteht, wenn deren Ebene auf einer abwickelbaren Fläche rollt. Diese abwickelbare Fläche kann die **Leitfläche**, ihre Gratlinie die **Leitcurve** der Canalfläche genannt werden. Dann sind die **gewöhnlichen Canalflächen** oder **Canalflächen im engeren Sinne** als solche mit **kreisförmigem Querschnitt** zu bezeichnen. Demgemäss sind im Allgemeinen die Flächen (P) und (M_2) Canalflächen im weiteren Sinne. Werden aber die Tangenten der Curve (m_2) durch parallele Gerade vertreten, so wird jede Curve (p) eine zu ihnen rechtwinklige Gerade, und die Fläche (P) wird selbst abwickelbar.

Im Besonderen kann die Curve (m_2) ihrer Gestalt und Lage nach so gewählt sein, dass die Krümmung $\frac{d\tau}{ds}$ mit derjenigen der Gratlinie durchweg übereinstimmt, und dass sie die Gratlinie in irgend einer Lage osculirt; dann osculirt sie dieselbe in jeder Lage. In diesem Falle werden die Tangenten von (m_2) successive mit denen der Gratlinie zusammenfallen, und die Flächen (P) werden die Fläche

(M_1) orthogonal schneiden. Die Durchschnittslinie beider ist singuläre Krümmungslinie (Nabellinie) für (P). Dieser singulärer Fall wird bei conischen und cylindrischen Flächen durch noch singulärere Fälle ersetzt, die folgendermassen charakterisirt sind.

Erstens, wenn (M_1) conisch ist, und die Curve (m_2) in einen Punkt degenerirt ist, der in der Anfangslage in den Scheitel fällt; dann fällt er stets in den Scheitel, und die Flächen (P) werden Kugeln die den Scheitel zum Mittelpunkte haben. Zweitens, was als Grenzfall des vorigen anzusehen ist, wenn die Fläche (M_1) cylindrisch ist, und die Tangenten der Curve (m_2) durch Gerade ersetzt sind, welche den Seiten des Cylinders parallel sind; dann werden die Flächen (P) Normalebenen des Cylinders. In diesen beiden Fällen wird das Resultat in gewissem Sinne illusorisch.

Die Aufgabe, diejenigen Flächen zu suchen, welche eine gegebene abwickelbare Mittelpunktsfläche haben, ist nach dem Vorigen auf die Aufsuchung der sämmtlichen zu der gegebenen Fläche (M_1) gehörigen Canalflächen zurückgeführt.

Diese aber reducirt sich wesentlich auf die Aufgabe, die Trajectorie eines Punktes einer Tangentialebene von (M_1) zu suchen, während jene sich auf (M_1) abrollt.

Uebrigens hat Herr Enneper in einem Anhange seiner „Untersuchungen über Flächen mit planen und sphärischen Krümmungslinien" (Göttingen 1880) die Aufgabe für einen elliptischen Kegel als gegebene Mittelpunktsfläche behandelt.

8. Krümmungsverwandtschaft bei Canalflächen.

Die Aufsuchung von Flächen, welche in einseitiger Krümmungsverwandtschaft zu einer Canalfläche (im weiteren Sinne) stehen, so dass dem ersten System von Krümmungslinien, also den Trajectorien der einzelnen Punkte von (P), wieder Krümmungslinien entsprechen, lässt sich folgendermassen durchführen.

Die allgemeinste Deformation der geradlinigen Fläche (M_1), welche der in 6) angegebenen Bedingung entspricht, wird erhalten, indem man zunächst die Curve (m_2) in ihrer Ebene beliebig verbiegt, wodurch die Curve (p) in eine beliebige andere ebene Curve (p') deformirt wird, so dass die Punkte mit gleichen Krümmungsradien einander entsprechen. Diese Aufgabe ist, abgesehen davon, dass die Lösung imaginär werden kann, ganz allgemein löslich, ohne dass der Charakter der Curve (p) oder (p') in Frage kommt. Nach Ausführung dieser Deformation kann die Ebene mit der Curve (p') und

ihrer Evolute (m_2') noch beliebig gebogen, also auf eine beliebige andere geradlinige Fläche aufgewickelt werden.

Man kommt so auf das überraschend einfache Resultat, dass die allgemeinste mit einer gegebenen Canalfläche einseitig krümmungsverwandte Fläche, bei welcher die erste Schaar von Krümmungslinien erhalten bleibt, wieder eine Canalfläche und zwar, abgesehen von der Realität, eine ganz beliebige Canalfläche ist; so wie umgekehrt, dass jede Canalfläche mit jeder anderen (abgesehen von der Realität) krümmungsverwandt ist.

Man kann dies leicht folgendermassen verificiren.

Seien (P) und (P') zwei beliebige Canalflächen. Man nehme irgend einen Querschnitt von (P) und von (P'), sie seien (p) und (p'), nehme in (p) einen beliebigen Punkt P und ordne ihm in (p') denjenigen Punkt p' zu, der denselben Krümmungsradius hat, so dass $PM_2 = p'm_2'$ ist. Hierdurch ist einem beliebigen Bogen von (p) ein beliebiger Bogen von (p') in der Art zugeordnet, dass die entsprechenden Bogen der Evoluten (m_2) und (m_2') gleiche Länge haben. Indem man nun die Ebene von (p) als Tangentialebene von (M_1) zunächst festhält; und den Schnittpunkt von PM_2 mit der Tangente der Gratlinie von (M_1) mit M_1 bezeichnet, lasse man die Ebene von (p') auf der abwickelbaren Fläche (M_1') in eine solche Lage rollen, dass eine bestimmt gewählte Gerade $(p'm_2')$ in die Lage $P'M_2'$ kommt, in welcher sie die Tangente der Gratlinie von (M_1') in einem Punkte M_1' so schneidet, dass die Abschnitte $P'M_1'$ und $M_1'M_2'$ den Abschnitten PM_1 und M_1M_2 gleich werden; dann ist der Punkt P' der dem Punkt P entsprechende Punkt; denn sie haben gleiche Hauptkrümmungen, da $PM_1 = P'M_1' = \varrho_1$, $PM_2 = P'M_2' = \varrho_2$ ist, und die Trajectorien von P und von P' beim Abrollen der Ebenen von (p) und (p') auf (M_1) und (M_1') sind entsprechende Krümmungslinien.

Wir wollen andrerseits diejenigen Flächen suchen, welche mit (P) einseitig krümmungsverwandt sind, und bei welchen die Krümmungslinien der zweiten Schaar, also die Querschnittscurven, einander entsprechen. Um dieselben zu finden, unterwerfen wir die Fläche (M_2) der in 6) angegebenen Deformation. Diese kann dadurch allgemein ausgeführt werden, dass man zunächst die Torsion der Gratlinie von (M_1) ändert. Denn seien für den Moment v und $v + dv$ die Parameterwerte für zwei benachbarte Querschnitte und construirt man im Punkte $u\,v$ das Flächenelement mit den Seiten du und $t\,dv$, so braucht nur der Winkel, unter dem sich die Ebenen der Querschnitte

v und $(v+dv)$ schneiden, nach irgend einem Gesetz verändert zu werden, um allgemein aus dem Flächenelement mit den Seiten du und tdv ein solches mit den Seiten du und $Vtdv$ zu machen. Dies geschieht aber allgemein, indem man die Ebenen der Querschnitte, also die benachbarten Tangentialebenen von (M_1) oder die Schmiegungsebenen der Gratlinie um die gemeinschaftliche Tangente dreht; d. h. indem man unter Aufrechterhaltung aller andern Beziehungen die Torsion der Gratlinie ändert. Durch diese Deformation wird (M_2) in eine neue Canalfläche deformirt, ebenso (P), und (M_1) geht in eine andere abwickelbare Fläche über. Die Fläche (M_2') kann dann noch beliebig in die Fläche (M_2'') gebogen werden, wobei sie aber aufhören muss, Canalfläche zu sein; und die entsprechende andere Mittelpunktsfläche (M_1') geht dann über in (M_1''), und diese Fläche kann dann ebenfalls nicht mehr abwickelbar sein, und ebenso geht (P') über in (P''), und diese Fläche kann nicht mehr Canalfläche sein. Wir haben also das Resultat: Um zu einer Canalfläche (P) die allgemeinsten krümmungsverwandten Flächen der zweiten Classe zu suchen, kann man zunächst die Torsion der Gratlinie von (M_1) ändern und dann die Fläche (M_2') biegen. Es giebt also entsprechend jeder Wahl der Function V eine bestimmte Canalfläche (P'), welche mit (P) in der angegeben Weise einseitig krümmungsverwandt ist, ausserdem aber noch unzählig viele andere Flächen, welche durch Biegung von (M_2') u. s. w. gewonnen werden.

Wir können nun leicht erkennen, dass es zu jeder Canalfläche unzählig viele vollkommen Krümmungsverwandte giebt.

Um zugleich die Allgemeinheit der Lösung zu übersehen, machen wir folgenden Schluss. Soll die Fläche (P') mit der Canalfläche (P) krümmungsverwandt von der ersten Classe sein, so muss sie selbst Canalfläche sein, und soll sie zugleich krümmungsverwandt der zweiten Classe sein, so muss sie durch Aenderung der Torsion der Gratlinie von (M_1), unter Beibehaltung aller andern Beziehungen aus (P) deformirt sein.

Es giebt demnach zu jeder Canalfläche unzählig viele vollständig krümmungsverwandte Flächen. Dieselben sind sämmtlich Canalflächen mit demselben Querschnitt, welche sich von einander nur durch die verschiedene Torsion der Leitlinie unterscheiden.

(Wenn die Canalfläche keine Leitlinie hat, weil die Enveloppe der Querschnittsebenen conisch oder cylindrisch wird, ist die Torsion der Leitlinie zu ersetzen durch die Krümmung der conischen oder cylindrischen Leitfläche).

9. Die gegebene Mittelpunktsfläche (M_1) ist in eine Curve degenerirt.

Der Fall, in welchem die gegebene Mittelpunktsfläche (M) in eine Curve degenerirt ist, ist ein so singulärer, dass er eine besondere Untersuchung erfordert.

Es seien also in den Gleichungen I. $x_1 y_1 z_1$ Functionen von v allein, und zwar sei dv das Bogenelement der Curve (M_1); dann folgt aus der Gleichung II., dass

$$\varrho_1 = -\int (\alpha\, dx_1 + \beta\, dy_1 + \gamma\, dz_1) \qquad \text{XIX.}$$

ebenfalls Function von v allein ist, obwohl $\alpha\, \beta\, \gamma$ einzeln den Parameter u enthalten können.

Nennt man φ den Winkel, welchen ein von M_1 ausgehender Strahl des Normalensystems mit der Tangente der Curve (M_1) im Punkte M_1 bildet, so ist

$$\alpha \frac{dx_1}{dv} + \beta \frac{dy_1}{dv} + \gamma \frac{dz_1}{dv} = \cos\varphi, \quad \text{also}$$

$$\cos\varphi = -\frac{d\varrho_1}{dv} \qquad \text{XX.}$$

Es ist also auch φ Function von v allein, d. h. der Ort aller von M_1 ausgehenden Strahlen ist ein gerader Kegel, dessen Axe die Tangente der Curve (M_1) ist, und wir können den übrigens bereits bekannten Satz aussprechen:

Wenn eine Mittelpunktsfläche (M_1) einer Fläche (P) in eine Curve degenerirt ist, so ist die Fläche (P) die Enveloppe einer Schaar von Kugeln, deren Mittelpunkte auf (M_1) liegen.

Die erste Schaar der Krümmungslinien von (P), $v =$ const. sind Kreise (cyklische Krümmungslinien).

Aus einen bekannten Satz von Joachimsthal folgt umgekehrt, dass jede Fläche mit einem System cyklischer Krümmungslinien als Enveloppe einer Kugelschaar aufgefasst werden kann.

(Wenn nämlich die Durchschnittslinie zweier Flächen für jede von beiden Krümmungslinie ist, so schneiden sich die Flächen unter constantem Winkel. In der Ebene und auf der Kugel ist jede Linie Krümmungslinie, also schneidet die Ebene jeder cyklischen Krümmungslinie die Fläche unter constantem Winkel, folglich giebt es eine Kugel, welche die Fläche längs der Krümmungslinie berührt).

Die Fläche (P) mit ihren Parallelen ist bestimmt, wenn $x_1\ y_1\ z_1$ und $\cos\varphi = -\frac{d\varrho_1}{dv}$ als Functionen von v gegeben sind.

Die zweite Mittelpunktsfläche (M_2), welche die Enveloppe der eben besprochenen geraden Kegel ist, kann folgendermassen, analog dem allgemeinen Fall, bestimmt werden.

Wir setzen

$$x_2 = x_1 + \varrho_0\alpha$$
$$y_2 = y_1 + \varrho_0\beta$$
$$z_2 = z_1 + \varrho_0\gamma$$

und bestimmen ϱ_0, du und dv so, dass dx_2, dy_2 und dz_2 Null werden; dann erhalten wir, wenn wir den Factor dv, dessen Verschwinden auf (M_1) zurückführen würde, fortlassen:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial v}, & \alpha, & \frac{\partial\alpha}{\partial u}du + \frac{\partial\alpha}{\partial v}dv \\ \frac{\partial y_1}{\partial v}, & \beta, & \frac{\partial\beta}{\partial u}du + \frac{\partial\beta}{\partial v}dv \\ \frac{\partial z_1}{\partial v}, & \gamma, & \frac{\partial\gamma}{\partial u}du + \frac{\partial\gamma}{\partial v}dv \end{vmatrix} = 0.$$

Dies ist die Differentialgleichung der zweiten Schaar von Krümmungslinien auf (P).

Um nun ϱ_0 zu berechnen, eliminiren wir $d\varrho_0$ aus den Gleichungen $dy_2 = 0$ und $dz_2 = 0$ und erhalten

$$\left(\gamma\frac{\partial y_1}{\partial v} - \beta\frac{\partial z_1}{\partial v}\right)dv + \varrho_0(\gamma d\beta - \beta d\gamma) = 0.$$

Diese Gleichung multipliciren wir mit $\left(\gamma\frac{\partial y_1}{\partial v} - \beta\frac{\partial z_1}{\partial v}\right)$, bilden die Analogen und addiren. Dann kommt nach einiger Rechnung

$$\sin\varphi^2 dv + \varrho_0\left(\frac{\partial x_1}{\partial v}d\alpha + \frac{dy_1}{\partial v}d\beta + \frac{\partial z_1}{\partial v}d\gamma\right) = 0.$$

Nun ist

$$\frac{\partial x_1}{\partial v}d\alpha + \frac{\partial y_1}{\partial v}d\beta + \frac{\partial z_1}{\partial v}d\gamma = \left(\frac{\partial x_1}{\partial v}\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial u} + \frac{\partial y_1}{\partial v}\cdot\frac{\partial\beta}{\partial u} + \frac{\partial z_1}{\partial v}\cdot\frac{\partial\gamma}{\partial u}\right)du$$
$$+\left(\frac{\partial x_1}{\partial v}\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial v} + \frac{\partial y_1}{\partial v}\cdot\frac{\partial\beta}{\partial v} + \frac{\partial z_1}{\partial v}\cdot\frac{\partial\gamma}{\partial v}\right)dv$$

und

$$\frac{\partial x_1}{\partial v} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial u} + + = \frac{d \cos\varphi}{du} = 0,$$

dagegen

$$\frac{\partial x_1}{\partial v} \frac{\partial \alpha}{\partial v} + + + \left[\alpha \frac{\partial^2 x_1}{\partial v^2} + +\right] = -\sin\varphi \frac{d\varphi}{dv} = \frac{d^2 \varrho_1}{dv^2}$$

Setzt man diese Werte ein, so hebt sich dv, welches nicht Null ist, heraus, und man erhält:

$$\varrho_0 = \frac{\sin\varphi^2}{\frac{d\varphi}{dv}\sin\varphi + \left(\alpha\frac{\partial^2 x_1}{\partial v^2} + \beta\frac{\partial^2 y_1}{\partial v^2} + \gamma\frac{\partial^2 z_1}{\partial v^2}\right)}$$

Nennt man nun $k = \frac{d\tau}{dv}$ die Krümmung der Curve (M_1) und f', g', h' die Richtungscosinus der Hauptnormale, so ist

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial v^2} = f'k, \quad \frac{\partial^2 y_1}{\partial v^2} = g'k, \quad \frac{\partial^2 z_1}{\partial v^2} = h'k,$$

also

$$\alpha\frac{\partial^2 x_1}{\partial v^2} + + = k(\alpha f' + \beta g' + \gamma h') = k\cos\psi,$$

wo ψ den Winkel bezeichnet, welchen der Strahl M_1P mit der Hauptnormale der Curve (M_1) in M_1 bildet. Es ist aber, wenn u den Winkel bedeutet, welchen die Projection von M_1P auf die Normalebene in M_1 mit der Hauptnormalen bildet, und welchen wir als das Azimuth bezeichnen wollen,

$$\cos\psi = \sin\varphi\cos u,$$

mithin wird

$$\varrho_0 = \frac{\sin\varphi}{\frac{d\varphi}{dv} + k\cos u}$$

Denkt man sich nun ein Coordinatensystem, dessen Anfangspunkt in M_1 liegt, das die Tangente zur ζ Axe, die Hauptnormale zur ξ Axe, die Binormale zur η Axe hat, und sind ξ, η, ζ die Coordinaten des Punktes M_2 für dieses System, so ist

$$\zeta = \varrho_0\cos\varphi, \quad \xi = \varrho_0\sin\varphi\cos u, \quad \eta = \varrho_0\sin\varphi\sin u$$

also

$$\frac{\xi}{\zeta} = \operatorname{tg}\varphi\cos u, \quad \varrho_0 = \frac{\zeta}{\cos\varphi}$$

Setzt man diese beiden Werte in die Gleichung für ϱ_0 ein, so folgt

$$\frac{d\varphi}{dv}\cdot\zeta + (k\operatorname{cotg}\varphi)\,\xi = \cos\varphi\sin\varphi.$$

Dies ist die Gleichung einer Ebene, welche senkrecht zur Schmie-

gungsebene von M_1 liegt, und die Hauptnormale im Punkte $\zeta_0 = \frac{\sin\varphi^2}{k}$, die Tangente im Punkte $\zeta_0 = \frac{\cos\varphi \sin\varphi}{\frac{d\varphi}{d\varrho}}$ schneidet.

Der Durchschnitt dieser Ebene mit dem geraden Kegel, welcher M_1 zum Scheitel, die Tangente zur Axe und φ zum scheinbaren Radius hat, ist derjenige Kegelschnitt auf (M_2), welcher der cyklischen Krümmungslinie auf (P) entspricht. Er ist der Ort der zweiten Krümmungscentra derjenigen Punkte auf (P), deren erstes Krümmungscentrum M_1 ist, und welche auf der cyklischen Krümmungslinie liegen.

Die Fläche (M_2) wird also von jenem geraden Kegel längs dieses Kegelschnittes berührt. Es verdient bemerkt zu werden, dass die Projection dieses Kegelschnittes auf die Normalebene in M_1 den Punkt M_1 zum Brennpunkte hat. Zur Bestimmung der Grössen α, β, γ beachten wir, dass die Richtungscosinus von M_1P im Coordinatensystem $\xi\,\eta\,\zeta$ bezüglich sind:

$$\sin\varphi\cos u, \quad \sin\varphi\sin u, \quad \cos\varphi.$$

Nun sind die Richtungscosinus zwischen den Axen der $\xi\,\eta\,\zeta$ und denen der $x\,y\,z$ aus folgendem Schema zu entnehmen:

	x	y	z
ξ	f'	g'	h'
η	l	m	n
ζ	f	g	h

und es ist

$$\begin{aligned} &f = \frac{dx_1}{dv}, \quad g = \frac{dy_1}{dv}, \quad h = \frac{dz_1}{dv}; \quad dv = \sqrt{dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2}; \\ &f' = \frac{df}{d\tau}, \quad g' = \frac{dg}{d\tau}, \quad h' = \frac{dh}{d\tau}; \quad d\tau = \sqrt{df^2 + dg^2 + dh^2}; \qquad \text{XXII.} \\ &l = (gh' - hg'); \quad m = (hf' - fh'); \quad n = (fg' - gf'); \end{aligned}$$

also wird

$$\begin{aligned} \alpha &= f' \sin\varphi\cos u + l\sin\varphi\sin u + f\cos\varphi; \\ \beta &= g'\sin\varphi\cos u + m\sin\varphi\sin u + g\cos\varphi; \qquad \text{XXIII.} \\ \gamma &= h'\sin\varphi\cos u + n\sin\varphi\sin u + h\cos\varphi. \end{aligned}$$

Alle Grössen ausser u sind hier durch v ausgedrückt, und somit sind sowohl x, y, z als x_2, y_2, z_2, d. h. die Coordinaten von P und von M_2 vollständig als Functionen von u und v dargestellt.

Setzt man die Werte für α, β, γ in die Differentialgleichung der zweiten Schaar der Krümmungslinien ein, so kommt nach einigen Umformungen und nach Division durch $\sin\varphi^2$

$$du + d\vartheta - \operatorname{ctg}\varphi \sin u \, d\tau = 0, \qquad \text{XXIV.}$$

wo ϑ den Torsionswinkel, τ den Krümmungswinkel bedeutet.

Ein besonderer Fall tritt ein, wenn $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ist. Dann wird

$$\varrho_0 = \frac{1}{\frac{d\varphi}{dv} + k\cos u},$$

und der Ort von M_2 für constantes v wird ein Kegelschnitt in der Normalebene selbst, der M_1 zum Brennpunkt hat.

Wenn $\frac{d\varphi}{dv} = 0$ ist, wird $\varrho_0 = \frac{\sin\varphi}{k\cos u}$, und der Ort von M_2 für constantes v ein Kegelschnitt, dessen Ebene lotrecht zur Hauptnormale im Abstande $\frac{\sin\varphi^2}{k}$ steht.

Ist $\frac{d\varphi}{dv}$ constant gleich 0, also φ constant, und ebenso $\frac{d\varrho_1}{dv}$, dann ist die Fläche (P) die Enveloppe einer Kugel, deren Mittelpunkt sich auf (M_1) bewegt, und deren Radius sich proportional mit dem Bogen v ändert, welchen der Mittelpunkt M_1 beschreibt.

Ist φ constant gleich $\frac{\pi}{2}$, dann ist (P) eine Canalfläche im engeren Sinne, und (M_2) diejenige abwickelbare Fläche, welche von der Krümmungsaxe von (M_1) beschrieben wird, und welche man die Evolutenfläche von (M_1) nennen kann.

Ist $k = 0$, so wird $\varrho_0 = \frac{\sin\varphi}{\frac{d\varphi}{dv}}$, und ist es constant gleich Null, also (M_1) eine Gerade, so sind (P) und (M_2) Rotationsflächen *).

10. Krümmungsverwandtschaft bei Flächen mit einer Mittelpunktscurve.

Sei (P) eine beliebige Fläche mit einer Mittelpunktscurve. Wir suchen alle diejenigen Flächen (P'), welche mit (P) einseitig krümmungsverwandt sind, und zwar so, dass den cyklischen Krüm-

*) Man vergleiche die nachträgliche Bemerkung am Schlusse der Arbeit.

mungslinien auf (P) wieder Krümmungslinien auf (P') entsprechen. Da die Krümmungsverwandtschaft fordert, dass $\varrho_1 = \varrho_1'$ ist, und da längs jeder cyklischen Krümmungslinie ϱ_1 constant ist, so muss längs der ihr entsprechenden Krümmungslinie auf (P') ebenfalls ϱ_1' constant sein. Also müssen alle Normalen längs derselben sich in demselben Punkte M_1' schneiden, und es ist die erste Mittelpunktsfläche von (P') ebenfalls in eine Curve degenerirt. Das heisst, die Fläche (P') ist ebenfalls eine Fläche mit cyklischen Krümmungslinien. Es ist nun leicht zu erkennen, dass, abgesehen von der Realität, je zwei Flächen mit je einer Mittelpunktscurve einseitig krümmungsverwandt sind. Denn seien (M_1) und (M_1') die Mittelpunktscurven beider, so können wir auf ihnen zunächst zu jedem Punkte M_1 der einen einen Punkt M_1' der andern so zuordnen, dass $\varrho_1 = \varrho_1'$ wird. Hierdurch sind auf (P) und (P') diejenigen cyklischen Krümmungslinien einander zugeordnet, für welche $\varrho_1 = \varrho_1'$ ist. Auf der ersten derselben wählen wir den Punkt P beliebig. Seinen zweiten Krümmungsmittelpunkt bezeichnen wir mit M_2 und M_1M_2 mit ϱ_0. Nun bestimmen wir denjenigen Kegelschnitt der Fläche (M_2'), welcher dem Punkte M_1' entspricht, wie dies im 9. Abschnitt gezeigt ist, und schlagen endlich mit dem Radius ϱ_0 um M_1' eine Kugel, welche jenen Kegelschnitt im Allgemeinen in zwei Punkten schneidet, die indessen auch imaginär sein können. Die Azimuthe dieser beiden Punkte unterscheiden sich nur durch das Vorzeichen. Einen derselben bezeichnen wir mit M_2' und bestimmen den ihm entsprechenden Punkt P' auf (P'); dann sind die Flächen (P) und (P') einseitig krümmungsverwandt auf einander abgebildet, in der Art, dass dem beliebig gegebenen Punkt P der Punkt P' entspricht, und dass die cyklischen Krümmungslinien einander entsprechen. Die analytische Behandlung desselben Problems ist weiter unten durch die Formeln XXV. und XXVI. dargestellt. (Die Auswahl zwischen den beiden Punkten M_2' oder P' kann so getroffen werden, dass die Beziehung der Congruenz oder so, dass sie der Symmetrie entspricht). Wir können also den Satz aussprechen:

Die allgemeinste Fläche, welche zu einer gegebenen Fläche mit einer Mittelpunktscurve derartig einseitig krümmungsverwandt ist, dass den cyklischen Krümmungslinien wieder Krümmungslinien entsprechen, ist eine Fläche, die ebenfalls eine Mittelpunktscurve hat, übrigens aber, wenn man gewisse Singularitäten ausschliesst, ganz beliebig sein kann.

Es treten hierbei jedoch folgende singuläre Fälle ein: Einer Canalfläche im engeren Sinne muss stets wieder eine Canalfläche mit gleichem Querschnitt entsprechen. Einer Rotationsfläche entspricht

eine beliebige Fläche mit cyklischen Krümmungslinien, aber so, dass allen Punkten eines Parallelkreises nur 2 Punkte auf (P') entsprechen, so dass die Beziehung aufhört, eine Flächenverwandtschaft zu definiren. Dagegen kann eine Rotationsfläche einer andern, welche wir noch bestimmen werden, so entsprechen, dass jedem Parallelkreis der einen ein Parallelkreis der andern entspricht, und dann kann die Verwandtschaft, welche unabhängig vom Azimuth wird, als vollständige Krümmungsverwandtschaft betrachtet werden.

Sucht man andrerseits zu einer Fläche mit einer Mittelpunktscurve eine einseitig krümmungsverwandte Fläche, bei welcher den nicht cyklischen Krümmungslinien wieder Krümmungslinien entsprechen, so hat man die in 6) angegebene Deformation auf die nicht degenerirte Mittelpunktsfläche anzuwenden, also dieselbe entweder nur zu biegen, oder erst der oben näher charakterisirten Dehnung auszusetzen und dann zu biegen. Hierbei kommt man im Allgemeinen nicht auf Flächen desselben Charakters, wie das Beispiel der Rotationsflächen zeigt. Die nicht degenerirte Mittelpunktsfläche derselben ist selbst Rotationsfläche (M_2). Die in 6) besprochene Dehnung kann geschehen, indem man die Fläche in sich selbst so abbildet, dass die Parallelkreise sich selbst entsprechen, irgend einem Meridiane dagegen nach beliebigem Gesetz ein anderer Meridian entspricht. Die so gedehnte Fläche kann nun noch irgend wie gebogen werden, um in die entsprechende Mittelpunktsfläche (M_2') einer krümmungsverwandten Fläche (P') übergeführt zu werden. Hierbei kann sie aufhören, Rotationsfläche zu bleiben; sie kann zum Beispiel, wie bekannt, in eine Schraubenfläche gebogen werden; dann aber ist (M_1') nicht mehr in eine Curve degenerirt.

Man kann endlich die Frage stellen, ob es zu einer beliebigen Fläche (P) mit einer Mittelpunktscurve stets **vollkommen krümmungsverwandte** giebt. Sei (P) die gegebene, (P') die gesuchte Fläche, so muss auch (P') eine Mittelpunktslinie (M_1') haben, und wir können beide Flächen, ausgehend von ihren Mittelpunktslinien, mit Hülfe der Gleichungen XIX. bis XXIII. darstellen, indem wir die entsprechenden Grössen einschliesslich der Parameter durch dieselben Buchstaben ausdrücken und durch Accente unterscheiden.

Sollen nun (P') und (P) einseitig krümmungsverwandt mit entsprechenden cyklischen Krümmungslinien sein, so ist u' so als Function von u und v, v' so als Function von v zu bestimmen, dass

$$\varrho_1' = \varrho_1 \quad \text{und} \quad \varrho_0' = \varrho_0 \quad \text{wird, d. h.}$$

$$\cos\varphi' dv' = \cos\varphi\, dv \quad \text{oder} \int \cos\varphi' dv' = \int \cos\varphi\, dv \qquad \text{XXV.}$$

und

$$\frac{d\varphi'}{\sin\varphi' dv'} + k' \frac{\cos u'}{\sin\varphi'} = \frac{d\varphi}{\sin\varphi\, dv} + k \frac{\cos u}{\sin\varphi} \qquad \text{XXVI.}$$

Sind (P') und (P) ganz beliebig gegeben, so sind φ' und k' gegebene Functionen von v', φ und k gegebene Functionen von v, die Gleichung XXV. stellt v' als Function von v, XXVI. stellt dann u' als Function von u und v dar, und die Abbildung zweier beliebigen Flächen (P) und (P') mit je einer Mittelpunktslinie aufeinander nach einseitiger Krümmungsverwandtschaft mit entsprechenden cyklischen Krümmungslinien ist auf Quadraturen zurückgeführt.

Soll aber vollkommene Krümmungsverwandtschaft bestehen, so müssen auch noch die Krümmungslinien des zweiten Systems in beiden Flächen einander entsprechen; d. h. wenn

$$du + d\vartheta - \operatorname{ctg}\varphi \sin u\, d\tau = 0$$

ist, muss auch

$$\frac{\partial u'}{\partial u} du + \frac{\partial u'}{\partial v} dv + d\vartheta' - \operatorname{ctg}\varphi' \sin u' d\tau' = 0$$

sein, woraus durch Elimination von du folgt:

$$\frac{\partial u'}{\partial u}(d\vartheta - k \operatorname{ctg}\varphi \sin u\, dv) = \frac{\partial u'}{\partial v} dv + d\vartheta' - k' \operatorname{ctg}\varphi' \sin u' dv' \qquad \text{XXVII.}$$

Und zwar sind den Gleichungen XXV., XXVI., XXVII. gemäss, während ϑ, k und φ gegebene Functionen von v allein sind, v', ϑ', k' und φ', als Functionen von v allein, u' als Function von u und v zu bestimmen.

Durch Multiplication von XXV. und XXVI. erhält man nach einer einfachen Umstellung:

$$\operatorname{ctg}\varphi' d\varphi' - \operatorname{ctg}\varphi\, d\varphi = k \cos u \operatorname{ctg}\varphi\, dv - k' \cos u' \operatorname{ctg}\varphi' dv'.$$

Setzen wir jetzt

$$\sin\varphi' = \lambda \sin\varphi, \qquad \text{XXVIII.}$$

so geht diese Gleichung mit Rücksicht auf XXV. über in:

$$d\lambda = (\lambda k \cos u - k' \cos u') \operatorname{ctg}\varphi\, dv$$

oder

$$k' \cos u' = \lambda k \cos u - \operatorname{tg}\varphi \frac{d\lambda}{dv} \qquad \text{XXIX.}$$

Wenn k' nicht Null ist, wird

$$\cos u' = \frac{\lambda k}{k'} \cos u - \frac{1}{k'} \frac{d\lambda}{dv} \operatorname{tg}\varphi.$$

Wir setzen nun

$$\frac{\lambda k}{k'} = \lambda', \quad \frac{1}{k'}\frac{d\lambda}{dv}\operatorname{tg}\varphi = \mu, \qquad \text{XXX.}$$

so dass wir erhalten:

$$\cos u' = \lambda' \cos u - \mu;$$

dann wird

$$\frac{\partial u'}{\partial u} = \frac{\lambda' \sin u}{\sin u'}; \quad \frac{\partial u'}{\partial v} = -\frac{1}{\sin u'}\left(\frac{d\lambda'}{dv}\cos u - \frac{d\mu}{dv}\right).$$

Setzen wir diese Werte für u' und seine Ableitungen in XXVII. ein, so kommt

$$\lambda' \sin u(d\vartheta - k\operatorname{ctg}\varphi \sin u dv) - \sin u'(d\vartheta' - k'\operatorname{ctg}\varphi' \sin u' dv') + d\lambda' \cos u - d\mu = 0,$$

oder, da

$$k'\operatorname{ctg}\varphi' dv' = \frac{k'}{\lambda}\operatorname{ctg}\varphi\, dv = \frac{k}{\lambda'}\operatorname{ctg}\varphi\, dv$$

und

$$\sin u' = \sqrt{(1-\mu^2) + 2\lambda'\mu\cos u - \lambda'^2 \cos u^2},$$

$$\lambda' \sin u\, d\vartheta - k\lambda' \operatorname{ctg}\varphi \sin u^2 dv - \sin u' d\vartheta' + \frac{k}{\lambda'}\operatorname{ctg}\varphi\, dv[(1-\mu^2)$$
$$+ 2\lambda'\mu\cos u - \lambda'^2\cos u^2] + d\lambda'\cos u - d\mu = 0,$$

oder, indem wir das Glied mit $\sin u'$ auf die rechte Seite bringen und quadriren:

$$[\lambda' \sin u d\vartheta + (2k\mu \operatorname{ctg}\varphi dv + d\lambda')\cos u - (d\mu + (\lambda'^2 + \mu^2 - 1)\frac{k}{\lambda'}\operatorname{ctg}\varphi\, dv]^2$$
$$= [(1-\mu^2) - 2\lambda'\mu\cos u - \lambda'^2\cos u^2].d\vartheta'^2.$$

Wir setzen jetzt $\operatorname{tg}\frac{u}{2} = w$, so kommt

$$[2w\lambda' d\vartheta + (2k\mu \operatorname{ctg}\varphi\, dv + d\lambda')(1-w^2)$$
$$-(d\mu + \frac{k}{\lambda'}(\lambda'^2 + \mu^2 - 1)\operatorname{ctg}\varphi\, dv)(1+w^2)]^2 = [(1-\mu^2)(1+w^2)^2$$
$$+ 2\lambda'\mu(1-w^4) - \lambda'^2(1-w^2)^2].d\vartheta'^2$$

Diese Gleichung, welche in Bezug auf w vom vierten Grade ist, muss aber für jeden Wert von w bestehen, da alle übrigen Grössen ausser w von u unabhängig sind. Es müssen also, wenn man beide Seiten der Gleichung nach Potenzen von w ordnet, die Coefficienten der einzelnen Potenzen gleich sein.

Dies führt auf die Bedingungen:

$$
\text{XXXI.}\quad
\begin{cases}
\left(2k\mu\operatorname{ctg}\varphi dv+d\lambda'-d\mu-\frac{k}{\lambda'}(\lambda'^2+\mu^2-1)\operatorname{ctg}\varphi dv\right)^2 \\
\qquad\qquad = (1-(\mu-\lambda')^2)\,d\vartheta'^2, \\
4\lambda' d\vartheta\left(2k\mu\operatorname{ctg}\varphi dv+d\lambda'-d\mu-\frac{k}{\lambda'}(\lambda'^2+\mu^2-1)\operatorname{ctg}\varphi dv\right)=0, \\
4\lambda'^2 d\vartheta^2-2\big[(2k\mu\operatorname{ctg}\varphi dv+d\lambda')^2 \\
\qquad -(d\mu+\frac{k}{\lambda'}(\lambda'^2+\mu^2-1)\operatorname{ctg}\varphi dv)^2\big] \\
\qquad = 2\,(1-\mu^2+\lambda'^2)\,d\vartheta'^2, \\
-4\lambda' d\vartheta\left(2k\mu\operatorname{ctg}\varphi dv+d\lambda'+d\mu+\frac{k}{\lambda'}(\lambda'^2+\mu^2-1)\operatorname{ctg}\varphi dv\right)=0. \\
\left(2k\mu\operatorname{ctg}\varphi dv+d\lambda'+d\mu+\frac{k}{\lambda'}(\lambda'^2+\mu^2-1)\operatorname{ctg}\varphi dv\right)^2 \\
\qquad\qquad = (1-(\mu+\lambda')^2)\,d\vartheta'^2.
\end{cases}
$$

Da λ' nicht Null sein kann, wenn nicht λ oder k Null ist, so können wir den Fall $\lambda'=0$ zunächst ausschliessen, denn $\lambda=0$ würde überhaupt keine Fläche liefern, $k=0$ führt auf Rotationsflächen. Den Fall $d\vartheta=0$ lassen wir auch vorläufig ausser Acht. Dann können die zweite und die vierte der gefundenen Bedingungsgleichungen nur erfüllt werden, wenn

$$2k\mu\operatorname{ctg}\varphi\, dv+d\lambda'=0,$$

$$d\mu+\frac{k}{\lambda'}(\lambda'^2+\mu^2-1)\operatorname{ctg}\varphi\, dv=0.$$

Dann aber geben die drei übrigen Gleichungen

$$
\begin{gathered}
(1-(\mu-\lambda')^2)\,d\vartheta'^2=0,\\
(1-(\mu+\lambda')^2)\,d\vartheta'^2=0,\\
2\lambda'^2 d\vartheta^2=(1-\mu^2+\lambda'^2)\,d\vartheta'^2.
\end{gathered}
$$

Lassen wir auch noch die Lösung $d\vartheta'=0$ ausser Acht, so folgt, $\mu=0$, $\lambda'^2=1$, $d\vartheta^2=d\vartheta'^2$; diese Bedingungen erfüllen die sämmtlichen Gleichungen und führen zu folgenden Bestimmungen. Aus $\mu=0$ folgt, da φ nicht constant Null sein kann, $\frac{d\lambda}{dv}=0$, also $\lambda=$ const. Den Wert $\lambda'=-1$ kann man ausschliessen, da man λ und k und k' immer positiv wählen kann.

Ferner ergiebt sich

$$\left.\begin{aligned} &k' = \lambda k; \quad \sin\varphi' = \lambda \sin\varphi; \quad u' = \pm u; \\ &v' = \int \frac{\cos\varphi\, dv}{\sqrt{1-\lambda^2 \sin\varphi^2}}; \quad d\vartheta' = \pm d\vartheta. \end{aligned}\right\} \quad \text{XXXII.}$$

Die Gleichung $d\vartheta' = \pm d\vartheta$ zeigt, dass jeder Fläche (P') eine symmetrische Fläche entspricht, wenn die Torsion von (M_1) und (M_1') nicht Null ist; die Gleichung $u' = \pm u$ zeigt, dass auf jeder Fläche (P'), welche krümmungsverwandt mit (P) ist, entgegengesetzte Azimuthe gewählt werden dürfen, um von einer krümmungsverwandten Abbildung zu einer symmetrischen zu kommen. Beides ist selbstverständlich, und es genügt daher, die positiven Vorzeichen allein festzuhalten.

Es bleiben noch die Fälle $d\vartheta = 0$ und $d\vartheta' = 0$ zu untersuchen.

Wäre $d\vartheta = 0$, aber nicht $d\vartheta' = 0$, so würde aus der ersten, dritten und fünften Gleichung folgen

$$\begin{aligned}(1-(\mu-\lambda')^2)(1-(\mu+\lambda')^2) &= (1-\mu^2+\lambda'^2)^2 \\ &= (1-(\mu-\lambda')(\mu+\lambda'))^2,\end{aligned}$$

oder $\lambda'^2 = 0$, was wir noch ausgeschlossen haben.

Ist $d\vartheta' = 0$, so folgt aus der ersten und letzten Gleichung

$$2k\mu \operatorname{ctg}\varphi\, dv + d\lambda' = 0,$$

$$d\mu + \frac{k}{\lambda'}(\lambda'^2 + \mu^2 - 1)\operatorname{ctg}\varphi\, dv = 0,$$

und dann aus der dritten $d\vartheta = 0$. Diesen Bedingungen kann erstens, wie im allgemeinen Fall, durch die Gleichungen XXXII. genügt werden. Es existirt indes noch eine zweite Lösung. Es ist nämlich nach (XXX.):

$$\mu \operatorname{ctg}\varphi\, dv = \frac{d\lambda}{k'}.$$

Setzt man dies in beide Gleichungen ein, so kommt

$$\frac{2k}{k'} d\lambda + d\lambda' = 0,$$

$$\mu\, d\mu + \frac{k}{k'} \frac{\lambda'^2 + \mu^2 - 1}{\lambda'} d\lambda = 0.$$

Da $\frac{k}{k'} = \frac{\lambda'}{\lambda}$ ist, ergiebt die erste dieser beiden Gleichungen

$$\lambda^2 \lambda' = a, \quad \text{oder} \quad \lambda' = \frac{a}{\lambda^2};$$

wo a die Integrationsconstante bedeutet; und mit Rücksicht hierauf liefert die zweite

$$\mu\, d\mu + \frac{a}{\lambda^3}\left(\frac{a^2}{\lambda^4} + \mu^2 - 1\right)\frac{\lambda^2}{a} \cdot d\lambda = 0, \quad \text{oder}$$

$$2\lambda^2\mu\, d\mu + \frac{2a^2}{\lambda^3} d\lambda + 2(\mu^2 - 1)\,\lambda\, d\lambda = 0, \quad \text{d. h.}$$

$$(\mu^2 - 1)\lambda^2 - \frac{a^2}{\lambda^2} = b,$$

wo b die Integrationsconstante bedeutet; also

$$\mu^2 = \left(1 + \frac{b}{\lambda^2} + \frac{a^2}{\lambda^4}\right)$$

Ist nun (P) gegeben, so sind k und φ als gegebene Functionen von v zu betrachten. Nun ist mit Rücksicht auf XXX. λ als Function von v bestimmt, und so erhalten wir die Formeln:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\lambda}{\lambda\sqrt{\lambda^4 + b\lambda^2 + a^2}} = k \operatorname{ctg} \varphi\, dv \\
&v' = \int \frac{\cos\varphi\, dv}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin\varphi^2}}, \\
&k' = \frac{\lambda^3}{a} k, \\
&\sin\varphi' = \lambda \sin\varphi, \\
&\cos u' = \frac{a}{\lambda^2}\cos u + \sqrt{1 + \frac{b}{\lambda^2} + \frac{a^2}{\lambda^4}}.
\end{aligned}\right\} \quad \text{XXXIII.}$$

Hierdurch ist die Curve (M_1') und die mit (P) vollkommen krümmungsverwandte Fläche (P') vollständig bestimmt.

Wir betrachten endlich den Fall $\lambda' = 0$, welcher nur eintritt, wenn entweder $\lambda = 0$, oder $k = 0$. Die Bedingung $\lambda = 0$ kann ganz ausser Acht gelassen werden, denn sie hat zur Folge, dass $\sin\varphi' = 0$, dass also die Fläche (P') in eine Curve, und zwar eine Evolvente der Curve (M_1') übergeht. Es bleibt somit nur der Fall übrig, dass $k = 0$ ist. In diesem Falle ist die Curve (M_1) eine Gerade, und die Flächen (P) und (M_2) sind Rotationsflächen, welche (M_1) zur Axe haben. Die Entwickelungen von Formel XXIX an werden dann illusorisch, wir gehen deshalb auf die früheren Formeln zurück. Die Formel XXIX. liefert

$$k' \cos u' = -\operatorname{tg}\varphi \frac{d\lambda}{dv}.$$

Soll nun nicht jedem Parallelkreis auf (P) nur e i n Paar von Punkten auf (P) entsprechen, sondern wieder ein Parallelkreis, dann

darf diese Gleichung u' nicht bestimmen; dies fordert aber, dass beide Seiten einzeln Null sind, und da φ nicht constant Null sein kann, so folgt $\frac{d\lambda}{dv} = 0$, also λ constant, und $k' = 0$, also auch (M_1') ist eine Gerade, und (P') und (M_2') sind Rotationsflächen mit der Axe (M_1').

Die Bedingungen der Krümmungsverwandtschaft reduciren sich auf

$$\sin\varphi' = \lambda \sin\varphi$$

$$v' = \int \frac{\cos\varphi\, dv}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin\varphi^2}}$$

Die sämmtlichen Flächen, welche zu einer gegebenen Rotationsfläche (P) krümmungsverwandt sind, sind also wieder Rotationsflächen und unterscheiden sich von einander nur durch die Werte der Constanten λ. Der Unterschied zwischen einseitiger und vollkommener Krümmungsverwandtschaft verliert, wenn beide Flächen Rotationsflächen sind, seine Bedeutung; da jedem Punkte eines Parallelkreises jeder beliebige Punkt des entsprechenden Parallelkreises entspricht. Sind die Flächen einseitig krümmungsverwandt mit entsprechenden Parallelkreisen, so sind sie vollkommen krümmungsverwandt, sobald man festsetzt, dass irgend einem Meridian der einen Fläche wieder ein Meridian der andern entspricht.

Wir fassen nun das Resultat dieser Untersuchung folgendermassen zusammen:

Man kann die Aufgabe, zu einer gegebenen Fläche (P) mit einer Mittelpunktslinie (M_1) alle vollkommen krümmungsverwandten Flächen zu suchen, ganz allgemein lösen und erhält drei wesentlich verschiedene Fälle, jenachdem die Mittelpunktscurve doppelt gekrümmt, einfach gekrümmt oder gerade ist.

1) Ist (M_1) doppelt gekrümmt, so ist es auch (M_1'), und es giebt eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit von Flächen, welche vollkommen krümmungsverwandt mit (P) sind, die sich nur durch den constanten Parameter λ unterscheiden.

2) Ist (M_1) einfach gekrümmt, also eben, so ist es auch (M_1'), und die Mannigfaltigkeit der zu (P) vollkommen krümmungsverwandten Flächen ist bei weitem grösser, da λ sowol eine beliebige Constante, als auch eine gewisse Function von v sein kann, welche von drei Parametern abhängt.

3) Ist (M_1) gerade, so ist es auch (M_1'), und die Flächen (P) und (P') sind Rotationsflächen. In diesem Falle ist die Verwandtschaft vom Azimuth unabhängig, es entspricht jedem Parallelkreis der einen Fläche ein solcher der anderen. Der Unterschied zwischen einseitiger und vollkommener Krümmungsverwandtschaft verliert seine Bedeutung.

Uebrigens folgt aus dem Früheren, dass die nicht degenerirten Mittelpunktsflächen (M_2) und (M_2') zweier krümmungsverwandter Rotationsflächen stets auf einander abwickelbar sind, da man von der Dehnung, die oben besprochen ist, absehen kann, weil sie in diesem Falle etwas Selbstverständliches aussagt; und ebenso folgt umgekehrt, dass wenn (M_2) und (M_2') zwei auf einander abwickelbare Rotationsflächen sind, sie entsprechende Mittelpunktsflächen krümmungsverwandter Rotationsflächen sind.

Daraus folgt: Notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass zwei Rotationsflächen (M_2) und (M_2') aufeinander abwickelbar seien, ist, dass die Längen der Tangenten in entsprechenden Punkten der Meridiancurven, vom Berührungspunkt bis zur Rotationsaxe gemessen, einander gleich seien.

Dies giebt zugleich eine anschauliche Construction krümmungsverwandter Rotationsflächen.

Man denke sich zu der Meridiancurve (p) die Evolute (m_2) construirt und ziehe in jedem beliebigen Punkte P die Normale, welche die Evolute in M_2 berührt und die Rotatiosaxe in M_1 schneidet Nun biege man die Evolute (m_2), ohne sie zu dehnen, ohne die Längen PM_2 und M_2M_1 zu ändern, und so, dass die Punkte M_1 wieder auf eine Gerade (M_1') zu liegen kommen; dann erhält man eine neue Curve (p') mit ihrer Evolute (m_2'). Nimmt man diese zu Meridiancurven, und (M_1') zur Rotationsaxe, so sind die entsprechenden Rotationsflächen (M_2) und (M_2') aufeinander abwickelbar, und (P) und (P') krümmungsverwandt.

11. Vereinfachung für Rotationsflächen.

Obwohl die Aufsuchung von Rotationsflächen, welche mit einer gegebenen krümmungsverwandt sind, sich nach den allgemeinen Formeln ohne Schwierigkeit durchführen lässt, so möge doch noch auf eine einfache Methode zur Lösung der Aufgabe hingewiesen werden.

Wir beziehen die Meridiancurve (p) auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen Abscissenaxe die Rotationsaxe ist, und dessen Anfangspunkt ein beliebiger Punkt derselben ist, bezeichnen die Abscisse des Punktes P mit z, die Ordinate mit r, dann ist φ der Winkel, den die Normale mit der z Axe bildet, also

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{dz}{dr}; \quad \sin\varphi = \frac{dz}{\sqrt{dz^2+dr^2}}; \quad \cos\varphi = -\frac{dr}{\sqrt{dz^2+dr^2}};$$

$$\varrho_1 = \frac{r}{\sin\varphi}.$$

Bezeichnen wir für eine krümmungsverwandte Rotationsfläche die entsprechenden Stücke mit denselben Buchstaben, aber mit Accenten versehen, so wird die Bedingung der Krümmungsverwandtschaft

$$\sin\varphi' = \lambda\sin\varphi, \quad \varrho_1 = \frac{r}{\sin\varphi} = \frac{r'}{\sin\varphi'};$$

also

$$r' = \lambda r \quad \text{und} \quad \frac{dz'}{dr} = -\operatorname{tg}\varphi' = -\frac{\lambda\sin\varphi}{\sqrt{1-\lambda^2\sin\varphi^2}},$$

oder

$$\frac{dz'}{dr'} = \frac{\lambda\, dz}{\sqrt{dz^2+dr^2-\lambda^2 dz^2}},$$

d. h. die Gleichungen

$$dz' = \frac{\lambda^2\, dr\, dz}{\sqrt{(1-\lambda^2)\,dz^2+dr^2}} \quad \text{und} \quad r' = \lambda r \qquad \text{XXXIV.}$$

ergeben, wenn r und z als Functionen einer Variablen gegeben sind, auch r' und z' als Functionen dieser Variablen, liefern also die ganze Schaar krümmungsverwandter Rotationsflächen. Die Integrationsconstante ist für das Problem unwesentlich, weil sie nur von der Wahl des Anfangspunktes auf der z' Axe abhängt; die verschiedenen Meridiancurven unterscheiden sich wesentlich nur durch den Wert des Parameters μ.

Ein besonders einfaches Beispiel bietet der Fall, wo die gegebene Meridiancurve ein Kegelschnitt ist, dessen eine Axe der Rotationsaxe parallel ist.

Dann ist

$$\alpha z^2 + 2az + \beta r^2 + 2br - c = 0, \qquad \text{XXXV.}$$

also

$$(\alpha z + a)\,dz + (\beta r + b)\,dr = 0, \quad \text{d. h.}$$

$$dz = -\frac{(\beta r+b)}{(\alpha z+a)}\,dr = -\frac{(\beta r+b)\,dr}{\sqrt{(a^2+\alpha c)-\alpha(\beta r^2+2br)}}.$$

Also wird

$$dz' = -\frac{\lambda^2(\beta r + b)dr}{\sqrt{(1-\lambda^2)(\beta r + b)^2 + (a^2 + \alpha c) - \alpha(\beta r^2 + 2br)}},$$

oder

$$dz' = -\frac{\lambda^2(\beta r + b)\,dr}{\sqrt{[a^2 + \alpha c + b^2(1-\lambda^2)] - [\alpha - \beta(1-\lambda^2)](\beta r^2 + 2br)}}.$$

Nun ist $r = \frac{r'}{\lambda}$, also

$$dz' = -\frac{(\beta r' + \lambda b)dr'}{\sqrt{a^2 + \alpha c + b^2(1-\lambda^2) - \frac{\alpha - \beta(1-\lambda^2)}{\lambda^2}(\beta r'^2 + 2b\lambda r')}}.$$

Wir setzen nun

$$\left.\begin{aligned} \lambda b &= b', \\ \frac{\alpha - \beta(1-\lambda^2)}{\lambda^2} &= \alpha', \\ a^2 + \alpha c + b^2(1-\lambda^2) &= a'^2 + \alpha' c, \end{aligned}\right\} \qquad \text{XXXVI.}$$

dann wird

$$dz' = -\frac{(\beta r' + b')dr'}{\sqrt{(a'^2 + \alpha' c) - \alpha'(\beta r'^2 + 2b'r')}}.$$

Diese Gleichung stimmt der Form nach vollständig mit der für dz überein, wir können also, da es auf die Lage des Anfangspunktes auf der z' Axe nicht ankommt, die Integrationsconstante so wählen, dass das Integral wird:

$$\alpha' z^2 + 2a'z + \beta r^2 + 2b'r - c = 0. \qquad \text{XXXVII.}$$

Wir erhalten somit das Resultat:

Die sämmtlichen Flächen, welche vollkommen krümmungsverwandt sind mit einer Rotationsfläche, welche zur Meridiancurve einen Kegelschnitt hat, dessen eine Axe der Rotationsaxe parallel ist (XXXV), sind Flächen von eben demselben Charakter (XXXVII), deren Coefficienten durch die Gleichungen XXXVI. zusammenhängen.

Hieraus können wir mit Rücksicht auf die früheren Resultate die Folgerung ziehen:

Die sämmtlichen Rotationsflächen, welche abwickelbar sind auf eine Rotationsfläche, deren Meridiancurve die Evolute eines Kegelschnittes ist, dessen eine Axe parallel der Rotationsaxe ist, sind Flächen von eben demselben Charakter, und weiter:

Biegt man die Evolute (m_2') eines Kegelschnittes so, dass die Längen der Tangenten vom Berührungspunkt M_2 bis zu einer Geraden (M_1), welche parallel einer Axe des Kegelschnittes ist, ungeändert bleiben, dass also die Endpunkte M_1' wieder auf einer Geraden (M_1') liegen, so ist die gebogene Curve wieder die Evolute eines Kegelschnittes, dessen eine Axe parallel (M_1') ist.

Zur weiteren Discussion kann man sich auf die Betrachtung der beiden vollkommen krümmungsverwandten Flächen XXXV. und XXXVII. beschränken. Hierbei ergiebt sich Folgendes.

1) Die Abbildung ist nur reell, wenn der Radicand des Ausdrucks für ds' posisiv ist. Dies giebt bei jedem Wert von λ eine bestimmte Zone, innerhalb welcher überhaupt die Abbildung nur reell wird, und es kann λ so gewählt werden, dass kein Punkt reell abgebildet wird. Für $\lambda = 1$ wird die Abbildung mit dem Original identisch. Je weniger λ von 1 verschieden ist, desto weiter wird die Zone, welche sich reell abbildet.

2) Ist $b = 0$, so ist es auch b'. Ist also das Original eine Rotationsfläche zweiten Grades, so sind es auch alle vollkommen krümmungsverwandten Abbildungen.

3) Ist $\beta = 0$, so wird

$$b' = \lambda b; \quad \alpha' = \frac{\alpha}{\lambda^2}; \quad a'^2 = a^2 + b^2(1-\lambda^2) + \alpha c\left(1 - \frac{1}{\lambda^2}\right).$$

Ist also der Meridian des Originals eine Parabel, deren Axe senkrecht zur Rotationsaxe steht, so gilt dasselbe von allen krümmungsverwandten Abbildungen.

4) Ist β nicht Null, so können wir es stets positiv voraussetzen. Dann werden die Meridiane der vollkommen krümmungsverwandten Abbildungen im Allgemeinen keine Parabeln; nennen wir die Halbaxe parallel der Rotationsaxe A, respective A', die darauf senkrechten B, respective B', so ergiebt sich

$$A'^2 = \frac{\left(a^2 + \alpha c + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) b^2\right)\lambda^4}{\left(\frac{\alpha}{\beta} - 1 + \lambda^2\right)^2 \beta^2},$$

$$B'^2 = \frac{\left(a^2 + \alpha c + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) b^2\right)\lambda^2}{\left(\frac{\alpha}{\beta} - 1 + \lambda^2\right) \beta^2},$$

welche Werte für $\lambda = 1$ in A^2 und B^2 übergehen. Hieraus erkennt man leicht folgende Gesetze:

a) Ist $\frac{\alpha}{\beta} - 1 + \lambda^2 > 0$,

so ist die Meridiancurve eine Ellipse, und zwar reell oder imaginär, jenachdem der Zähler von A' und von B' positiv oder negativ ist Den Uebergangsfall, wo der Zähler Null ist, bildet die Punktellipse.

b) Ist $\frac{\alpha}{\beta} - 1 + \lambda^2 < 0$,

so ist die Meridiancurve eine Hyperbel, deren reelle Axe parallel oder senkrecht zur Rotationsaxe steht, jenachdem der Zähler von A' oder B' positiv oder negativ ist. Den Uebergangsfall bilden zwei sich schneidende Gerade (wenn der Zähler Null ist).

c) Ist $\frac{\alpha}{\beta} - 1 + \lambda^2 = 0$,

so wird die Meridiancurve eine Parabel mit der Gleichung

$$2a'z + \beta r^2 + 2b'r - c = 0,$$

deren Axe parallel der Rotationsaxe ist.

12. Flächen mit zwei Mittelpunktscurven.

Sind beide Mittelpunktsflächen in Curven degenerirt, so müssen diese Curven Kegelschnitte sein, und zwar muss jeder Kegel, welcher durch einen derselben hindurchgeht und einen Punkt des andern zum Scheitel hat, ein gerader Kreiskegel sein. Dies ist bekanntlich dann und nur dann der Fall, wenn die Kegelschnitte (M_1) und (M_2) in Ebenen liegen, welche zu einander senkrecht stehen, und bei denen die Scheitel des einen die Brennpunkte des andern sind. Die zugehörigen Evolutenflächen sind dann die bekannten Darboux'schen Cycliden (von Steiner „Wurstflächen" genannt).

Die Kegelschnitte (M_1) und (M_2) können im Speciellen auch zwei Parabeln sein, welche in senkrechten Ebenen liegen, und bei denen der Scheitel des einen der Brennpunkt des andern ist, und umgekehrt, oder sie können übergehen in einen Kreis und seine Axe. In letzterem Falle werden die Evolventenflächen (P) Rotationsflächen von Kreisen.

Die Darboux'schen Cycliden sind demnach die einzigen Flächen, deren beide Mittelpunktsflächen in Curven degenerirt sind. Ihre Krümmungslinien sind sämmtlich Kreise.

Ist eine Mittelpunktsfläche in einen Punkt degenerirt, so ist selbstverständlich die Fläche (P) eine Kugel.

Wenn man von der Realität absieht, sind im Allgemeinen alle Darboux'schen Cycliden unter einander vollkommen krümmungsverwandt. Nur wenn die Originalfläche die Rotationsfläche eines Kreises ist, muss jede vollkommen krümmungsverwandte Fläche es ebenfalls sein.

Nachträgliche Bemerkung, insbesondere den Abschnitt 9. betreffend.

Der Fall in 9., dass $d\vartheta$ constant gleich Null ist, also (M_1) eine ebene Curve, ist ebenfalls bemerkenswert. Alsdann liefert die Integration von XXIV., wenn a eine willkürliche Constante bedeutet,

$$\operatorname{tg}\frac{u}{2} = a e^{\int \operatorname{ctg}\varphi\, dr}.$$

Ist noch specieller (M_1) ein Kreis mit dem Radius r, und ferner φ constant, so wird die nicht degenerirte Mittelpunktsfläche (M_2) ein Rotationshyperboloid mit der Gleichung

$$\frac{x_2^2 + y_2^2}{r^2 \cos\varphi^2} - \frac{z_2^2}{r^2 \sin\varphi^2} = 1.$$

Jeder Punkt dieses Hyperboloides ist Krümmungscentrum für zwei verschiedene Punkte einer zugehörigen Evolventenfläche (P). Das Hyperboloid ist also doppelt zu denken. Den sphärischen Krümmungslinien $v = \text{const.}$ entsprechen auf (M_2) diejenigen Hyperbeln, deren Ebenen die Polarebenen der entsprechenden Punkte M_1 sind. Den nicht sphärischen Krümmungslinien $\operatorname{tg}\frac{u}{2} = a e^{\frac{v \operatorname{ctg}\varphi}{r}}$ entsprechen auf (M_2) Kürzeste, welche jene Hyperbeln in conjugirten Richtungen schneiden. Durch jeden Punkt auf (M_2) gehen zwei jener Hyperbeln und dementsprechend zwei Kürzeste der oben charakterisirten Schaar. — Wir sind so beiläufig zu einer interessanten Eigenschaft der einschaligen Rotationshyperboloide geführt.

Auch wenn man (M_1) als Kreis und φ proportional v annimmt, gelangt man zu interessanten Specialfällen.

Schliesslich will ich nicht unterlassen, darauf hinzuweisen, dass einige Resultate der Abschnitte 9. und 12. bereits früher von Elliot (Note sur la cyclide-Darboux Bull. (2) III) und Ribaucour (Mém. sur les courbes enveloppes de cercles etc. Nouv. Corr. Math. V. 1879) ausgesprochen sind.

Litterarischer Bericht
CCLXXI.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Wilhelm Herschel. Sein Leben und seine Werke. Von Edward S. Holden. Uebersetzt von R. V. Mit einem Vorwort von Prof. Dr. W. Valentiner, Vorstand der grossh. Sternwarte zu Karlsruhe. Berlin 1882. Wilhelm Hertz. Kl. 8⁰. 238 S.

Dem Verfasser, einem sehr befähigten Astronomen in Washington, standen zur Darstellung des Lebens und der Werke W. Herschel's nur die Memoiren seiner Schwester, dessen eigene, namentlich in den Philosophical Transactions erschienene wissenschaftliche Abhandlungen und die Mitteilungen und Tagebücher seiner Zeitgenossen zu Gebote, während zu späterer Vervollständigung noch manches auf dem Familiensitz aufbewahrtes Material vorhanden ist. Die Memoiren (s. den 241. litt. Ber. S. 2) sind bereits für die Bestimmung als Biographie zu dienen zusammengestellt und ergänzt, und bilden auch hier, wo der Verfasser vorwiegend die Quellen reden lässt, mit einer für die Charakteristik getroffenen Auswahl den Hauptteil der Darstellung. Was der Leser aber darin nicht findet, und in Anbetracht der eng begrenzten Beteiligung der Schwester an den Arbeiten nicht zu finden erwarten konnte, sind die wissenschaftlichen Grundsätze, Ansichten und Gesichtspunkte, über welche W. Herschel nicht so schweigsam gewesen ist, als es nach jenen den Anschein hat. Ueber diese werden hier seine Aeusserungen in ihrer erstaunlichen Vielseitigkeit ans Licht gezogen, und mit grosser Sorgsamkeit seine Denkweise Punkt für Punkt entfaltet. Die Memoiren lassen es unerklärt, wie er bei seinem Uebergang von der Musik zur Astronomie unmittelbar mit einer so hohen theoretischen und technischen Ausbildung auftreten konnte. Im Gegenwärtigen erfahren wir, dass er in der Tat eine bewundernswerte Fähigkeit besass, die verschiedenartigsten

Arbeiten zu gleicher Zeit auszuführen, dass seine astronomischen Studien schon sehr frühzeitig begonnen haben, und als schon längst die Astronomie sein Beruf war, die musikalischen Aufführungen und der Unterricht nicht unterblieben. Von Anfang an war es sein Grundsatz auf keine fremde Beobachtung zu vertrauen, bis er sie mit eigenen Augen erneuert hatte. Dieser Grundsatz trieb ihn dazu an die Instrumente der Beobachtung weiter zu vervollkommnen, als es allen Vorgängern gelungen war; hierzu bedurfte er der Ausbildung technischer Fertigkeit, die er im Kleinen begann und unermüdlich fortsetzte. Zu den Memoiren kommen als wichtiges Document die eigenen biographischen Angaben hinzu, welche W. Herschel für das Göttinger Magazin der Wissenschaften und Litteratur im 45. Lebensjahre an den Herausgeber auf dessen Bitte gesandt hat, und welche auch das Vorstehende enthalten. Sie geben ausser den Schicksalen über die Studien, die Anfertigung der Fernröhre und die Entdeckung des Uranus Auskunft. Herschel begann seine Tätigkeit damit, den ganzen sichtbaren Himmel zu durchsuchen und jede auffallende Erscheinung zu notiren und näher zu beobachten. Zu diesen gehörten die Kometen, die Trabanten, die Planetoiden, die Nebelflecke, die veränderlichen und die Doppelsterne, deren Kenntniss auf diesem Wege um eine bedeutende Anzahl vermehrt werden musste, die Trabanten und 4 Planetoiden betreffend fast ganz neu hinzukam. Diese Entdeckungen werden erst nach Zeitfolge beschrieben, dann in der „Uebersicht der wissenschaftlichen Arbeiten“ besonders behandelt: die Verbesserung der Teleskope und optischen Werkzeuge; die Untersuchungen über die relative Helligkeit der Sterne und die veränderlichen Sterne; die Untersuchungen über Doppelsterne; über Planeten und Satelliten; über die Natur der Sonne; über die Bewegung der Sonne und des Sonnensystems im Weltraume; über den Bau des Himmels; Untersuchungen zur Erlangung eines für himmlische Entfernungen geeigneten Masses; Untersuchungen über Licht und Wärme u. s. w.; über die Dimensionen der Sterne; über die Spectra der Fixsterne; über die Veränderlichkeit der Ausstrahlung von Licht und Wärme von der Sonne; über Nebelflecke und Sternhaufen. Dann folgt das Verzeichniss der astronomischen Schriften Wilhelm Herschel's in chronologischer Anordnung, dann das Verzeichniss der Schriften, welche sich auf sein Leben und seine Werke beziehen. H.

•

Das Zahlenwesen der Völker im Alterthume und die Entwicklung des Zifferrechnens. Von Prof. Franz Villicus. Aus den Jahresberichten der k. k. Staats-Realschule und der gewerblichen Fortbildungsschule am Schottenfelde für die 2 Studienjahre 1879—81. Wien 1880. 1881. L. W. Seidel u. Sohn. 69 S.

Die Schrift handelt hauptsächlich von den Anfängen des Zahlbegriffs und Zahlgebrauches und stellt eine grössere Anzahl ausgewählter Zeugnisse über das Zahlenwesen nicht nur der alten, sondern mehr noch der nicht oder weniger civilisirten Völker Afrikas und Amerikas aus neuster Zeit zusammen, welche in grosser Uebereinstimmung auf den ursprünglichen Ausdruck der Zahl in Fingern und Zehen hinweisen. Hiernach sind einige Völker überhaupt beim blossen stummen Vorzeigen der Finger- und Handstellung stehen geblieben, andere haben das Wort, noch andere auch das Schriftzeichen hinzugefügt. Als Folge dieses Ursprungs findet man teils das Fünfer-, teils das Zehner-, teils das Zwanzigersystem entwickelt. Es wird nach einander besprochen: das Fingerrechnen; die Zahlenzeichen und das Zahlensystem der alten Völker; das Rechnen mit Hülfe eines Rechenapparates, des Abacus und auf der Linie; die Zählungssysteme in plastischer und lautlicher Darstellung; das älteste Rechnen der Völker; die indische Rechenkunst nach Brahmagupta und Bhascara. H.

Materialien zur Entwickelung der altjüdischen Zeitrechnung im Talmud. Von Dr. B. Zuckermann. Breslau 1882. Preuss u. Jünger (Barschak). 68 S.

Der Gegenstand der Schrift ist das Verfahren und die Grundsätze der Feststellung des Monats- und Jahresanfangs durch einen Gerichtshof nach den Anordnungen des Talmuds, welche, wie vermutet wird, auch für die frühere Zeit, wo uns alle Nachricht fehlt, im wesentlichen gegolten haben. Der Monatsanfang richtete sich nach dem ersten Sehen der Mondsichel nach dem Neumond. Zur Beobachtung war niemand, zur Reise nach dem Gerichtsorte und Zeugnissablegung jeder Israelit, der sie gesehen hatte, verpflichtet. Auf Grund dieser Zeugenaussagen urteilten 3 Richter, die für Debatten ihr Collegium zu 5, für Beschlussfassung zu 7 erweitern durften, nach Majorität. Der Jahresanfang ward im Laufe des 12ten Monats nach der Gerstenernte festgesetzt, und ein 13ter Monat eingeschoben, wenn im nächstfolgenden Monat dieselbe nicht zu erwarten war. Die vielen durch ein solches Verfahren notwendig gewordenen Specialbestimmungen und die Vorfälle, welche sich bei der Ausübung ereignet haben, machen den Inhalt der Schrift aus. Von einigen Versuchen zu einem astronomisch geregelten Kalender überzugehen ist am Schlusse die Rede, doch liegt nur ein Entwurf vor, der nie zur Annahme gelangt ist. H.

Marcus Baker. The history of Malfatti's problem. Bulletin of the Philosophical Society of Washington, vol. II. p. 113—123.

Das Vorliegende ist ein Vortrag, welcher von einem Artikel der Trans. of the R. Soc. of Edinb. von H. F. Talbot über neue Untersuchungen über Malfatti's Problem ausgeht, und weil der Verfasser, und ebenso alle andern Autoren, die wichtige Schrift von Paucker übersehen haben, Anlass nimmt die Geschichte des Problems von Anfang an vorzuführen. Nachdem die Lösungen von Malfatti, Gergonne, Crelle, Lehmus und Steiner besprochen sind, wird über die genannte Schrift Folgendes mitgeteilt. Paucker analysirt das Problem und giebt dann eine Lösung, welche nur unwesentlich von der Steinerschen abweicht, indem St. eine Tangente an einen der 3 Partial-Inkreise zieht, die dann auch den zweiten berührt, P. hingegen eine Verbindungsgerade zieht und die Doppelberührung beweist. Letzterer fügt auch zur Lösung einen Beweis hinzu. Die zwei Umstände, dass seine Lösung nur wenig über ein Jahr später erschien, und dass er alle frühern Autoren, nur nicht Steiner citirt, lassen vermuten, dass er die Lösung unabhängig von diesem gefunden hat. Er beweist die Richtigkeit der Construction nach Euklidischen Methoden, macht keinen Gebrauch von der neuern Geometrie und geht mit viel Sorgfalt in die Details. Er beginnt damit, viele Lemmata zu beweisen, worin ihm die spätern Schriftsteller gefolgt sind. Zwei derselben werden genannt, welche Hart im Quarterly Journal gleichfalls beweist ohne ihn zu citiren. P. giebt ferner eine zweite Lösung, ganz unabhängig von den Hülfskreisen, welche unmittelbar aus einem Satze von Pierre Tédenat hervorgeht, nebst einem Beweise dieses Satzes; ferner eine Modification von Crelle's und Lehmus' trigonometrischer Lösung. Die Abhandlung ist vollständig vom Standpunkt der alten Geometrie; doch zeigt der Verfasser keinen so weit umfassenden Blick und untersucht nicht die Frage nach der Anzahl der Lösungen wie Steiner. Von spätern Bearbeitern des Problems werden genannt: Zornow, Plücker, Hymer, Adams, Schellbach, Hart, Cayley, Talbot. Am Schluss folgt ein Litteraturverzeichniss. H.

Mitteilungen des Coppernicus-Vereins für Wissenschaft und Kunst zu Thorn. III. Heft. Herausgegeben vom Vorstande des Vereins 1881. IV. Heft. Herausgegeben im Auftrage des Vorstandes von dem ersten Schriftführer Maximilian Curtze. Thorn 1882. Ernst Lambeck.

Ueber den Beginn der Zeitschrift ist im 261. litt. Bericht S. 3. gesprochen. Hinzugekommen sind seitdem folgende Abhandlungen.

Im III. Heft 1) A. Favaro: Die Hochschule Padua zur Zeit des Coppernicus. Deutsch von M. Curtze.

2) G. Bender: Archivalische Beiträge zur Familiengeschichte des Nikolaus Coppernicus. Nebst Beilagen.

3) A. Prowe: Bogumil Goltz. Eine Gedächtniss-Rede, gehalten bei der 80. Wiederkehr seines Geburtstages.

Im IV. Heft 1) M. Curtze: Ergänzungen zu den „Inedita Coppernicana“ im I. Hefte dieser Mitteilungen.

2) H. Adolph: Das Geburtshaus des Nikolaus Coppernicus. Eine Widerlegung.

3) F. Hipler: Die Vorläufer des Nikolaus Coppernicus, insbesondere Celio Calcagnini. Mit einem Holzschnitte.

4) G. Bender: Weitere archivalische Beiträge zur Familiengeschichte des Nikolaus Coppernicus. Mit einem Holzschnitte.

H.

Methode und Principien.

Zur Theorie vom kosmischen Massendruck. Jahresbericht des Breslauer Physikalischen Vereins 1882. Breslau 1882. Wilh. Gottl. Korn.

Dieser Verein, welcher seit 11 Jahren besteht und gegenwärtig 112 Mitglieder zählt, verfolgt, soviel sich aus der vorliegenden Schrift entnehmen lässt, einzig und allein das Ziel die Grundlagen der Mechanik umzustossen. Mit einer solchen Tätigkeitsart steht ganz im Einklange die vorzugsweise Anführung von Namen beteiligter Personen, welche sich bereits durch kosmische Phantasien einen Ruf erworben haben. Im übrigen lässt sich bemerken, dass gerade in den Hauptgegenständen die vertretenden Autoren ungenannt bleiben. Der Verein verwirft die Attractionshypothese als „das grösste Hinderniss, welches seit 200 Jahren den Fortschritten in der Erkenntniss der Ursache der Bewegung im Wege steht“. Von den grossen Mängeln dieser Hypothese ist den Reden zufolge innerhalb des Vereins jedermann überzeugt. Worin sie bestehen, wird nirgends erklärt; es finden sich darüber nur ganz unbestimmte Aeusserungen, die eher auf Gewinnung der Sympathie Gleichdenkender als auf Verständniss berechnet sind. Dem Vorliegenden zufolge hat es den Anschein, als hätten es die Bestrebungen des Vereins 10 Jahre lang bei der Negative bewenden lassen. Dies wird wol nicht der Fall sein, doch mögen Versuche positiver Aufstellungen aus dieser Zeit keine so dauernde Annahme gefunden haben, dass sie hier erwähnt worden wären. Erst im vorigen Jahre ist ein, wieder nicht genannter Schrift-

steller mit einer „Theorie vom Massendruck aus der Ferne" aufgetreten, welche die Attractionstheorie ersetzen soll, und gegenwärtig vom Verein adoptirt wird. Ob der Druck etwas anderes bedeuten soll als die Anziehung, ist nicht gesagt; das Specifische scheint vielmehr zu sein, dass die Kraft durch Lichtstrahlen von einem leuchtenden Körper zu einer fremden Masse hingetragen wird. Hiernach gebraucht sie Zeit bis zum Beginn ihrer Wirksamkeit, eine Annahme die ohne Erfolg schon von Andern gemacht worden ist. Von Uebereinstimmung mit den Gesetzen der Erscheinungen ist indes hier nicht die Rede. Der Lichtstrahl soll also wol nur die Vorstellung der durch die Stellung der Massen erregten Kraft vermitteln. Einer Erklärung kommt man dadurch nicht näher; denn das Einfachste, was sich denken lässt, die Anziehung, wird auf einen complicirten Vorgang zurückgeführt, dessen Endwirkung nach aller Erfahrung unbegreiflich bleibt. Besondern Wert legt der Verein auf einen von Anderssohn verfertigten Demonstrationsapparat, genannt teilbarer Globus. Dieser stellt den kugelförmig begrenzten Weltraum, geteilt in 6 sich ausschliessende Pyramiden von quadratischer Basis dar. Was auf dieser Kugel verzeichnet ist, und welcher Gebrauch davon gemacht wird, ist nicht angegeben; doch soll er sich vorzüglich dazu eignen, die Lehre vom Massendruck aus der Ferne zu veranschaulichen. Es ist bewundernswert, mit welchem Geschick die Redner des Vereins, der noch keine wissenschaftliche Leistung aufzuweisen hat, eine so würdevolle, vom Bewusstsein edeln wissenschaftlichen Strebens getragene Sprache zu führen wissen. Hoppe.

M. Sibiriakoff. Preuve élémentaire de la proposition fondamentale de la théorie des lignes parallèles. St. Petersburg (1872). Aug. Deubner. 9 S. (In russischer und französischer Sprache.)

Der Verfasser hat den fraglichen Beweis der Petersburger Akademie der Wissenschaften vorgelegt, von ihr einen Einwurf, und nach Widerlegung desselben einen zweiten andrer Art erhalten. Da er beide nicht anerkennt, so wendet er sich an das Urteil des Publicums. Wir müssen dem Verfasser darin Recht geben, dass er die Einwürfe nicht gelten lässt. Sie sind ohne sonderliche Aufmerksamkeit abgefasst und treffen den Punkt nicht. Der Fehler des Beweises liegt sehr nahe. Es werden zuerst 11 Sätze aufgeführt, die unabhängig vom Parallelensatz gelten, dann letzterer in der Form aufgestellt: Eine senkrechte und eine schräge Gerade von 2 Punkten einer Geraden AB gezogen schneiden sich. Zum Beweise wird von ersterem Punkte ein Lot auf die Schräge gefällt und um die eigene Länge verlängert, dann verlangt, man solle sich durch den Endpunkt einen Kreis gezogen denken, der AB in dem erstern Punkte berührt. Dann

liegt der Mittelpunkt auf der Senkrechten und auf der Schrägen, ist also der fragliche Schnittpunkt. Bei allen sonstigen Behauptungen hat der Verfasser die betreffenden Sätze richtig citirt; dass aber ein solcher Kreis existirt, ist durch kein Citat belegt, findet sich nicht unter den 11 Sätzen und gehört auch nicht zu den vom Parallelensatz unabhängigen; denn es ist vollkommen identisch damit. Der Verfasser hat also geradezu vorausgesetzt, was zu beweisen war. Von den 2 Einwürfen der Akademie sagt der erste, der Kreis könne unendlich sein. Diese Aussage ist entschieden incorrect, da ein Constantes immer endlich ist. Was weiter hinzugefügt wird, ist dunkel und unnötig complicirt. Der zweite Einwurf ignorirt den präsumtiven Beweis ganz und führt nur aus, wie in der nichteuklidischen Geometrie die schräge Linie ohne Durchschnitt mit der senkrechten bestehen könne. Damit ist der Fehler des Beweises nicht enthüllt.

Hoppe.

Das Dogma in der Wissenschaft. Von Dr. J. H. Hotz-Osterwald in Zürich. Basel 1880. Schweighauser. 50 S.

Die Schrift ist reichhaltig an Beispielen derjenigen Erscheinungen in der Gelehrtenwelt, welche der Verfasser unter den Dogmatismus subsumirt. Sie lässt es aber sehr fehlen an der Enthüllung seines Wesens und Begrenzung seines Begriffs, worüber der Verfasser sich Klarheit zu verschaffen nicht für nötig gehalten hat. Die Beispiele, welche aus der Sphäre der Medicin, Philologie, Altertums- und Völkerkunde entnommen sind, stellen nur Fälle differirender Ansichten und Hypothesen dar, wo die ältere dem Aufkommen der neuern einen ungerechtfertigten Widerstand entgegensetzt, und worin der Verfasser bloss eine in der Kindheit angenommene Meinung, die gegen die Tatsachen blind macht, erblickt. Die vielfachen Interessen, welche hier mit einspielen, teils das wissenschaftliche, welches sich an die Verfolgung der noch nicht erschöpften alten Basis knüpft, teils allerlei unwissenschaftliche, übersieht er, und gegen diese bedurfte es einer Abgrenzung, wenn der Dogmatismus nicht als blosses, jederzeit bestreitbares und von der Abschätzung abhängiges Uebermass einer an sich notwendigen und nicht verwerflichen Beharrlichkeit erscheinen und dem Misbrauch als verunglimpfendes Parteiwort entzogen werden sollte. Einem Falle, aber auch nur vorübergehend, schenkt der Verfasser Beachtung, wo die neue Lehre nicht bloss gegen das alte Dogma zu kämpfen hat, sondern selbst wieder zum Dogma gemacht wird: dies nämlich sagt der Verfasser von der Darwin'schen Lehre. In der Tat aber muss dasselbe in der Regel stattfinden. Wer so wenig Interesse und Befähigung für Forschung hat, dass er die alte Lehre als Dogma glaubte, der wird schwerlich durch Adoption der neuen

zum Forscher werden; er wird im neuen Dogma den höhern Standpunkt sehen. Die Beispiele hierfür sind in den exacten Wissenschaften sprechender als in den vorgenannten Wissenschaftszweigen. Die Lehre des Coppernicus, dass die Sonne stillsteht, die von Steiner, dass Parrallelen im Unendlichen zusammentreffen, die, dass es Functionen ohne Differentialquotienten giebt, und viele andre sind Dogmen für Solche, die nicht selbständig untersuchen, ebenso wie die entgegengesetzten, als sie diese noch glaubten. Davon sind die gewöhnlich damit verbundenen Misverständnisse ein sprechendes Zeugniss. Mit den Beispielen schliesst die Schrift ohne Nutzanwendung. Es scheint also nur der Zweck des Verfassers gewesen zu sein, eine Anzahl Lehren zusammenzustellen, die nach seiner Ansicht als Erscheinungen des Dogmatismus charakterisirt sind. Hoppe.

Glaube und Aberglaube in der neueren Naturwissenschaft. Von Dr. Heinrich Bolze. Danzig 1882. Franz Axt. 43 S.

Die Schrift hat es nirgends mit Glauben, noch weniger mit Aberglauben zu tun. Was hier Glaube genannt wird, sind Versuche der Erkenntniss, Hypothesen der Forschung, an denen zu Zeiten viele Menschen beteiligt sind. Aberglaube steht nur auf dem Titel; es mögen damit diejenigen Hypothesen gemeint sein, welche sich als unhaltbar erwiesen haben; doch wird keiner das Prädicat erteilt. Es werden die universellen Hypothesen der Naturwissenschaft von der Gravitation bis zum Darwinismus und der Weltentstehung durchgemustert und vom vulgär realistischen Standpunkte kritisirt. Es fehlt der Schrift nicht an Gedanken genügend zur Unterhaltung, Belehrung und Anregung für Laien; doch mischt sich das wenige Treffende mit vielen oberflächlichen und einseitigen Urteilen. Bei der überall durchschaulichen, manchmal ins derb humoristische streifenden Sprache lässt sich von letztern kein ernstlicher Schade erwarten, namentlich da die Schrift von Tendenzen frei ist. Hoppe.

O. Schmitz-Dumont. Erläuternde Bemerkungen über Die Einheit der Naturkräfte. 4 S.

Zu dem so betitelten, im 266. litt. Ber. S. 12. besprochenen Buche hat der Verfasser teils zur Berichtigung, teils zu besserem Verständniss nachträglich einige Bemerkungen bezüglich auf einzelne Stellen publicirt. Auf die Beurteilung des Buchs, wie sie daselbst gegeben ward, haben letztere keinen Einfluss, doch mögen einige nähere Erklärungen darüber am Platze sein. Die als falsch bezeichnete Formel soll, wie der Verfasser jetzt sagt, durch Versehen hineingekommen

sein (der falsche Ausdruck kommt freilich noch einmal vor), doch ergebe sie innerhalb des betrachteten Intervalls nur eine sehr geringe Abweichung. Wie entfernt nun die, wenn gleich berichtigte Formel und die sonstigen Ausführungen bleiben, der Aufgabe einer Erklärung der Stabilität aus blosser Abstossung zu genügen, fällt in die Augen; wir wollen nur zweierlei anführen. Erstens ist nur unter Voraussetzung einer sehr kleinen Verrückung eines Atoms aus bestimmter Lage zwischen 2 andern Atomen eine überschüssige Kraft in rückgängiger Richtung nachgewiesen. Warum aber ist die Verrückung stets klein? warum kann das Atom nicht durch die Wirkung andrer, nicht betrachteter Atome in andre Lage geraten, namentlich da die 2 Atome auch nicht fest sind? Hierauf geht keine der folgenden Betrachtungen ein. Zweitens hat die gedachte Lage des Atoms, nach dessen Bewegung gefragt wird, zwischen 2 andern auf die Grenze eines Körpers keine Anwendung. Das Atomsystem müsste also den ganzen Weltraum erfüllen, wie der Aether, wo ohnedies nur abstossende Kräfte in Betracht kommen. Die Aufgabe, die Cohäsion starrer Körper auf dieselbe Kraft zurückzuführen wie die Zustände der Gase und des Aethers, deren Lösung doch anfangs angekündigt ward, ist überhaupt nicht in Angriff genommen worden. Jeder Teil der materiellen Welt muss von aussen zusammengehalten werden, statt dass er selbst trennenden äussern Kräften Widerstand leisten sollte.

Hoppe.

Sta, sol, ne moveare. Von August Tischner. II—V. Leipzig 1882. Gustav Fock. 227 S.

Im 266. litt. Ber. S. 13. ist das I. Heft besprochen. Dem Verfasser ist inzwischen alle gewünschte Erklärung reichlich gegeben worden. Er hält nichts desto weniger die vorgefasste Meinung fest, dass die Astronomen sich nicht entschliessen könnten, die Bewegung der Sonne zu berücksichtigen um nicht die Unbrauchbarkeit ihrer bisherigen Arbeiten einräumen zu müssen. Der Inhalt der genannten Hefte ist ein Vielerlei, welches zwar eine gewisse Belesenheit, doch keine Ahnung von der Existenz einer Dynamik kund giebt. Am meisten zur Sache gesprochen sind wol noch die Ausführungen des II. Hefts über Perspective, welche dartun sollen, dass die Uebereinstimmung der Rechnung mit der Beobachtung, auf welche man sich berufe, kein Beweis für die Richtigkeit der Annahmen sei, weil die Beobachtung eine blosse Radialprojection ergebe.

Hoppe.

Erd- und Himmelskunde.

Astronomische Geographie. Ein Lehrbuch angewandter Mathematik von Prof. H. C. E. Martus, Direktor der Sophien-Realschule in Berlin. Mit 80 Figuren im Texte. Schul-Ausgabe. Leipzig 1881. C. A. Koch. 224 S.

Dieses Buch hat denselben Inhalt wie das unter gleichem Titel 1880 erschienene (s. 260. litt. Ber. S. 46), ist aber kürzer gefasst und soll den Schülern als Wiederholungsbuch dienen. H.

Lehrgang der populären Astronomie und mathematischen Geographie für Gymnasien bearbeitet von A. Kaspar Schelle, Professor am K. Gymnasium in Kempten. Zweite, verbesserte Auflage, mit 27 in den Text eingedruckten Figuren. Kempten 1882. Jos. Kösel. 113 S.

Für den Charakter des Buchs erscheint die Bestimmung für Gymnasien als unwesentlich, durch welche Bezeichnung wol nur die erforderlichen Vorkenntnisse, sich erstreckend auf Algebra und Trigonometrie, ausgedrückt sind. Es giebt Jedem, der umfassende materielle Bildung sucht, in der Kürze und ohne pädagogische Beihülfe Auskunft über alle wichtigen, dem Nicht-Astronomen verständlichen Tatsachen, legt Grund zu richtigen Begriffen und Vorstellungen und leitet zur Ausführung der einfachsten Rechnungen an, während es alle dynamischen und alle zur Präcision gehörigen Fragen gänzlich unberührt lässt. Die Hauptabschnitte sind: Die Himmelskugel, die Himmelskörper und ihre scheinbaren Bewegungen. Die Erde, ihre Gestalt und Rotation. Die Himmelskörper des Sonnen- oder Planetensystems. Zeitrechnung und Kalenderregeln. Die im Anhang stehenden Uebungsaufgaben sind nicht sowol Beispiele als vielmehr durchgeführte Anleitung zur Berechnung beliebig zu wählender Beispiele in einem gewissen Kreise astronomischer Fragen. H.

Das Zodiakallicht, eine Folge des Baues unseres Planetensystems. 1. Wissenschaftliche Beilage für das Programm des Gymnasiums zu Stolp 1882. Von Dr. E. Suchsland. Stolp 1882. C. Schrader. 12 S.

Nach Abbildung und Beschreibung des Phänomens folgen historische Angaben. Von Childrey ward es 1661 zuerst als gesondertes Phänomen aufgefasst. Humboldt entdeckte 1803 den Gegenschein.

Brorsen und Schiaparelli machten auf den verbindenden Lichtstreifen beider aufmerksam. Julius Schmidt und Heis haben die Resultate fortgesetzter Beobachtungen aufgezeichnet. Cassini versucht eine Erklärung durch eine stark abgeplattete Atmosphäre der Sonne, welche die Venus, auch manchmal die Erde mit umfasst, Heis durch einen Nebelring um die Erde. Der Verfasser sucht eine neue Hypothese, derzufolge das Zodiakallicht aus der Totalreflexion der Atmosphäre des Mars notwendig hervorgehen und im zweiten Brennpunkt von dessen Bahn zur Erscheinung kommen soll. Leider ist diese Hypothese nur ganz unbestimmt angedeutet. Die vorgängigen Aufstellungen über die Totalreflexion, die sich auf den Fall zweier homogenen Mittel beschränken, sind unzureichend um daraus die Consequenzen für Reflexion einer Atmosphäre von stetig variirender Dichte zu entnehmen. Darum erscheint denn auch das daraus abgeleitete Resultat als eine blosse Möglichkeit, welche keinen Einblick in die Bedingungen gewährt. Am Schluss erklärt der Verfasser, dass er nicht in der Lage sei die Richtigkeit seiner Annahme durch eigene Beobachtung prüfen zu können; er hat aber nirgends ausgesprochen, dass er die theoretische Gestaltung für sich weiter als es hier geschehen ist geführt und sie auf den Punkt gebracht habe, wo die Beobachtung mit Nutzen eintreten kann. Dies würde in einer Frage wie der vorliegenden doch das nächste Ziel sein müssen. H.

Astronomischer Kalender für 1882. Nach dem Muster des Karl von Littrow'schen Kalenders herausgegeben von der k. k. Sternwarte. Neue Folge. Erster Jahrgang. Wien 1882. Carl Gerold's Sohn. 143 S.

Dieser Kalender ist die Fortsetzung von Littrow's „Kalender für alle Stände", dessen Erscheinen nach Littrow's Tode von 1878 an unterbrochen war. Dabei sind einige Aenderungen vorgenommen worden. In den Ephemeriden der Sonne und des Mondes wird nicht mehr die Länge, sondern die Rectascension angegeben, in den Planetenephemeriden bei der Rectascension statt des Zeitmasses das Bogenmass eingeführt. Die Asteroiden sind von den grossen Planeten getrennt, und von ihnen nur die grosse Halbaxe und Excentricität der Bahn und die Epoche aufgeführt. Statt der Meilen dient das Kilometer als Mass. Der gegenwärtige Jahrgang enthält auch eine Biographie von Littrow. H.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

CLX.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Heller, A., Gesch. d. Physik v. Aristoteles bis auf die neueste Zeit. 1. Bd. Stuttgart, Enke. 9 Mk.

Rosenberger, F., d. Gesch. d. Physik. 1. Thl. Braunschweig, Vieweg & S. 3 Mk. 60 Pf.

Wirth, M., Fr. Zöllner. Leipzig, Mutze. 40 Pf.

Methode und Principien.

Bresch, R., der Chemismus, Magnetismus etc. im Lichte mehrdimensionaler Raumanschauung. Leipzig, Bresch. 3 Mk.

Koindorff, A., Kritik der drei Keppler'schen Gesetze. Neuhaldensleben, Eyrand. 1 Mk.

Müller, H., zur Methode d. mathemat. Unterrichts. 2. u. 3. Hft. Cöslin, Hendess. 3 Mk. 50 Pf.

Tischner, A., Sta, sol, ne moveare. IV. Leipzig, Fock. 80 Pf.

Lehrbücher, Sammlungen und Tabellen.

Adam, V., Taschenbuch d. Logarithmen. 9. Afl. Wien, Bermann & A. Geb. 1 Mk. 20 Pf.

Greve, Lehrbuch d. Mathematik. 3. Kurs. 1. Tl. (Schluss); 2. Tl. (Arithmetik.) Berlin, Stubenrauch. à 1 Mk.

Kleyer, A., vollst. gelöste Aufg.-Sammlg. a. allen Zweigen d. Rechenkunst etc. 38—44. Hft. Stuttgart, Maier. à 25 Pf.

Matthiessen, L., Sammlg. der Resultate z. Uebungsb. f. d. Unt. in d. Arithmetik etc. 1. u. 2. Hft. Cöln, Du Mont-Schauberg. à 80 Pf.

Rüegg, H. R., Schlüssel z. d. 600 geometr. Aufg. Zürich, Orell, F. & Co. 60 Pf.

Schlömilch, O., Uebungsbuch zum Studium der höh. Analysis. 2. Thl. 3. Afl. Leipzig, Teubner. 7 Mk. 60 Pf.

Stockmayer, H., Schlüssel zu d. Aufg. f. d. Rechenunt. 3. Afl. 1. u. 2. Bdchn. Heilbronn, Scheurlen. 3 Mk. 30 Pf.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Büttner, A., die Elemente der Buchstabenrechng. u. Algebra. 6. Afl. Berlin, Stubenrauch. 2 Mk. 80 Pf.

Du Bois-Reymond, P., die allg. Functionentheorie. 1. Thl. Tübingen, Laupp. 8 Mk.

Durège, H., Elemente d. Theorie d. Funktionen e. complexen veränderlichen Grösse. 3. Afl. Leipzig, Teubner. 6 Mk.

Hagen, G., Grundz. d. Wahrscheinlichkeits-Rechnung. 3. Afl. Berlin, Ernst & K. 6 Mk.

Kautecki, H., die neapolitan. Summen. Posen, Jolowicz. 4 Mk.

Klimpert, R., kurzgef. Handb. d. Arithmetik u. Algebra f. Schüler h. Lehranstalten. Düsseldorf, Schwann. 3 Mk.

Koppe, K., die Arithmetik u. Algebra f. d. Schul- u. Selbst-Unt. 12. Afl. bearb. v. W. Dahl. Essen, Bädeker. 2 Mk. 70 Pf.; geb. 3 Mk. 70 Pf.

Maier, J. G., Lehrb. d. Elementar-Arithmetik. 2 Thle. Stuttgart, Gundert. 8 Mk. 10 Pf.

Müller, H., Gymnasial-Arithmetik. 1. u. 2. Tl. Cöslin, Hendess. Cart. 1 Mk. 40 Pf.

Puchta, A., e. neuer Satz aus d. Theorie d. Determinanten. Wien, Gerold's S. 40 Pf.

Riemann, B., partielle Differentialgleichungen u. d. Anw. auf physik. Fragen. Hrsg. v. K. Hattendorff. 3. Afl. Braunschweig, Vieweg & S. 8 Mk.

Schier, O., üb. Potenzsummen rationaler Zahlen. Wien, Gerold's S. 20 Pf.

Geometrie.

Baltzer, R., analyt. Geometrie. Leipzig, Hirzel. 8 Mk.

Hossfeld, C., Construction d. Kegelschnitte aus fünf z. Th. imag. Curvenelementen. Jena, Deistung. 1 Mk. 20 Pf.

Müller, J., Einführung in die Elemente d. Raumlehre. München, Exp. d. Z.-Schulb.-Verl. 2 Mk. 50 Pf.

Pasch, M., Vorlesungen üb. neuere Geometrie. Leipzig, Teubner. 4 Mk.

Pfeiffer, G., Formeln f. d. Inhalt d. Kegelfläche. Berlin, Weidmann. 1 Mk.

Rüefli, J., kl. Lehrb. d. eb. Geometrie. Bern, Dalp. Cart. 1 Mk. 20 Pf.

— kl. Lehrb. d. Stereometrie. Cart. Ebd. 1 Mk. 20 Pf.

Schumann, H., Lehrb. d. Planimetrie f. Gymn. u. Realschulen. 3. Afl., bearb. v. R. Gantzer. Berlin, Weidmann. 2 Mk. 40 Pf.

Villicus, F., geom. Formenlehre in Verbindg. m. dem Zeichnen ornam. Gebilde. Für d. 1. Realcl. 2. Afl. Wien, Pichler's Wwe. & S. 1 Mk. 20 Pf.

— Lehrbuch d. ebenen Geometrie in Verb. m. dem geometr. Zeichnen f. die 2. u. 3. Realcl. 2. Afl. Ebd. 1 Mk. 60 Pf.

Weyr, E., üb. Flächen sechsten Grades m. e. dreifach cub. Curve. Wien, Gerold's S. 30 Pf.

Wiegand, A., analytische Geometrie. 6. Afl. Halle, Schmidt. 1 Mk. 60 Pf.

Praktische Geometrie, Geodäsie.

Kröhnke, G. H. A., Handb. z. Abstecken v. Curven auf Eisenbahn- u. Wegelinien. 10. Afl. Leipzig, Teubner. Geb. 1 Mk. 80 Pf.

Mechanik.

Petersen, J., Lehrbuch d. Statik fester Körper. Deutsche Ausg. Besorgt v. R. v. Fischer-Benzon. Kopenhagen, Hoest & S. 3 Mk. 60 Pf.

Reiff, R., üb. d. Principien d. neueren Hydrodynamik. Freiburg, Mohr. 1 Mk. 20 Pf.

Technik.

Frenzl, Ch. G., d. arithmet. Integration d. Dämme u. Einschnitte. Wien, Bloch & H. 4 Mk. 80 Pf.

Kraft, M., Grundriss d. mechan. Technologie f. Gewerbe- u. Industrieschulen. 1. Abth. Wiesbaden, Kreidel. 4 Mk. 40 Pf.

Weisbach, S., Lehrbuch d. Ingenieur- u. Maschinen-Mechanik. 2. Thl. 5. Afl., bearb. v. G. Herrmann. 1. Abth. 1. u. 2. Lfg. Braunschweig, Vieweg & S. 4 Mk. 40 Pf.

Optik, Akustik und Elasticität.

Beer, A., Einleitung in die höhere Optik. 2. Afl., bearb. von V. v. Lang. Braunschweig, Vieweg & S. 9 Mk.

Hering, E., Kritik einer Abhandlung v. „Danders, üb. Farbensysteme". Prag, Tempsky. 60 Pf.

Seggel, e. doppelröhriges metrisches Optometer. München, J. A. Finsterlin. 60 Pf.

Erd- und Himmelskunde.

Fortschritte, die, d. Astronomie. 1881. Cöln, Mayer. 2 Mk.

— die, d. Meteorologie. 1881. Ebd. 2 Mk.

Friesach, C., d. bevorst. Vorübergang d. Venus v. d. Sonnenscheibe vorausberechnet. Wien, Gerold's S. 5 Mk.

Jahrbuch, Berliner astronom., f. 1884 m. Ephemeriden f. 1882. Red. v. F. Tietjen. Berlin, Dümmler. 12 Mk.

Israel, C., gleichzeit. Bestimmung d. Sternzeit, Ekliptikschiefe u. geograph. Breite. Halle, Schmidt. 40 Pf.

Israel-Holtzwart, K., Elemente d. sphärischen Astronomie. Wiesbaden, Bergmann. 4 Mk. 80 Pf.

Klein, H. J., Anleit. z. Durchmusterung d. Himmels. 2. Afl. Braunschweig, Vieweg & S. 24 Mk.

Nachrichten, astronomische. Hrsg.: A. Krüger. 102. Bd. Nr. 2425. Hamburg, Mauke S. prcplt. 15 Mk.

Nautik.

Dabovich, P. E., nautisch-techn. Wörterb. d. Marine. Deutsch, ital., franz. u. englisch. 11. Lfg. Wien, Gerold & Co. 2 Mk.

Physik.

Boyman, J. R., Lehrbuch d. Physik. 4. Afl. Düsseldorf, Schwann. 4 Mk.; geb. 5 Mk.

Fortschritte, die, d. Physik. 1881. Cöln, Mayer. 2 Mk.

Hankel, W. G., elektr. Untersuchungen. 16. Abhandl. Leipzig, Hirzel. 2 Mk.

Krebs, G., Lehrbuch der Physik u. Mechanik. 4. Afl. Wiesbaden, Bergmann. 3 Mk. 60 Pf.; geb. 4 Mk.

Münch, P., Lehrbuch der Physik. 7. Afl. Freiburg, Herder. 4 Mk. 20 Pf.

Wassmuth, A., üb. d. Tragkraft v. ringf. Elektromagneten. Wien, Gerold's S. 30 Pf.

Vermischte Schriften.

Berichte üb. d. Verh. d. k. sächs. Ges. d. Wissensch. zu Leipzig. Math.-physik. Cl. 1881. Leipzig, Hirzel. 1 Mk.

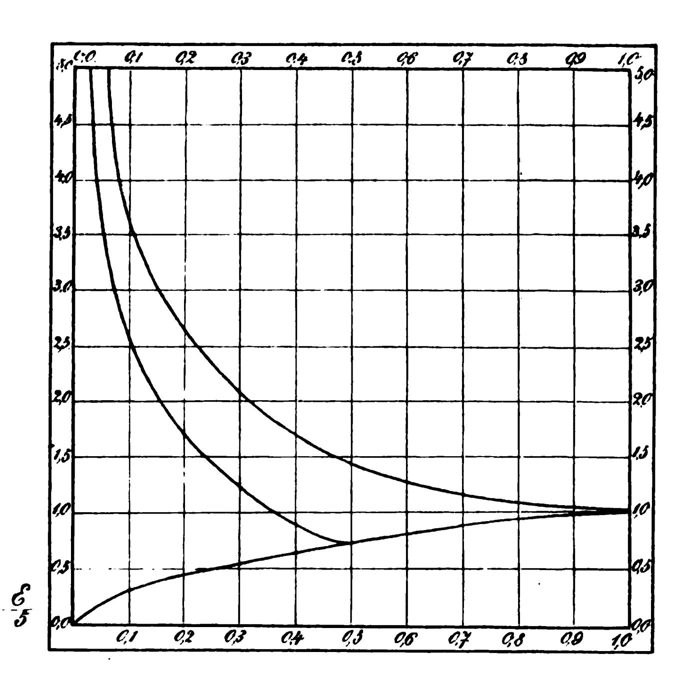
Burckhardt, W., mathem. Unterrichtsbriefe. 27. Brief. Leipzig, Gressner & Schramm. 1 Mk.

Denkschriften der k. Ak. d. Wiss. Mathem.-naturw. Cl. 44. Bd. Wien, Gerold's S. 40 Mk.

Mittheilungen, mathem. u. naturwiss., aus d. Sitzungsber. d. kgl. preuss. Ak. d. Wiss. zu Berlin. J. 1882. 1. Hft. Berlin, Dümmler. prcplt. 8 Mk.

Sitzungsberichte d. k. Ak. d. Wiss. Math.-naturw. Cl. 2. Abth. 84. Bd. 5. Hft. Wien, Gerold's S. 6 Mk.

Dass. 3. Abth. 84. Bd. 3—5. Hft. Ebd. 5 Mk. 20 Pf.



XVIII. Kuntze: Rotirende Gleichgewichtsfiguren.

 Steindr. v. F. W. Kunike, Greifsw.

INHALT.

Greifswald, gedruckt bei F. W. Kunike.



ARCHIV

der

MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Gegründet von

J. A. Grunert,

fortgesetzt von

R. Hoppe.

Achtundsechzigster Teil. Viertes Heft.

(Mit 2 lithographirten Tafeln.)

Leipzig.
C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,
J. Sengbusch.

1882.

XXII.

Ueber die Anzahl der Substitutionen, welche in eine gegebene Zahl von Cyklen zerfallen.

Von

Ernst Schröder

in Karlsruhe.

Für die Substitutionentheorie ist es ein fundamentales Problem, alle Gruppen von Substitutionen, welche aus einer gegebenen begrenzten Menge von Elementen gebildet werden können, vollständig und ohne Wiederholung herzustellen, auch deren Anzahl a priori zu bestimmen. Soll jemals dieses Problem seiner Lösung näher treten, so muss man sicherlich über die Substitutionen selbst, welche es möglich ist, aus ebendiesen Elementen zusammenzusetzen, in Hinsicht auf ihre Ordnung, den Grad und die Zerfällbarkeit in Elementarcyklen einen klaren Ueberblick schon vorher sich erworben haben. Zu der hiermit gekennzeichneten propädeutischen Aufgabe soll die gegenwärtige Mitteilung einen combinatorischen Beitrag liefern.

In dem ersten Paragraphen werde ich einen Satz voranzustellen haben, welcher schon bekannt, auch neuerdings in ausländischen Zeitschriften mehrfach behandelt worden ist (genauere Angaben folgen); ich erlaube mir nun zugleich die hübschesten Beweise des Satzes mit zu reproduciren, nicht nur, weil es mir wünschenswert erscheint, dass dieselben auch in der deutschen Litteratur zu finden seien, sondern auch, um den auf das Problem bezüglichen Mitteilungen eine gewisse Vollständigkeit zu geben. Im Anschluss daran gebe ich jedoch auch einen eigenen Beweis für eine nahe gelegene Verallgemeinerung des Satzes. Für die übrigen Teile der Untersuchung ist es mir nicht gelungen, vorgängige Arbeiten zu entdecken.

§ 1.

Es soll zuerst die Aufgabe behandelt werden, die **Anzahl** x_n **derjenigen auf die** n **Elemente** $a_1, a_2, \ldots a_n$ **bezüglichen Substitutionen zu ermitteln, welche vom** n**ten Grade sind**, d. h. wirklich alle n Elemente versetzen. Die Elemente werden als durchweg verschiedene vorausgesetzt.

Es ist offenbar nur eine andre Fassung der Aufgabe, wenn wir fordern, die Anzahl derjenigen von den $n!$ Permutationen der erwähnten Elemente zu ermitteln, bei welchen kein Element den Platz einnimmt, den ihm sein Index zuweisen würde, oder wenn wir fragen, auf wie viele Arten sich die Elemente 1, 2, 3, ... n in irgend einer Reihenfolge so über (oder auch unter) diese geordneten Zahlen schreiben lassen, dass niemals zwei gleiche Zahlen untereinander stehen.

Als die gesuchte Anzahl stellt sich heraus:

$$1)\left\{\begin{aligned} x_n &= n!\left\{1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^n}{n!}\right\} \\ &= \frac{n!}{2!}-\frac{n!}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^n n!}{n!} = \sum_{0;2}^{n}{}_h \frac{(-1)^h}{h!}n! \end{aligned}\right.$$

ein Ergebniss, welches durch $n-1$ teilbar ist.

In der Tat enthalten in der vorstehenden Summe nur die beiden letzten Terme nicht selbst diesen Factor; dieselben geben aber zusammen $(-1)^{n-1}(n-1)$, sodass man unschwer erhält:

$$2)\qquad x_n = (n-1)\{nx_{n-2}+(-1)^{n-1}\}.$$

Ueber jene Teilbarkeit vergleiche auch **Witworth**, Messenger (2) VII p. 145—147. Derselbe will x_n ein „sub-factorial" genannt wissen und es analog dem in England für das „factorial" $\Gamma(n+1) = \Pi(n) = n!$ gebräuchlichen $\underline{|n}$ mit $\underline{||n}$ bezeichnen.

Nennt man den Quotienten

$$2)_a\qquad \frac{1}{n-1}x_n = x_n',$$

so sind durch die nachher abgeleiteten Formeln 4), 3) leicht die beiden Recursionen zu rechtfertigen:

$$2)_b\qquad x_n' = (n-2)x_{n-1}'+(n-3)x_{n-2}',$$

$$2)_c\quad nx_{n+1}' = (n+1)(n-1)x_n'-(-1)^n, \text{ oder } x_{n+1}' = nx_n' - \frac{x_n'+(-1)^n}{n}.$$

wobei der letzte Bruch eben x_{n-2} vorstellt. Dieselben sind an weiter unten citirter Stelle schon von Leonh. Euler gegeben.

Zur praktischen Berechnung von x_n selbst wird man am besten die Recursion benutzen:

3) $$x_n = nx_{n-1} + (-1)^n,$$

welche sich durch Einsetzung des allgemeinen Ausdrucks 1) von x_n unmittelbar als eine Identität erweist. Umgekehrt folgt Gleichung 1) leicht aus 3), indem man dieser letzteren die Form gibt:

$$\frac{x_h}{h!} - \frac{x_{h-1}}{(h-1)!} = \frac{(-1)^h}{h!}$$

und mit Rücksicht auf $x_1 = 0$ nach h von 2 bis n summirt.

Indem man die Recursion 3) addirt zu derselben für $n+1$ in Anspruch genommenen, kann man ihr auch die Form verschaffen:

4) $$x_{n+1} = n(x_n + x_{n-1})$$

woraus dann ebenfalls die Teilbarkeit von x_{n+1} durch n ersichtlich ist.

Wie umgekehrt aus dieser letzteren wieder die vorige 3) und damit auch 1) abzuleiten ist, zeigt Leudesdorf (Math. questions etc. from the „Educational Times" vol. XXV, p. 30 and 31). Zu dem Ende zieht er von der Gleichung 4) dieselbe für $n-1$ in Anspruch genommene Gleichung ab und summirt das Ergebniss, welches man schreiben kann:

$$x_{h+1} - x_{h-1} = (h+1)x_h - (h-1)x_{h-2}$$

nach h von n an abwärts über alle abwechselnden Zahlen (n, $n-2$, $n-4, \ldots$ bis 3 resp. 2), wodurch sich eben Gleichung 3) — gesondert für ein gerades und für ein ungerades n — ergeben wird, wenn man die Anfangswerte $x_1 = 0$ und $x_0 = 1$, also auch $x_2 = 1$, berücksichtigt.

Zweimal hat Herr Cayley über das vorliegende Problem geschrieben; das erste mal in Messenger vol. V p. 51—53. Interessant ist der so einfache directe, nämlich von der independenten Darstellung 1) unabhängige, Beweis der Recursion 4), welchen er hierselbst veröffentlicht:

Man denke sich die x_n Permutationen gegeben und bringe in ihnen das Element n an die letzte Stelle, was in jedem Falle zu bewerkstelligen ist durch einfache Vertauschung dieses Elementes n mit dem an der letzten Stelle gestandenen von den $n-1$ übrigen Elementen. Man lasse nun dieses zum letzten gewordene Element n beiseite und untersuche, welche und wie viele Stellungen die ihm vorangehenden Elemente einnehmen werden.

In Bezug auf diese $n-1$ Elemente sind nur zwei Fälle möglich und in Wirklichkeit zu gewärtigen: entweder nämlich steht keines derselben an dem Platze, den ihm sein Index zuweist, oder aber nur eines derselben, indem dieses eben durch die Vertauschung mit n dahin gekommen sein kann.

Verschiedene Anordnungen der ersten Art wird es x_{n-1}, solche der letztern Art, wenn wir das erwähnte eine Element festhalten, muss es x_{n-2} geben. Eine jede von jenen x_{n-1} Anordnungen wird aber gerade $n-1$ mal vorkommen, hervorgegangen durch die Transposition des 1ten, 2ten, ... $n-1$ten ihrer Elemente mit dem Element n. Eine jede von den x_{n-2} Anordnungen der letztern Art dagegen kann sich nur ein mal gebildet finden, jedoch wird entweder das 1te, oder das 2te, ... oder aber das $n-1$te Element das bevorzugte sein, welches den ihm durch seine Nummer zugewiesenen Platz erhalten hat, daher denn in der Tat die Zerlegung gelten muss: $x_n = (n-1)x_{n-1} + (n-1)x_{n-2}$.

Man erhält nach 3) die Tabelle von Werten:

$$5)\quad \begin{cases} x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2,\ x_4 = 9,\ x_5 = 44,\ x_6 = 265,\ x_7 = 1854, \\ x_8 = 14833,\quad x_9 = 133496,\quad x_{10} = 1334961,\quad x_{11} = 14684570, \\ x_{12} = 176214841,\ \text{etc.} \end{cases}$$

Der Beweis der Formel 1) ist nach Herrn Koehler (Journal de math. élémentaires et spéciales, 1881, p. 32—33) wie folgt zu leisten.

x_n ist gleich dem Coefficienten von $a_1 a_2 \ldots a_n$ in der Entwickelung des Productes:

$$6)\quad (a_2 + a_3 + \ldots + a_n)(a_1 + a_3 + \ldots + a_n) \ldots (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}),$$

oder

$$7)\quad (S - a_1)(S - a_2) \ldots (S - a_n), \quad \text{wenn } S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

zur Abkürzung gesetzt wird.

Denn behufs Entwickelung von 6) ist die Summe aller Partialproducte zu bilden, welche aus jedem Aggregat einen Term zum Factor haben. Multiplicirt man dabei geordnet aus, d. h. setzt man die Terme in derselben Reihenfolge als Factoren an, in der die Aggregate stehen, aus welchen sie stammen, so kommt sicher stets eine Permutation der Indices heraus, bei der 1 nicht als erstes, 2 nicht als zweites, ... n nicht als letztes Element auftritt, und solches je nur ein mal und auf jede mögliche Weise. — Nun ist:

$$8)\quad \begin{cases} (S - a_1)(S - a_2) \ldots (S - a_n) \\ = S^n - S^{n-1}\Sigma a_j + S^{n-2}\Sigma a_j a_k - \ldots + (-1)^n a_1 a_2 \ldots a_n. \end{cases}$$

Der Coefficient von $a_1 a_2 \ldots a_n$ in S^n ist (nach dem polynomischen Satze) gleich $n!$; der in $S^{n-1}a_j$ ist $(n-1)!$, also in $S^{n-1}\Sigma a_j$ gleich $(n)_1 . (n-1)!$, weil letztere Summe $(n)_1$ Glieder hat; der in $S^{n-2}a_j a_k$ ist $(n-2)!$ also $(n)_2 . (n-2)!$ der in $S^{n-2}\Sigma a_j a_k$, weil letztere Summe $(n)_2$ Glieder hat; der in $S^{n-3}\Sigma a_j a_k a_l$ ist ebenso $(n)_3 . (n-3)!$, etc., somit ist im ganzen:

$$x_n = \sum_0^n {}_h (-1)^h (n)_h . (n-h)!, \tag{9}$$

was mit 1) übereinstimmt.

In Bezug auf die Autorschaft des Satzes 1) scheint eine gewisse Verwirrung zu herrschen.

Nach Koehler's Angabe (ibid.) ist die Formel zuerst und zwar auf einem weitläufigern Wege von Herrn André in einem Aufsatze über das allgemeine Glied einer Reihe in den Annales de l'Ecole normale abgeleitet worden. Ohne Zweifel bezieht sich jener auf den Aufsatz „Terme général d'une série quelconque, déterminée à la façon des séries récurrentes“ in tome 7 (2me série) p. 375—409 der genannten Zeitschrift; derselbe übersieht aber dabei, dass Herr D. André selbst (ibid. p. 387) Laplace als den Erfinder des Satzes angibt, und zwar die „Théorie analytique des probabilités (Oeuvres) t. VII, p. 242“ als Quelle citirt. Ich habe nun in der (mir allein zugänglich gewesenen) 3ten Auflage der seiner Zeit selbständig erschienenen Théor. anal. des prob. (1820) nichts auf unser Problem bezügliches entdecken können und ferner mich verlässigt, dass von den gesammelten „Oeuvres“ von Laplace erst die vier ersten Bände erschienen, der fünfte im Druck befindlich ist. Es bleibt darnach, wofern man nicht einen Irrtum annehmen will, nur die Vermutung übrig, dass Herr André im Besitze eines voraus gedruckten und andern Sterblichen zur Zeit nicht zugänglichen sog. „exemplaire de luxe“ des siebenten Bandes der Oeuvres befindlich sei. Eine l. c. fallende Bemerkung von André lässt es dazu nicht unwahrscheinlich erscheinen, dass auch die in § 2 von mir abgeleitete mit einer schon von Laplace gegebenen Verallgemeinerung des Satzes vielleicht zusammenfalle, was mich aber von der Veröffentlichung, wie die Sache liegt, nicht abhalten kann.

Im Gegensatz zu vorstehendem rührt nach Cayley's l. c. gemachter Angabe das Theorem 1) sammt Recursionen von Euler her cf. „Sur une espèce particulière de carrés magiques“ in den Commentationes arithmeticae collectae, auspiciis acad. imp. scient. petrop., edd. P. H. et N. Fuss t. I et II, eine Publication, welche mir nicht zu Gesicht gekommen, jedoch, wie ich aus Poggendorff's biograph. Handwörterbuch (S. 690) ersehe, die Jahreszahl 1849 trägt.

Ein zweites mal hat Herr Cayley sich unlängst (Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, IX, p. 390 u. 391) mit der Darstellung der Grössen x_n beschäftigt. Die dabei von ihm ausgeführte Bestimmung einer erzeugenden Function dieser Coefficienten, bewerkstelligt durch Integration einer linearen aus 4) gefolgerten Differentialgleichung, ist jedoch falsch (desgl. die auf das complicirtere Tait-Muir'sche Problem bezügliche Betrachtung, welche ibid. vorhergeht) aus dem Grunde, weil die Reihen, mit denen operirt wird, divergiren.

In der Tat kann eine Reihe, welche in unsrer Bezeichnung lauten würde:

$$Z = \sum_{2}^{\infty}{}_n x_n z^n = \sum_{2}^{\infty}{}_n z^n . n! \sum_{2}^{n}{}_h \frac{(-1)^h}{h!}$$

unmöglich convergiren, weil die letzte Summe mit wachsendem n nicht unter jeden Betrag herabsinkt, vielmehr, wie leicht zu zeigen, stets $> \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} = \frac{1}{3}$ bleibt, also die ganze Reihe sich verhält wie die $\Sigma n! z^n$, welche für jedes von der absoluten 0 verschiedene z divergirt.

Die x_n selbst besitzen also eine erzeugende Function überhaupt nicht; dagegen könnte man nach einer solchen allenfalls für die Grössen $\frac{x_n}{n!}$ fragen und diese, also die Summe der Reihe $\sum_{0}^{\infty}{}_n x_n \frac{z^n}{n!}$ würde sich leicht $= \frac{e^{-z}}{1-z}$ für mod. $z < 1$ herausstellen.

Herr André führt an schon citirter Stelle noch folgende Relationen als leicht zu rechtfertigende an:

$$10)\quad x_{2n} = \sum_{1}^{2n-1}{}_h (2n-h) x_{2n-h} + 1, \quad x_{2n+1} = \sum_{1}^{2n}{}_h (2n+1-h) x_{2n+1-h}$$

mit deren Reproduction ich die Berichtigung eines kleinen Fehlers verbinde, indem bei ihm rechts $2n$ statt $2n+1$ in der letzteren gedruckt ist. Man wird dieselben am besten a tempo durch Schluss von n auf $n+1$ beweisen. Als gänzlich falsch jedoch muss die darauf folgende Darstellung von x_n durch ein bestimmtes Integral seitens des Herrn André bezeichnet werden (siehe ibid. S. 388 Z. 6 v. o.).

Zur Ergänzung der auf die Litteratur der Grössen x_n bezüglichen Angaben muss ich weiter erwähnen, dass nach Herrn J. J. Weyrauch (Borchardt's Journal Bd. 74, S. 273—276) die Anzahl der Glieder der entwickelten allgemeinen Determinante $n$ten Grades,

welche kein Element der Hauptdiagonale enthalten, gerade das durch 1) definirte x_n ist. Es findet sich hier auch eine Betrachtung, welche mit der des folgenden Paragraphen Analogie erkennen lässt.

Nach dem Jahrbuch Fortschr. Math., Bd. 11, S. 156 hat endlich Herr Nägelsbach in einer Programmschrift, Erlangen, die Untersuchungen über ohne Coincidenz von Elementen untereinander stellbare Permutationen ausgedehnt auf Variationen ohne Wiederholungen von beliebiger Classe.

§ 2.

Um einen das Ergebniss 1) in sich fassenden allgemeineren Satz zu gewinnen, werfe ich, $r \leqq n$ gedacht, die Frage auf, in wie vielen der $n!$ Permutationen der Elemente $1, 2, \ldots n$ bestimmte r von ihnen nicht die Stelle einnehmen, die ihnen ihr Index zuweist, oder, wenn wir uns jede Permutation einzeln über die Anfangspermutation geschrieben denken, in wie vielen jener Permutationen etwa von den Elementen $1, 2, 3, \ldots r$ selbst keines über seinesgleichen steht. (Wie nämlich die r hervorzuhebenden Elemente heissen, ist ja jedenfalls gleichgültig). Sei $x_{n,r}$ diese gesuchte Anzahl, alsdann wird $x_{n,n}$ identisch mit dem bisherigen x_n sein.

Ich behaupte nun, dass

$$11)\qquad x_{n,r} = \sum_0^r {}_h (-1)^h (r)_h . (n-h)!$$

ist; ich finde dies inductorisch und beweise es direct durch Schluss von r auf $r+1$.

Es gibt $(n-1)!$ Permutationen, bei denen das Element 1 die erste Stelle einnimmt; bringt man diese in Abzug, so bleiben:

$$12)\qquad x_{n,1} = n! - (n-1)!$$

Permutationen, in denen 1 nicht an der ersten Stelle steht; somit ist die Formel 11) zunächst für $r = 1$ richtig.

Um weiter $x_{n,2}$ zu finden, sind von den obigen $x_{n,1}$ Permutationen noch abzuziehen diejenigen, in denen das Element 2 die zweite Stelle einnimmt. Dies würden in der vollständigen Gruppe wiederum $(n-1)!$ Permutationen sein; davon sind aber diejenigen $(n-2)!$ bereits in Abzug gebracht, in denen zugleich 1 die erste Stelle einnimmt, die beiden ersten Stellen also mit 1, 2 besetzt sind. Sonach haben wir jetzt nur $(n-1)! - (n-2)! = x_{n-1,1}$ Permutationen in Abzug zu bringen, und bleiben:

$$x_{n,2} = x_{n,1} - x_{n-1,1} = n! - 2.(n-1)! + (n-2)!$$

Permutationen, in denen weder 1 die erste, noch 2 die zweite Stelle einnimmt. Sonach gilt 11) auch für $r = 2$.

Allgemein muss sein:

13) $$x_{n,r+1} = x_{n,r} - x_{n-1,r},$$

denn um die Permutationen zu finden, in denen die Elemente 1, 2, 3, ... r, $r+1$ nicht an den durch ihre Nummer bezeichneten Stellen stehen, muss man von den $x_{n,r}$ Permutationen, bei denen dies schon mit den r ersten zutrifft, noch diejenigen fortlassen, in welchen das Element $r+1$ die $r+1$te Stelle einnimmt. In der Gruppe von $(n-1)!$ Permutationen, bei denen das Element $r+1$ überhaupt an der $r+1$ten Stelle steht, gibt es aber laut Definition $x_{n-1,r}$ solche, in denen die Elemente 1, 2, 3, ... r nicht an den gleichnamigen Stellen stehen, wie man direct erkennt, indem man von dem Element $r+1$ einfach absieht.

Die hiermit etablirte Recursion 13) dient aber zur Vervollständigung der Induction, welche uns 11) lieferte. Denn setzt man die Werte, so wird:

$$x_{n,r} - x_{n-1,r} = \sum_{0}^{n}{}_h (-1)^h (r)_h (n-h)! + \sum_{0}^{n-1}{}_h (-1)^{h+1} (r)_h (n-1-h)!$$

Führt man hier in der zweiten Summe $h+1$ für h als Summationsvariable ein, und berücksichtigt die bekannte Relation der Binomialcoefficienten:

$$(r)_h + (r)_{h-1} = (r+1)_h,$$

so entsteht gerade der Ausdruck, den Formel 11) für $r+1$ liefern würde, q. e. d.

Für $r = n$ geht nun 11) in 1) über, vergl. 9). Eine Lösung der Differenzengleichung 13) würde z. B. die Function sein:

$$x_{n,r} = (-1)^n (r)_n,$$

welche freilich für $r < n$ stets null wird, und also in den Anfangswerten nicht mit der gesuchten übereinstimmt.

Es gelingt wol nicht, die Reihe 11) durch einen monomischen Ausdruck in dieser Art zu summiren.

Indem man in der für $n+1$ in Anspruch genommenen Gleichung 11) rechts $(n+1-h)!$ zerlegt in $(n+1).(n-h)!$ und $-h.(n-h)!$, sodann in der vom letztern Teil herrührenden Summe die Umformung $h.(r)_h = r.(r-1)_{h-1}$ benutzt, findet man auch noch die folgende Recursion:

14) $$x_{n+1,r} = (n+1)\,x_{n,r} + r\,.\,x_{n-1,r-1},$$

welche auch für $r = 1$ noch giltig bleibt, wenn man $x_{n,0} = n!$ definirt. Dieselbe gestattet übrigens nur, die Coefficienten im innern (ohne die Randcoefficienten rechts und links) der folgenden Tabelle zu berechnen, die man am bequemsten nach 13) aufstellen wird, und die ich mich im Hinblick auf den weitläufigen Druck ungern enthalte, bis $n = 12$ fortzusetzen:

15)

$x_{0,0}=1,$						
$x_{1,0}=1,$	$x_{1,1}=0,$					
$x_{2,0}=2,$	$x_{2,1}=1,$	$x_{2,2}=1,$				
$x_{3,0}=6,$	$x_{3,1}=4,$	$x_{3,2}=3,$	$x_{3,3}=2,$			
$x_{4,0}=24,$	$x_{4,1}=18,$	$x_{4,2}=14,$	$x_{4,3}=11,$	$x_{4,4}=9,$		
$x_{5,0}=120,$	$x_{5,1}=96,$	$x_{5,2}=78,$	$x_{5,3}=64,$	$x_{5,4}=53,$	$x_{5,5}=44,$	
$x_{6,0}=720,$	$x_{6,1}=600,$	$x_{6,2}=504,$	$x_{6,3}=426,$	$x_{6,4}=362,$	$x_{6,5}=309,$	$x_{6,6}=265$

Würde man, zur Vereinfachung, die Bezeichnung der x Grössen weglassen, so würde $x_{n,r}$ als die $n-r+1$te Zahl von oben in der $r+1$ten Colonne zu finden sein, d. h. die $n$te Zahl von oben in der $r$ten Colonne (von links) wäre $= x_{n+r-2,r-1}$.

Der Anblick der Tabelle lässt sofort erkennen, dass die Zahlen $x_{n,r}$ nichts anderes sind als die (höheren) Differenzen der Facultätenreihe: $0!$, $1!$, $2!$, $3!$, ...

Bezeichnet man in der Tat:

$$f(n+1) - f(n) = \Delta_n f(n) \text{ oder kürzer mit } \Delta f(n),$$

so ist geradezu:

16) $$\begin{cases} x_{n+r,r} = \Delta^r(n!), & x_{n,r} = \Delta_n^r(n-r)! \\ x_n = \Delta^n 0!, \quad \text{d. h. genauer} & x_n = [\Delta_n^r(n-r)!]_{r=n}, \end{cases}$$

wie dies leicht nach 13) strenge zu beweisen ist.

Es erscheint darnach die Formel 11) im Einklange mit einem bekannten fundamentalen Satze über Differenzreihen.

§ 3.

Nicht ohne Interesse scheint das combinatorische Verfahren zu sein, durch welches man für $n = 2, 3, 4, \ldots$ jene x_n Permutationen ausschliesslich und geordnet herstellt. Zur Erläuterung desselben setzen wir zunächst die auf die niedersten Werte von n bezüglichen (vier) Schemata an:

12
21

123
231
312

1234
2143
2341
2413
3142
3412
3421
4123
4312
4321

12345	12345	12345	12345
21453	31254	41253	51234
21534	31452	41523	51423
23154	31524	41532	51432
23451	34152	43152	53124
23514	34251	43251	53214
24153	34512	43512	53412
24513	34521	43521	53421
24531	35124	45123	54123
25134	35214	45132	54132
25413	35412	45213	54213
25431	35421	45231	54231

Nachdem die Rangordnung der Permutationen überhaupt, und also auch der gesuchten x_n Permutationen, schon in den Anfangsgründen der Combinatorik festgestellt ist*), hat man jedenfalls wieder die in dieser Disciplin durchweg massgebende Regel zu befolgen, nach welcher man die gesuchten Permutationen nach der Ordnung ihres Ranges und folglich ohne Auslassung und ohne Wiederholung erhalten muss.

Man gehe von der dem Range nach niedersten Permutation aus, lasse die ersten Elemente derselben solange es angeht unverändert stehen und erhöhe — um zur nächstfolgenden Permutation überzugehen — jeweils das spät este „erhöhbare" Element so wenig als möglich, besetze alsdann die noch vacanten Stellen der Reihe nach so niedrig als möglich mit den daselbst „verwendbaren" oder „disponibeln" Elementen.

Die niederste Permutation wird jedenfalls erhalten, indem man die Stellen von links nach rechts fortschreitend je mit dem niedersten der Elemente besetzt, welche für sie verwendbar sind.

So wenig als möglich wird man ferner ein Element erhöhen, wenn man es durch das nächst höhere unter den an seiner Stelle verwendbaren Elementen ersetzt.

Erhöhbar wird ferner ein Element immer dann sein, wenn unter den für seine Stelle verwendbaren Elementen sich noch mindestens eines, welches höher als dasselbe ist, befindet. [Wie beim gewöhnlichen Permutiren kann also das letzte Element niemals erhöhbar

*) Die Vergleichung des Ranges erfolgt bekanntlich conventionell in derselben Weise wie die der Grösse von gleichvielziffrigen natürlichen Zahlen.

sein, weil zur Besetzung seiner Stelle je nur das eine Element verwendbar ist, welches hier allein noch übrig.]

Die Frage aber, welche Elemente an einer Stelle verwendbar seien, bleibt noch zu beantworten. Die Antwort wird bedingt durch die Beschränkungen, die zu den gewöhnlichen in der Forderung des Permutirens liegenden Vorschriften hier noch hinzutreten.

An einer bestimmten Stelle (wenn bis zu dieser hin die Permutation schon angeschrieben gedacht wird) „verwendbar" sind jedenfalls nur diejenigen von den noch nicht bereits verwendeten Elementen, deren Nummer von dem Zeiger der betrachteten Stelle verschieden ist. Indessen genügt dies noch nicht; vielmehr werden diese noch übrigen und mit der zu besetzenden Stelle ungleichnamigen Elemente nicht immer sämmtlich zur Besetzung derselben verwendbar sein. A priori tritt nämlich die Forderung hinzu, dass nach Verwendung eines Elements auch für alle nachfolgenden noch unbesetzten Stellen verwendbare Elemente übrig zu bleiben haben.

Sind am Ende der Permutation zwei oder mehr Stellen unbesetzt, so kann man diese immer mit den noch übrigen Elementen (der Vorschrift entsprechend) besetzen, selbst in dem ungünstigsten Falle, wo diese übrigen Elemente gerade die Nummern der unbesetzten Stellen tragen sollten. Anders, wenn nur noch eine Stelle (die letzte) zu besetzen bleibt. Hier kann es sich ereignen, dass das übrig bleibende Element das höchste, also mit ebendieser Stelle gleichnamig und somit für sie nicht verwendbar ist.

An der vorletzten Stelle tritt hienach zu den schon angegebenen Kennzeichen der Verwendbarkeit noch die beschränkende Anforderung hinzu, dass für die letzte Stelle das höchste Element nicht übrig bleiben dürfe.

Damit ist nunmehr das Verfahren durchaus geregelt, so, wie es übrigens schon an dem Schema erkennbar und durch dasselbe leicht zu controliren ist.

§ 4.

Mit der Ermittelung von x_n ist auch die Frage erledigt nach der Anzahl der Substitutionen irgendwievielten, etwa $h(\leqq n)$-ten Grades, die in der vollständigen Gruppe enthalten sind.

Bestimmte h von den n Elementen lassen sich auf x_h Arten so permutiren, dass immer alle diese h Elemente versetzt werden. Jene h allein zu versetzenden Elemente lassen aber in der geordneten

Anfangspermutation $123\ldots n$ sich auf $(n)_h$ verschiedene Arten auswählen. Folglich muss die vollständige Gruppe gerade $(n)_h . x_h$ Substitutionen $h$ten Grades enthalten.

Aus dieser Ueberlegung ergibt sich mit Notwendigkeit die folgende Zerfällung der Zahl $n!$, entsprechend den in der vollständigen Gruppe enthaltenen Mengen von Substitutionen $n$ten, $n-1$ten, ... 2ten, 1ten, 0ten Grades:

$$17) \qquad n! = \sum_0^n {}_h (n)_h x_h = x_n + (n)_{n-1} x_{n-1} + \ldots + (n)_2 x_2 + (n)_0.$$

Dabei ist die Substitution 0ten Grades offenbar die identische, da sie kein Element versetzt, die zugehörige Anzahl also $x_0 = 1$. Eine Substitution ersten Grades hätte keinen Sinn; der diesen entsprechende, ihre Anzahl ausdrückende Factor x_1 ist aber stets gleich 0 — vergl. 1) — sodass solche Substitutionen in der Tat nicht vorkommen.

Beispielsweise ist für $n = 7$ richtig:

$$5040 = 1 + 7.0 + 21.1 + 35.2 + 35.9 + 21.44 + 7.265 + 1854.$$

Nach Einsetzung der Werte 1) der x_h lässt sich die Gleichung 17) durch $n!$ kürzen, und bleibt:

$$18) \qquad 1 = \sum_0^n {}_h \sum_0^h {}_k \text{ oder } \sum_0^n {}_k \sum_k^n {}_h \frac{(-1)^k}{k!(n-h)!}.$$

Keine dieser beiden Summationen — weder die senkrechte noch die wagrechte in dem rechtwinklig dreieckigen Schema, welches die Glieder der Doppelsumme, ausführlich hingeschrieben, bilden würden — lässt sich einzeln ausführen. Dagegen gelingt es leicht, die Formel 18) zu verificiren und somit direct zu beweisen, indem man immer die Glieder zusammenzieht, welche in einer zur Hypotenuse des genannten Dreiecks parallelen Reihe stehen.

Führt man $n-h+k = g$ als neue Summationsvariable ein, so kommt in der Tat:

$$1 = \sum_0^n {}_k \sum_k^n {}_g \text{ oder } \sum_0^n {}_g \sum_0^g {}_k \frac{(-1)^k}{k!(g-k)!} = \sum_0^n {}_g\, g! \sum_0^g {}_k (-1)^k (g)_k$$

$$= \sum_0^n {}_g\, g!(1-1)^g = 0!(1-1)^0$$

als eine Identität heraus.

§ 5.

Wir treten nun der eingangs angedeuteten Aufgabe näher, die Anzahl der aus n Elementen möglichen Substitutionen zu ermitteln, welche in eine gegebene Anzahl von Elementarcyklen zerfallen (d. h. von Cyklen, die kein Element gemein haben).

Es wird sich wiederum zeigen, dass es genügt, diese Aufgabe für die x_n Substitutionen $n$ten Grades zu lösen, vergl. § 7.

Bei der Zerfällung einer Substitution $n$ter Ordnung und $n$ten Grades in Cyklen werden dann Cyklen erster Ordnung ausgeschlossen sein, weil beim Auftreten eines solchen Cyklus, wie (α), ein Element — hier α — unverändert bliebe, und folglich die Substitution nicht alle Elemente versetzen würde.

Mit $x_n^{(k)}$ werde die Anzahl der Substitutionen $n$ten Grades aus n Elementen bezeichnet, welche in k Cyklen zerfallen.

Dann wird a priori sein müssen:

$$19)\qquad x_n = x_n^{(1)} + x_n^{(2)} + x_n^{(3)} + \dots$$

Die Reihe rechts bricht natürlich ab, und ist das letzte Glied dadurch bestimmt, dass

$$20)\qquad x_n^{(k)} = 0 \text{ für } n < 2k$$

wird. Sollte in der Tat $k > \frac{n}{2}$ sein, so könnte nicht mehr jeder von den k Elementarcyklen, in welche die Substitution zerfallen soll, mindestens zwei Elemente enthalten.

Weiter ist:

$$21)\qquad x_n^{(1)} = (n-1)!$$

bekannt. Denn besteht die Substitution aus einem einzigen Cyklus, so ist sie von dem Typus $(123\dots n)$. In dieser Form lassen sich die Elemente allerdings auf $n!$ Arten versetzen; es gelten aber alle die so entstehenden Formen für gleich, die aus einer von ihnen durch cyklische Vertauschung der Elemente in der Klammer hervorgehen; daher ist die Anzahl der verschiedenen Substitutionen der $n$te Teil von $n!$, wie angegeben, d. h. gleich der Anzahl der möglichen Versetzungen von n verschiedenen im Kreise herum geschriebenen Elementen, wenn diese in einem bestimmten Drehungssinne gelesen werden. Obwol die vorstehende Ueberlegung längst bekannt ist, habe ich sie hier nicht unterdrückt, weil man sie bei den nachfolgenden Schlüssen häufig vor Augen haben muss.

Wenn wir nun $x_n - x_n^{(1)} = X_n^{(1)}$ bezeichnen, so haben wir nach 5) und 21) die Tabelle:

$X_2^{(1)} = 0$, $X_3^{(1)} = 0$, $X_4^{(1)} = 3$, $X_5^{(1)} = 20$, $X_6^{(1)} = 145$, $X_7^{(1)} = 1134$, $X_8^{(1)} = 9793$, $X_9^{(1)} = 93176$, $X_{10}^{(1)} = 972081$, $X_{11}^{(1)} = 11055770$, $X_{12}^{(1)} = 136298041$, etc.,

die einen Ueberblick gibt über die Anzahl der Substitutionen 2, 3, 4, ... 12ten Grades aus jeweils ebensoviel Elementen, welche aus mehr als einem Elementarcyklus bestehen.

Für ein beliebiges $k > 1$ wollen wir nun vor allem einen Ueberblick der (formalen sowol als bis zu $n = 12$ auch der numerischen) Resultate unsrer Untersuchung geben, um dieselben dann im folgenden Paragraphen zu beweisen.

Zur bequemsten Berechnung der Grössen $x_n^{(k)}$ verhelfen zwei Sätze, deren erster aussagt, dass

$$x_{2k}^{(k)} = 1.3.5.7 \dots (2k-1) = \frac{(2k)!}{k!\,2^k} \tag{22}$$

ist, und uns jeweils das erste nicht verschwindende Glied der für ein bestimmtes k gesuchten Reihe von Werten liefert, und deren zweiter die Geltung der Recursion behauptet:

$$x_{n+1}^{(k)} = n\{x_n^{(k)} + x_{n-1}^{(k-1)}\}. \tag{23}$$

Die Formel 22) folgt übrigens leicht mit aus 23), da für $n = 2k-1$ letztere mit Rücksicht auf 20) in $x_{2k}^{(k)} = (2k-1)x_{2k-2}^{(k-1)}$ übergeht und $x_2^{(1)} = 1$ nach 21) ist.

Als einen dritten Satz kann man die Recursion anführen:

$$x_n^{(k)} = (n-1)!\sum_{2k-2}^{n-2}{}_h \frac{1}{h!}\,x_h^{(k-1)} \tag{24}$$

und hat viertens die independente Darstellung:

$$x_n^{(k)} = \frac{n!}{k!}\sum_{\alpha_1+\alpha_2+\dots\alpha_k=n}{}' \frac{1}{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k}, \tag{25}$$

wobei der Apostroph über dem Summenzeichen andeuten soll, dass nur über die ganzzahligen Wurzeln der darunter gesetzten Gleichung summirt werden soll, welche die 1 übersteigen.

Es ist nun aber fünftens wahrzunehmen, dass sich der Ausdruck 25) durch $k!$ kürzen lässt, und zwar so, dass wir haben:

$$x_n^{(2)} = (n-1)! \sum_{2}^{n-2}{}_{\alpha} \frac{1}{\alpha}, \qquad x_n^{(3)} = (n-1)! \sum_{4}^{n-2}{}_{\alpha} \sum_{2}^{\alpha-2}{}_{\beta} \frac{1}{\alpha\beta},$$

$$x_n^{(4)} = (n-1)! \sum_{6}^{n-2}{}_{\alpha} \sum_{4}^{\alpha-2}{}_{\beta} \sum_{2}^{\beta-2}{}_{\gamma} \frac{1}{\alpha\beta\gamma}, \text{ etc.}$$

und dass allgemein $x_n^{(k)}$, auf die eleganteste Form gebracht, die $(k-1)$fache Summe sein wird:

$$26) \qquad x_n^{(k)} = (n-1)! \sum_{2k-2}^{n-2}{}_{\alpha_1} \sum_{2k-4}^{\alpha_1-2}{}_{\alpha_2} \cdots \sum_{2}^{\alpha_{k-2}-2}{}_{\alpha_{k-1}} \frac{1}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}}.$$

Numerisch ergibt sich:

27)

$x_4^{(2)} = 3$, $x_5^{(2)} = 20$, $x_6^{(2)} = 130$, $x_7^{(2)} = 924$, $x_8^{(2)} = 7308$, $x_9^{(2)} = 64224$,
$x_{10}^{(2)} = 623376$, $x_{11}^{(2)} = 6636960$, $x_{12}^{(2)} = 76998240$, ...
$x_6^{(3)} = 15$, $x_7^{(3)} = 210$, $x_8^{(3)} = 2380$, $x_9^{(3)} = 26432$, $x_{10}^{(3)} = 303660$,
$x_{11}^{(3)} = 3678840$, $x_{12}^{(3)} = 47324376$, ...
$x_8^{(4)} = 105$, $x_9^{(4)} = 2520$, $x_{10}^{(4)} = 44100$, $x_{11}^{(4)} = 705320$,
$x_{12}^{(4)} = 11098780$, ...
$x_{10}^{(5)} = 945$, $x_{11}^{(5)} = 34650$, $x_{12}^{(5)} = 866250$, ...
$x_{12}^{(6)} = 10395$, ...

Mit Benutzung dieser Werte bleibt:

$X_4^{(2)} = X_5^{(2)} = 0$, $X_6^{(2)} = 15$, $X_7^{(2)} = 210$, $X_8^{(2)} = 2485$, $X_9^{(2)} = 28952$,
$X_{10}^{(2)} = 348705$, $X_{11}^{(2)} = 4418810$, $X_{12}^{(2)} = 59299801$, ...

als Tabelle der Anzahl Substitutionen vom Grade des Suffixums aus ebensoviel Elementen, welche in mehr als zwei Cyklen zerfallen, desgleichen für mehr als 3, 4, 5, 6 Cyklen:

$X_6^{(3)} = X_7^{(3)} = 0$, $X_8^{(3)} = 105$, $X_9^{(3)} = 2520$, $X_{10}^{(3)} = 45045$, $X_{11}^{(3)} = 739970$,
$X_{12}^{(3)} = 11975425$, ..., $X_8^{(4)} = X_9^{(4)} = 0$, $X_{10}^{(4)} = 945$, $X_{11}^{(4)} = 34650$,
$X_{12}^{(4)} = 876645$, ..., $X_{10}^{(5)} = X_{11}^{(5)} = 0$, $X_{12}^{(5)} = 10395$, ..., $X_{12}^{(6)} = 0$, ...

wobei in dem schliesslichen Aufgehen eine Controle der Richtigkeit der Tabelle 27) liegt.

§ 6.

Ich beweise die Formel 26) zunächst für $k = 2$. Bei der Aufsuchung von $x_n^{(2)}$ können wir $n > 3$ voraussetzen.

Eine Substitution der fraglichen Art zerfalle in einen Cyklus aus α und einen zweiten aus $n - \alpha$ Elementen, so ist zunächst leicht an-

zugeben, wie viel Substitutionen derselben Zerfällungsweise existiren. Es können die Elemente des ersten Cyklusfactors auf $(n)_\alpha$ Arten ausgewählt werden; die Elemente des zweiten Cyklusfactors sind dann als die übrig bleibenden jeweils von selbst bestimmt. Die Elemente des ersten lassen ferner $(\alpha-1)!$, die des zweiten $(n-\alpha-1)!$ Permutationen zu, welche im Ringe herum gelesen von einander verschieden bleiben; folglich ist, wenn α und $n-\alpha$ verschieden sind, die gefragte Anzahl:

$$=(\alpha-1)!\,(n-\alpha-1)!\,(n)_\alpha.$$

Nur in dem Falle, wo $\alpha=n-\alpha$ ist, welcher natürlich blos bei geradem n für $\alpha=\frac{n}{2}$ einmal eintritt, würde hiebei jede Substitution zweimal gezählt erscheinen, indem jeweils der zweite Cyklusfactor auch einmal die Elemente enthalten wird, welche der erste enthalten hatte. In diesem Falle wäre also dem obigen Ausdruck noch der Factor $\frac{1}{2}$ voranzusetzen.

Um nun aber nicht auf die Unterscheidung gerader und ungerader n eingehen zu müssen, bilden wir jede Zerlegung, bei der α und $n-\alpha$ verschieden sind, zwei mal, die bei der sie gleich sind, nur ein mal und setzen gleichmässig den Factor $\frac{1}{2}$ vor.

Dies kann dadurch geschehen, dass man die Gleichung $\alpha+\beta=n$ arithmographisch auflöst (es handelt sich nur um die ganzzahligen Wurzeln dieser Gleichung, welche $=$ oder >2 sind), d. h. es wird bewerkstelligt, indem wir α die Werte von 2 bis $n-2$ einfach durchlaufen lassen und jeweils $\beta=n-\alpha$ nehmen. Sonach ergibt sich:

$$x_n^{(2)}=\tfrac{1}{2}\sum_{2}^{n-2}{}_\alpha\,(\alpha-1)!\,(n-\alpha-1)!\,(n)_\alpha=\frac{n!}{2!}\sum_{2}^{n-2}{}_\alpha\,\frac{1}{\alpha(n-\alpha)}$$

als die hier gesuchte Anzahl.

Dieser Ausdruck lässt aber noch eine bemerkenswerte Vereinfachung zu. Bedienen wir uns nämlich der Partialbruchzerlegung:

$$\frac{n}{\alpha(n-\alpha)}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{n-\alpha}$$

und führen in der vom zweiten Term herrührenden Summe $n-\alpha$ als neue Summationsvariable ein, so erkennen wir, dass sie mit der auf den ersten Term bezüglichen Summe identisch ist; letztere erhalten wir also doppelt, darnach hebt sich die 2, und entsteht gerade der zu beweisende Ausdruck, den wir über 26) für $x_n^{(2)}$ angegeben haben.

Es mag noch angeführt werden, dass sich unser eben gefundenes Resultat dahin verallgemeinern lässt, dass, wenn $n-k \geqq k+2$, also $k \leqq \frac{n-2}{2}$ gedacht wird, der Ausdruck:

$$(n-1)!\, \sum_{n-k}^{k} {}_\alpha \frac{1}{\alpha}$$

die Anzahl derjenigen in zwei Cyklen zerfallenden Substitutionen $n$ten Grades vorstellt, bei denen kein Cyklus von höherem als dem $k$ten, also auch keiner von niederem als dem $n-k$ten Grade ist — wie sich ganz auf dieselbe Weise zeigen liesse.

Der allgemeine Beweis der Formeln 26) für irgend ein k würde sich etwas unbequem darstellen und auch einen ziemlich abstrusen Eindruck hervorbringen, da hiebei mit einer unbestimmten Menge von Summenzeichen eine ebensolche Anzahl mal zu operiren wäre. Ich ziehe daher im Interesse der Darstellung sowol als des Lesers vor, diesen Beweis hier nur etwa für $k=4$ wirklich durchzuführen, woraus vollkommen die Methoden und Ueberlegungen ersichtlich sein werden, die im allgemeinen Falle offenbar ebenso zum Ziel führen müssen.

Bei der Untersuchung, wie viele Substitutionen $n$ten Grades aus ebensoviel Elementen in vier Elementarcyklen zerfallen, können wir $n > 7$ voraussetzen. Die vier Cyklen seien bezüglich α, β, γ, δten Grades, wo dann $\delta = n-\alpha-\beta-\gamma$ bedeuten wird.

Dann lassen sich die α Elemente des ersten Cyklus auf $(n)_\alpha$ Arten auswählen, darnach die β Elemente des zweiten Cyklus noch auf $(n-\alpha)_\beta$ Arten unter den $n-\alpha$ übrigen Elementen, und die γ Elemente des dritten Cyklus auf $(n-\alpha-\beta)_\gamma$ Arten unter den $n-\alpha-\beta$ übrigen Elementen; die δ Elemente des letzten Cyklus sind als die dann noch übrig gebliebenen jeweils von selbst bestimmt. Die Elemente des ersten Cyklus geben ferner zu $(\alpha-1)!$, die des zweiten zu $(\beta-1)!$, des dritten zu $(\gamma-1)!$ und des letzten zu $(\delta-1)!$ Permutationen Gelegenheit; folglich ist, wenn α, β, γ, δ von einander verschieden sind:

$$(\alpha-1)!\,(\beta-1)!\,(\gamma-1)!\,(n-\alpha-\beta-\gamma-1)!\,(n)_\alpha\,(n-\alpha)_\beta\,(n-\alpha-\beta)_\gamma = \frac{n!}{\alpha\beta\gamma\delta}$$

die Anzahl der möglichen Substitutionen des gedachten Typus.

Sind aber irgend zwei von den vier Gradzahlen einander gleich, so ist wegen der eintretenden Aehnlichkeit zwischen den zwei zugehörigen Cyklen obiger Ausdruck noch durch 2! und, falls auch die beiden andern Gradzahlen gleich sind, durch 2! 2! zu dividiren, da-

gegen durch 3!, wenn irgend drei, und durch 4!, wenn alle vier Gradzahlen α, β, γ, δ einander gleich sind.

Um nun nicht die 24 verschiedenen Fälle unterscheiden zu müssen, welche in Bezug auf den Rest der Division von n durch 4! eintreten können, richten wir die Auflösung der Gleichung

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=n$$

nach ihren ganzzahligen die 1 überschreitenden Wurzeln so ein, dass wir die Fälle von vier verschiedenen Wurzeln je $4!=24$ mal, die von nur zwei gleichen Wurzeln je $\frac{4!}{2!}=12$ mal, von paarweise gleichen je $\frac{4!}{2!\,2!}=6$ mal, die dreier gleichen Wurzeln je $\frac{4!}{3!}=4$ mal und eventuell den Fall von vier gleichen Wurzeln nur $\frac{4!}{4!}=1$ mal erhalten, und dividiren die Summe der nach obigem Schema gebildeten Anzahlen durchgängig durch 4!. Auf diese Weise wird offenbar die einem jeden Zerlegungstypus entsprechende Anzahl geradeso in Rechnung gebracht, wie es nach dem vorigen Alinea zu geschehen hat.

Jenes aber wird einfach erreicht durch die vollständige Auflösung der angeführten Gleichung, indem wir den α, β, γ, δ nicht etwa blos die Combinationen, sondern die Variationen aller der Wertsysteme beilegen, welche überhaupt an deren Stelle treten können. Sonach wird im Einklang mit 25):

$$x_n^{(4)}=\frac{n!}{4!}\sum_{(\alpha+\beta+\gamma+\delta=n)}{}' \frac{1}{\alpha\beta\gamma\delta}$$

Um dieses Resultat noch zu vereinfachen, zerlege man:

$$\frac{n}{\alpha\beta\gamma\delta}=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}+\frac{1}{\alpha\beta\delta}+\frac{1}{\alpha\gamma\delta}+\frac{1}{\beta\gamma\delta}$$

und bemerke, dass die von diesen vier Termen herrührenden Summen, weil über die nämlichen Wertetripel erstreckt, notwendig übereinstimmen. Darnach hebt sich der Factor 4 und entsteht:

$$x_n^{(4)}=\frac{(n-1)!}{3!}\Sigma'\frac{1}{\alpha\beta\gamma}$$

mit derselben Erstreckung des Summenzeichens wie oben.

In der vorstehenden Summe (deren Zeichen wir auch durch $\Sigma_\alpha\Sigma_\beta\Sigma_\gamma$ ersetzen könnten), denken wir uns ferner die Glieder zusammengefasst, in welchen $\alpha+\beta+\gamma=k$ denselben Wert hat; es wird dann k die Werte von $2+2+2=6$ bis $n-2$ zu durchlaufen

haben. Alsdann können wir abermals von der identischen Zerlegung Gebrauch machen:

$$\frac{1}{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha\gamma} + \frac{1}{\beta\gamma}\right)$$

und berücksichtigen, dass wieder die von den 3 Termen rechts herrührenden Summen wegen der Symmetrie der von den α, β, γ zu durchlaufenden Wertsysteme einander gleich sein müssen. Hienach kann man durch 3 kürzen und gewinnt:

$$x_n^{(4)} = \frac{(n-1)!}{2!} \sum_6^{n-2}{}_k \frac{1}{k} \Sigma' \frac{1}{\alpha\beta}$$

mit der alten Bedeutung des letzten Summenzeichens.

Werden hier endlich die Glieder mit constantem $\alpha+\beta = h$ zusammengefasst, so wird h die Werte von $2+2=4$ bis $k-2$ zu durchlaufen haben (letzteres, weil für γ noch mindestens der Wert 2 übrig zu bleiben hat). Man zerlege dann:

$$\frac{1}{\alpha\beta} = \frac{1}{h}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)$$

bemerke, dass die von den beiden Termen rechts herrührenden Summen übereinstimmen, und erhält nach Kürzung durch 2:

$$x_n^{(4)} = (n-1)! \sum_6^{n-2}{}_k \sum_4^{k-2}{}_h \sum_2^{h-2}{}_\alpha \frac{1}{kh\alpha}$$

in Anbetracht, dass die dem α zukommenden Werte von vornherein die angegebenen sein müssen.

Dieser Ausdruck stimmt nun aber bis auf die Bezeichnung der Summationsvariabeln mit dem über 26) angegebenen, zu beweisen gewesenen, überein.

Wir haben bei dem vorstehenden Beweise mit einer combinatorischen Summe operirt. Man kann jedoch auch sozusagen mit peinlicher Genauigkeit zuwerke gehen, indem man immer blos mit arithmetischen Summen arbeitet. Hiebei haben wir als ursprünglichen Ausdruck der gesuchten Grösse:

$$x_n^{(4)} = \frac{n!}{4!} \sum_2^{n-6}{}_\alpha \sum_2^{n-4-\alpha}{}_\beta \sum_2^{n-2-\alpha-\beta}{}_\gamma \frac{1}{\alpha\beta\gamma(n-\alpha-\beta-\gamma)},$$

oder unter Anwendung desselben Schemas wie oben (worin nur δ durch seinen Wert $n-\alpha-\beta-\gamma$ vertreten zu denken ist) durch 4 gekürzt:

$$x_n^{(4)} = \frac{(n-1)!}{3!} \Sigma_\alpha \Sigma_\beta \Sigma_\gamma \frac{1}{\alpha\beta\gamma}$$

mit bezüglich denselben Summengrenzen, wie vorstehend.

Setzen wir nun $\gamma = k - \alpha - \beta$, wenden die zweite Zerlegung an, nach welcher sich die 3 forthebt, so kommt:

$$x_n^{(4)} = \frac{(n-1)!}{2!} \sum_{2}^{n-6}{}_\alpha \sum_{2}^{n-4-\alpha}{}_\beta \sum_{\alpha+\beta+2}^{n-2}{}_k \frac{1}{k\alpha\beta}$$

und wenn endlich $\beta = h - \alpha$ eingeführt wird, unter Benutzung der dritten Zerlegung und Kürzung durch 2:

$$x_n^{(4)} = (n-1)! \sum_{2}^{n-6}{}_\alpha \sum_{\alpha+2}^{n-4}{}_h \sum_{h+2}^{n-2}{}_k \frac{1}{kh\alpha}.$$

Hier kommt es nun blos noch darauf an, die Summationsordnung in die entgegengesetzte zu verwandeln. Dies kann geschehen durch wiederholte Anwendung des Schemas:

$$28) \qquad \sum_{p}^{q}{}_a \sum_{a+r}^{q+r}{}_b = \sum_{p+r}^{q+r}{}_b \sum_{p}^{b-r}{}_a,$$

welches ich auf S. 335 meines Lehrbuchs*) unter $(362)_\beta$ aufgestellt habe. Man erhält so successive:

$$\sum_{2}^{n-6}{}_\alpha \sum_{\alpha+4}^{n-2}{}_k \sum_{\alpha+2}^{k-2}{}_h = \sum_{6}^{n-2}{}_k \sum_{2}^{k-4}{}_\alpha \sum_{\alpha+2}^{k-2}{}_h = \sum_{6}^{n-2}{}_k \sum_{4}^{k-2}{}_h \sum_{2}^{h-2}{}_\alpha$$

als die auszuführenden Summationen, q. e. d.

Noch leichter würde auch die Gleichheit der bei obigen Zerlegungen auf die verschiedenen Terme bezüglichen Summen zum Ueberfluss sich mittelst eventueller Abänderung der Summationsfolge und Einführung der geeigneten Summationsvariabeln rein mechanisch nachweisen lassen.

Mittelst der nun bewahrheiteten Formel 26) erweist sich zunächst die Formel 24) direct als eine Identität und aus dieser fliesst sofort die Recursion 23), sodass sich alle Ergebnisse des vorigen Paragraphen nun bewiesen finden.

---

*) Lehrbuch der Arithmetik und Algebra für Lehrer und Studirende, I. Bd. Die sieben algebraischen Operationen, Leipzig, Teubner, 1873, X, 360 S.

§ 7.

Auf unserm jetzigen Standpunkte ist nun leicht die Frage zu beantworten, wie viele Substitutionen der auf n Elemente bezüglichen vollständigen Gruppe aus einem einzigen Cyklus bestehen, wie viele aus 2, 3, ... k Cyklen. Die letztere Anzahl heisse $y_n^{(k)}$, so ist zunächst:

$$29)\qquad y_n^{(1)} = x_n^{(1)} = (n-1)!$$

die Anzahl der Substitutionen, welche aus einem Cyklus bestehen, auch in der ganzen Gruppe, denn eine Substitution der gedachten Art ist notwendig $n$ten Grades, gehört also zu denen, deren Anzahl wir schon bestimmt haben.

Wenn ferner $n-h < n$ Elemente zu versetzen sind, so kann man von den nicht zu versetzenden h Elementen zunächst einfach absehen und wird darnach die für den Fall gleicher Grad- und Elementezahl in § 5 ermittelte Anzahl Substitutionen von gegebener Zerfällungsweise einfach zu multipliciren haben mit dem Factor $(n)_h$ der die möglichen Arten zählt, auf welche die $n-h$ zu versetzenden Elemente unter den n gegebenen ausgewählt werden können. Hiebei wird nur noch zu beachten sein, dass die nicht zu versetzenden h Elemente schliesslich als ebensoviel einelementige Cyklen hinzuzuzählen sind, und dass daher, wenn im ganzen die verlangte Cyklenzahl k resultiren soll, bei dem eben geschilderten Verfahren diese um h verminderte Zahl $k-h$ als die geforderte Cyklenzahl zu Grunde gelegt werden muss. Sonach wird sein:

$$y_n^{(2)} = x_n^{(2)} + (n)_1 x_{n-1}^{(1)}, \quad y_n^{(3)} = x_n^{(3)} + (n)_1 x_{n-1}^{(2)} + (n)_2 x_{n-2}^{(1)},$$

etc. und allgemein:

$$30)\qquad y_n^{(k)} = \sum_{0}^{k-1}{}_h\, (n)_h\, x_{n-h}^{(k-h)}.$$

Setzt man hierin die Werte 25) der $x_n^{(k)}$ ein, so stellt sich ein merkwürdiges Bildungsgesetz heraus. Man erhält z. B. für $k=4$:

$$y_n^{(4)} = \frac{n!}{4!}\left\{ \sum_{\alpha+\beta+\gamma+\delta=n}' \frac{1}{\alpha\beta\gamma\delta} + \frac{4!}{1!\;3!} \sum_{\alpha+\beta+\gamma=n-1}' \frac{1}{\alpha\beta\gamma} \right.$$
$$\left. + \frac{4!}{2!\;2!} \sum_{\alpha+\beta=n-2}' \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{4!}{3!\;1!} \cdot \frac{1}{n-3} \right\}$$

und können wir hier $n > 4$ voraussetzen, da $y_n^{(n)} = 1$ jeweils direct bekannt ist.

Alsdann aber kann man die folgenden Terme in der Klammer in den ersten mit einverleiben, in Anbetracht, dass die vor dem

Summenzeichen stehenden Factoren gerade die Anzahl der Möglichkeiten ausdrücken, auf welche in der Summe $\alpha+\beta+\gamma+\delta$ ein Glied, resp. 2 oder 3 Glieder gleich 1 angenommen werden können. Der Annahme, dass in $\alpha+\beta+\gamma+\delta=n$ alle vier Indices gleich 1 seien, entspricht allerdings in der Parenthese kein Term; diese Annahme ist aber durch die Voraussetzung $n>4$ ausgeschlossen worden.

Sonach entsteht in der Tat:

$$y_n^{(4)}=\frac{n!}{4!}\sum_{\alpha+\beta+\gamma+\delta=n}\frac{1}{\alpha\beta\gamma\delta}=\frac{n!}{4!}\sum_1^{n-3}{}_\alpha\sum_1^{n-\alpha-2}{}_\beta\sum_1^{n-\alpha-\beta-1}{}_\gamma\frac{1}{\alpha\beta\gamma(n-\alpha-\beta-\gamma)}$$

und ist ähnlich leicht zu zeigen, dass allgemein:

$$31)\qquad y_n^{(k)}=\frac{n!}{k!}\sum_{\alpha_1+\alpha_2+\dots\alpha_k=n}\frac{1}{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k}$$

ist, wo nun der Wegfall des Apostrophs beim Summenzeichen andeutet, dass bei der Auflösung der unter dasselbe geschriebenen Gleichung auch die Werte 1 der Indices zuzulassen sind.

Zum Ueberfluss hätte man die Gleichung 31) auch ähnlich wie in § 6 die Formel 25) direct beweisen können, nämlich lediglich unter der Modification, von vornherein auch einelementige Cyklen zuzulassen.

Der Ausdruck 31) lässt sich nun wieder durch $k!$ kürzen, und zwar ist diese Reduction genau nach dem Vorbilde des § 6 auszuführen. Nach derselben Methode, durch welche wir 25) in 26) verwandelt haben, können wir 31) zu einem Ausdruck reduciren, dessen Bau ersichtlich ist aus der Angabe:

$$32)\qquad \begin{gathered} y_n^{(2)}=(n-1)!\sum_1^{n-1}{}_\alpha\frac{1}{\alpha},\quad y_n^{(3)}=(n-1)!\sum_2^{n-1}{}_\alpha\sum_1^{\alpha-1}{}_\beta\frac{1}{\alpha\beta},\\ y_n^{(4)}=(n-1)!\sum_3^{n-1}{}_\alpha\sum_2^{\alpha-1}{}_\beta\sum_1^{\beta-1}{}_\gamma\frac{1}{\alpha\beta\gamma}.\quad \text{etc.}\end{gathered}$$

Hiernach aber erweist sich direct als Identität die recurrirende Gleichung:

$$33)\qquad y_n^{(k)}=(n-1)!\sum_{k-1}^{n-1}{}_h\frac{1}{h!}\,y_h^{(k-1)},$$

welche zu 24) analog ist, und hieraus fliesst wieder die noch einfachere, der 23) entsprechende Recursion:

$$34)\qquad y_{n+1}^{(k)}=n\,y_n^{(k)}+y_n^{(k-1)},$$

welche zusammen mit den Anfangswerten $y_n^{(1)}=(n-1)!$ und $y_n^{(n)}=1$ das bequemste Mittel bietet, eine Tabelle der Zahlen $y_n^{(k)}$ anzulegen.

Eine solche führen wir nachstehend bis zu $n = 6$ an:

35)

	$y^{(1)}$	$y^{(2)}$	$y^{(3)}$	$y^{(4)}$	$y^{(5)}$	$y^{(6)}$
y_1	1					
y_2	1	1				
y_3	2	3	1			
y_4	6	11	6	1		
y_5	24	50	35	10	1	
y_6	120	274	225	85	15	1

Die Zahlen dieser Tabelle sind nicht neu; dieselben sind augenscheinlich die (Zähler der) bekannten Facultätencoefficienten. In der Tat ist:

36) $$y_n^{(k)} = (-1)^{n-k}\mathfrak{C}_{n-k}^{(k)},$$

wenn $(-1)^n\mathfrak{C}_n^{(k)}$ bedeutet: die Summe aller Combinationen ohne Wiederholungen zur $k$ten Klasse (diese Combinationen als Producte aufgefasst) aus den Elementen $1, 2, 3, \ldots n+k-1$. Das heisst, wir haben den Satz:

D i e A n z a h l $y_n^{(k)}$ d e r j e n i g e n v o n d e n $n!$ S u b s t i t u t i o n e n d e r v o l l s t ä n d i g e n G r u p p e , w e l c h e i n k C y k l e n z e r f a l l e n , i s t g l e i c h d e r S u m m e d e r m u l t i p l i c a t i v e n C o m b i n a t i o n e n o h n e W i e d e r h o l u n g e n z u r $n-k$ t e n C l a s s e a u s d e n E l e m e n t e n $1, 2, 3, \ldots n-1$.

Es darf dieses Ergebniss wol als überraschend bezeichnet werden. Der Beweis der Gleichung 36) liegt darin, dass durch dieselbe unsre Recursion 34) übergeht in die folgende:

$$\mathfrak{C}_n^{(k)} = \mathfrak{C}_n^{(k-1)} - (n+k-1)\mathfrak{C}_{n-1}^{(k)},$$

welche zusammen mit den Anfangswerten $\mathfrak{C}_0^{(0)} = \mathfrak{C}_0^{(k)} = 1$ und $\mathfrak{C}_n^{(0)} = 0$ für $n > 0$, oder auch (statt letzterer Angabe) $\mathfrak{C}_n^{(1)} = (-1)^n n!$, die oben definirten Grössen $\mathfrak{C}$ bekanntlich bestimmt*).

Hier werde noch in Erinnerung gebracht, dass wenn:

37) $$\mathfrak{C}_n^{(k)} = \frac{(n+k)!}{k!} C_n^{(k)}$$

*) Vergl. Ubbo Meyer, dieses Archiv, Bd. 9.

gesetzt wird, $C_n^{(k)}$ den Coefficienten von z^n in der Entwickelung der Function $\left\{\frac{l(1+z)}{z}\right\}^k$ nach steigenden Potenzen von z vorstellt, und dass auch die Anordnung des Binomialcoefficienten $(n)_h$ nach Potenzen seines Exponenten n durch eben diese Coefficienten C oder $\mathfrak{C}$ vermittelt wird — siehe 40) weiter unten.

§ 8.

Durch unsre Betrachtungen sind nun für die Coefficienten C Ausdrücke implicite mit gefunden (in Gestalt mehrfacher Summen), die möglicherweise neu sind — bei der ungeheuer zerstreuten Litteratur über diese Coefficienten lässt sich dergleichen schwer entscheiden. Dagegen führt die Relation 33), in die C umgeschrieben, zu der Beziehung:

$$38)\qquad (-1)^n(n+k)C_n^{(k)} = k\sum_0^n{}_h(-1)^h C_h^{(k-1)},$$

welche anderweitig bekannt ist (Lobatto, Crelle's Journal, Bd. 16, S. 11).

A priori muss sein:

$$39)\qquad n! = \sum_1^n{}_k\, y_n^{(k)},$$

und auch dies führt nur zu einer Gleichung, welche in der bekannten:

$$40)\qquad (\mu)_n = \sum_0^n{}_k \frac{\mu^k}{k!} C_{n-k}^{(k)}$$

als der für $\mu = -1$ sich ergebende specielle Fall enthalten ist.

Lösen wir noch die Gleichung 30) nach den Grössen $x_n^{(k)}$ als Unbekannten auf, so ergibt sich, wie man durch die Probe leicht beweisen wird:

$$41)\qquad x_n^{(k)} = \sum_0^{k-1}{}_h(-1)^h(n)_h\, y_{n-h}^{(k-h)},$$

und hienach können wir auch die Zahlen $x_n^{(k)}$ der Paragraphen 5 und 6 durch die Facultätencoefficienten ausdrücken. Wir erhalten:

42)
$$x_n^{(k)} = \sum_0^{k-1}{}_h(-1)^{n-h+k}(n)_h\,\mathfrak{C}_{n-k}^{(k-h)} = (-1)^n\frac{n!}{k!}\sum_1^k{}_h(-1)^h(k)_h\, C_{n-k}^{(h)}.$$

Nun ist:

$$43)\qquad \sum_0^k{}_h(-1)^{k-h}(k)_h\, C_{m+k}^{(h)} = (-\tfrac{1}{2})^k C_m^{(k)}(2),$$

wo $C_m^{(k)}(2)$ den Coefficienten von z^m in der für hinreichend kleine z zulässigen Entwickelung der Function:

$$44)\qquad \left\{ \frac{l(1+z)-z}{-\frac{z^2}{2}} \right\}^k$$

bedeutet, und als untere Grenze der letzten Summe in 42) kann man 0 statt 1 nehmen, da $C_{n-k}^{(0)} = 0$ ist, sobald $n-k > 0$. In der Tat mussten wir stets $k < n$ annehmen, da nach 20) schon für $2k > n$ die Zahl $x_n^{(k)}$ verschwindet. Also wird

$$45)\qquad x_n^{(k)} = \frac{(-1)^n n!}{2^k . k!} C_{n-2k}^{(k)}(2).$$

Durch diese Substitution geht nebenbei die Recursion 23) über in die Differenzengleichung:

$$46)\qquad (n+2k)C_n^{(k)}(2) = -(n+2k-1)C_{n-1}^{(k)}(2) + 2kC_n^{(k-1)}(2),$$

wie sie wirklich von den durch die erzeugende Function 44) definirten Coefficienten $C_n^{(k)}(2)$ gelten muss.

Vorstehende Angaben, so weit sie von 43) ab folgten, begnüge ich mich, hier ohne Beweis angeführt zu haben, da mich die Herleitung derselben zu Weiterungen auf einem dem Titel dieses Aufsatzes fremden Gebiete führen würde, und sie nur specielle Anwendungen allgemeinerer Untersuchungsergebnisse sind, auf welche ich schon in Schlöm. Zeitschr. Bd. 25, S. 107, angespielt habe, und die ich bei einer andern Gelegenheit im Zusammenhange darzulegen hoffe.

Karlsruhe, im November 1881.

XXIII.

Ueber die Stellung der Ebene in der Vierdimensionen-Geometrie.

Von

R. Hoppe.

Zwei Ebenen haben innerhalb vierfacher linearer Ausdehnung im allgemeinen nur einen Punkt gemein. Sie bilden daher unmittelbar keinen Winkel, der ihre gegenseitige Stellung ausdrücken könnte. Es soll nun gezeigt werden, dass es 2 Winkel giebt, welche zusammen als Ausdruck der gegenseitigen Stellung oder Neigung dienen können.

Gehen wir von dem speciellen Falle aus, wo beide Ebenen in einem gemeinsamen Raume liegen, d. i. dem Falle, wo unmittelbar ein Neigungswinkel existirt, so entsteht zuerst die Frage: Wie weit ist ein beliebig gegebenes Ebenenpaar von dieser relativen Stellung entfernt?

Offenbar wird diese Entfernung durch den Winkelabstand gemessen, bis auf welchen die zwei Räume, in welchen die Ebenen liegen, sich einander nähern können. Der Winkel zwischen 2 Räumen ist der zwischen ihren Normalen. Wir haben also die beiden Räume jeden um die zugehörige Ebene rotiren zu lassen, und von dem Winkel zwischen ihnen, der sich als Function zweier Unabhängigen darstellt, das Minimum zu suchen. Wir nennen den so erhaltenen Winkel den ersten Neigungswinkel oder Raumwinkel der 2 Ebenen.

Jetzt lassen wir den einen der so bestimmten Räume samt seiner Ebene um die Durchschnittsebene beider Räume soweit rotiren, bis er in den andern Raum fällt. In dieser neuen Lage bilden dann die



2 Ebenen einen gewöhnlichen Flächenwinkel, den wir **zweiten Neigungswinkel** oder **Flächenwinkel** der 2 Ebenen nennen.

Die Einführung dieser 2 Grössen wird noch eine besondere Rechtfertigung erhalten, wenn wir finden, dass beide Winkel in einer coordinirten Beziehung zu einander stehen und aus der Rechnung immer zugleich resultiren.

Um Unterbrechungen zu vermeiden, will ich eine öfter in Anwendung kommende Aufgabe vorher behandeln, und zwar in grösserer Allgemeinheit, weil die Einfachheit der Lösung überall dieselbe ist.

§. 1. Bestimmung eines Lotes durch einen gegebenen Punkt auf eine innerhalb einer linearen *n* dehnung gegebene lineare *m* dehnung.

Der gegebene Punkt habe die rechtwinkligen Coordinaten ξ, ξ_1, ξ_2, ... ξ_{n-1}. Die Gleichungen der gegebenen *m* dehnung, welche durch den Anfangspunkt gehe, seien:

$$\Sigma a^{(k)} x = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots n-m) \tag{1}$$

Das Summenzeichen Σ beziehe sich stets auf die Grössenwerte, welche den *n* Coordinatenaxen entsprechen, so dass

$$\Sigma N = N + N_1 + N_2 + \ldots N_{n-1}$$

Dann ist das Quadrat des Abstandes des Punktes (ξ) vom beliebigem Punkte der *m* dehnung (x)

$$r^2 = \Sigma(x-\xi)^2 \tag{2}$$

ein Minimum für

$$0 = \Sigma(x-\xi)\delta x; \quad 0 = \Sigma a^{(k)} \delta x$$

woraus:

$$x = \xi + e_1 a' + e_2 a'' + \ldots e_{n-m} a^{(n-m)} \tag{3}$$

Dies eingeführt in Gl. (1) giebt:

$$0 = \Sigma a^{(k)}\xi + e_1 \Sigma a^{(k)} a' + e_2 \Sigma a^{(k)} a'' + \ldots e_{n-m} \Sigma a^{(k)} a^{(n-m)} \tag{4}$$

$$k = 1, 2, \ldots n-m$$

Liegt (ξ) ausserhalb der *m* dehnung, so erhält man nach Elimination der *e*:

$$\begin{vmatrix} \xi - x & a' & a'' & \ldots & a^{(n-m)} \\ \Sigma a'\xi & \Sigma a'^2 & \Sigma a' a'' & \ldots & \Sigma a' a^{(n-m)} \\ \Sigma a''\xi & \Sigma a'' a' & \Sigma a''^2 & \ldots & \Sigma a'' a^{(n-m)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Sigma a^{(n-m)}\xi & \Sigma a^{(n-m)} a' & \Sigma a^{(n-m)} a'' & \ldots & \Sigma [a^{(n-m)}]^2 \end{vmatrix} = 0 \tag{5}$$

Hiermit ist $x-\xi$ als lineare Function der ξ, und zwar unmittelbar der Grössen $\Sigma a^{(k)}\xi$ dargestellt. Nach Einführung in (2) findet man r und hieraus die Richtungscosinus des Lotes

$$\frac{x-\xi}{r}$$

Liegt (ξ) innerhalb der $m$dehnung, so verschwinden die Elemente der ersten Verticalreihe in (5) vom 2ten an; es folgt

$$x-\xi=0;\quad r=0$$

Die Gleichungen für die e werden homogen, mithin unzureichend.

Für diesen Fall sei die Aufgabe: im Punkte (ξ) ein Lot innerhalb einer gegebenen $(m+1)$dehnung, in welcher die $m$dehnung (1) liegt, zu errichten und einen Punkt (ξ') im gegebenen Abstande r von (ξ) auf dem Lote anzugeben.

Hier hat man nach Gl. (2) (3):

$$r^2=\Sigma(\xi-\xi')^2$$

$$\xi=\xi'+e_1a'+e_2a''+\ldots e_{n-m}a^{(n-m)} \tag{6}$$

Sind dann

$$\Sigma b^{(k)}\xi'=0;\quad k=1,2,\ldots n-m-1$$

die Gleichungen der gegebenen $(m+1)$dehnung, so werden die e bestimmt durch die $n-m-1$ linearen Gleichungen

$$0=e_1\Sigma b^{(k)}a'+e_2\Sigma b^{(k)}a''+\ldots e_{n-m}\Sigma b^{(k)}a^{(n-m)} \tag{7}$$

und durch die quadratische Gleichung

$$\Sigma\{e_1a'+e_2a''+\ldots e_{n-m}a^{(n-m)}\}^2=r^4 \tag{8}$$

Im folgenden wird Anwendung gemacht für $n=4$, $m=2$. Die Coefficienten der x in (1) seien Richtungscosinus; es sei also

$$\Sigma a'^2=1;\quad \Sigma a''^2=1;\quad \Sigma a'a''=\cos\zeta$$

wo ζ den Winkel zwischen den zwei die Ebene

$$\Sigma a'x=0;\quad \Sigma a''x=0 \tag{9}$$

bestimmenden Räumen bezeichnet. Dann lautet Gl. (5):

$$\begin{vmatrix} \xi-x & a' & a'' \\ \Sigma a'\xi & 1 & \cos\zeta \\ \Sigma a''\xi & \cos\zeta & 1 \end{vmatrix}=0$$

oder entwickelt

$$x = \xi - \frac{a' - a''\cos\zeta}{\sin^2\zeta}\Sigma a'\xi - \frac{a'' - a'\cos\zeta}{\sin^2\zeta}\Sigma a''\xi \tag{10}$$

wodurch der Fusspunkt (x) des vom äussern Punkte (ξ) auf die Ebene (9) gefällten Lotes ausgedrückt ist. Jetzt wird

$$\begin{aligned} r^2 &= \frac{1}{\sin^4\zeta}\Sigma\{(a' - a''\cos\zeta)\Sigma a'\xi + (a'' - a'\cos\zeta)\Sigma a''\xi\}^2 \\ &= \frac{1}{\sin^2\zeta}\{\Sigma^2 a'\xi + \Sigma^2 a''\xi - 2\cos\zeta\Sigma a'\xi\Sigma a''\xi\} \end{aligned} \tag{11}$$

Für die zweite Aufgabe, wo das Lot innerhalb eines gegebenen Raumes liegen soll, setzen wir letztern in der Form an

$$\Sigma(a'\cos\varkappa + a''\sin\varkappa)\xi' = 0$$

dann werden die Gl. (6) (7) (8)

$$\begin{aligned} \xi &= \xi' + e_1 a' + e_2 a'' \\ 0 &= e_1(\cos\varkappa + \cos\zeta\sin\varkappa) + e_2(\cos\zeta\cos\varkappa + \sin\varkappa) \\ r^2 &= e_1^2 + e_2^2 + 2e_1 e_2\cos\zeta \end{aligned}$$

woraus nach Elimination von e_1, e_2:

$$\xi = \xi' - \frac{a'(\cos\zeta\cos\varkappa + \sin\varkappa) - a''(\cos\varkappa + \cos\zeta\sin\varkappa)}{\sin\zeta\sqrt{1 + 2\cos\zeta\sin\varkappa\cos\varkappa}}r \tag{12}$$

§. 2. Erster Neigungswinkel zweier Ebenen in der Vierdehnung.

Die Ebenen seien durch den rechtwinkligen Schnitt je zweier Räume bestimmt:

$$\Sigma ax = 0; \quad \Sigma bx = 0$$
$$\Sigma a^2 = 1; \quad \Sigma b^2 = 1; \quad \Sigma ab = 0$$

und

$$\Sigma cx = 0; \quad \Sigma dx = 0$$
$$\Sigma c^2 = 1; \quad \Sigma d^2 = 1; \quad \Sigma cd = 0$$

indem wir den Durchschnittspunkt der Ebenen zum Anfang der Coordinaten wählen.

Der allgemeinste Ausdruck der 2 Räume, in welchen die eine und die andre Ebene liegen, ist:

$$\Sigma(a\cos\lambda + b\sin\lambda)x = 0$$
$$\Sigma(c\cos\mu + d\sin\mu)x = 0$$

Bezeichnet ϑ den Winkel zwischen beiden Räumen (oder ihren Normalen), so ist

$$\cos\vartheta = \Sigma(a\cos\lambda + b\sin\lambda)(c\cos\mu + d\sin\mu) \tag{13}$$

Soll dieser ein Maximum oder Minimum sein, so muss man haben:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \Sigma(a\sin\lambda - b\cos\lambda)(c\cos\mu + d\sin\mu) \\ 0 &= \Sigma(a\cos\lambda + b\sin\lambda)(c\sin\mu - d\cos\mu) \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Zu diesen 3 Gleichungen fügen wir die vierte

$$N = \Sigma(a\sin\lambda - b\cos\lambda)(c\sin\mu - d\cos\mu) \tag{15}$$

Zur Abkürzung sei

$$A - \Sigma^2 ac + \Sigma^2 ad; \quad B = \Sigma^2 bc + \Sigma^2 bd \tag{16}$$

$$F = \Sigma ac\,\Sigma bc + \Sigma ad\,\Sigma bd \tag{17}$$

$$\varDelta = \Sigma ac\,\Sigma bd - \Sigma ad\,\Sigma bc \tag{18}$$

$$\varrho^2 = (A-B)^2 + 4F^2 \tag{19}$$

woraus:

$$AB - F^2 = \varDelta^2 \tag{20}$$

$$\varrho^2 = (A+B)^2 - 4\varDelta^2 \tag{21}$$

Eliminirt man μ zwischen den Gl. (14), so kommt:

$$F(1-\operatorname{tg}^2\lambda) = (A-B)\operatorname{tg}\lambda$$

oder

$$\operatorname{tg} 2\lambda = \frac{2F}{A-B} \tag{22}$$

woraus:

$$\cos 2\lambda = \frac{A-B}{\varrho}; \quad \sin 2\lambda = \frac{2F}{\varrho} \tag{23}$$

$$\cos^2\lambda = \frac{\varrho + A - B}{2\varrho}; \quad \sin^2\lambda = \frac{\varrho - A + B}{2\varrho}; \quad \operatorname{tg}\lambda = \frac{\varrho - A + B}{2F}$$

Das Vorzeichen der Quadratwurzel ϱ bleibt unbestimmt.

Durch Addition und Subtraction der Gleichungspare (13) (15) und (14) erhält man:

$$\cos\vartheta + N = \cos(\lambda-\mu)(\Sigma ac + \Sigma bd) - \sin(\lambda-\mu)(\Sigma ad - \Sigma bc)$$
$$0 = \sin(\lambda-\mu)(\Sigma ac + \Sigma bd) + \cos(\lambda-\mu)(\Sigma ad - \Sigma bc)$$

$$\cos\vartheta - N = \cos(\lambda+\mu)(\Sigma ac - \Sigma bd) - \sin(\lambda+\mu)(\Sigma ad + \Sigma bc)$$
$$0 = \sin(\lambda-\mu)(\Sigma ac - \Sigma bd) - \cos(\lambda+\mu)(\Sigma ad + \Sigma bc)$$

woraus:

$$(\cos\vartheta + N)^2 = (\Sigma ac + \Sigma bd)^2 + (\Sigma ad - \Sigma bc)^2$$
$$(\cos\vartheta - N)^2 = (\Sigma ac - \Sigma bd) + (\Sigma ad + \Sigma bc)^2$$

oder:

$$(\cos\vartheta + N]^2 = A + B + 2\varDelta$$
$$(\cos\vartheta - N)^2 = A + B - 2\varDelta$$

Ist nun ϑ der kleinste, mithin spitze (wo nicht rechte) Winkel, welcher den Bedingungen (14) genügt, so kann nur sein

$$\cos\vartheta = \tfrac{1}{2}\sqrt{A+B+2\Delta}+\tfrac{1}{2}\sqrt{A+B-2\Delta} \tag{24}$$

$$N = \tfrac{1}{2}\sqrt{A+B+2\Delta}-\tfrac{1}{2}\sqrt{A+B-2\Delta} \tag{25}$$

Die fernere Bedingung eines Maximums oder Minimums

$$\frac{\partial^2\cos\vartheta}{\partial\lambda^2}\,\frac{\partial^2\cos\vartheta}{\partial\mu^2}-\left(\frac{\partial^2\cos\vartheta}{\partial\lambda\,\partial\mu}\right)^2>0$$

lautet hier:

$$\cos^2\vartheta-N^2>0$$

das ist

$$\sqrt{(A+B)^2-4\Delta^2}>0$$

ist somit erfüllt, während die entsprechende für N

$$N^2-\cos^2\vartheta>0$$

nie erfüllt ist. Ferner ist

$$\frac{\partial^2\cos\vartheta}{\partial\lambda^2}=\frac{\partial^2\cos\vartheta}{\partial\mu^2}=-\cos\vartheta<0$$

folglich ist $\cos\vartheta$ Maximum, ϑ Minimum.

Die Bestimmung von μ ergiebt sich leicht, wenn man zwischen den Gl. (14) $\operatorname{tg}\lambda\operatorname{tg}\mu$ eliminirt. Dann findet man:

$$0=\Sigma^2 ad-\Sigma^2 bc+F\operatorname{tg}\lambda-(\Sigma ac\,\Sigma ad+\Sigma be\,\Sigma bd)\operatorname{tg}\mu$$

oder nach (23):

$$0=\Sigma^2 ad-\Sigma^2 be+\frac{\varrho-A+B}{2}-(\Sigma ac\Sigma ad+\Sigma bc\Sigma bd)\operatorname{tg}\mu$$

woraus:

$$\operatorname{tg}\mu=\tfrac{1}{2}\,\frac{\varrho-(\Sigma^2 ac+\Sigma^2 bc)+\Sigma^2 ad+\Sigma^2 bd}{\Sigma ac\,\Sigma ad+\Sigma bc\,\Sigma bd} \tag{26}$$

§. 3. Zweiter Neigungswinkel.

Zur Abkürzung sei

$$\alpha=a\cos\lambda+b\sin\lambda;\quad \gamma=c\cos\mu+d\sin\mu$$

Es soll nun der Raum $\Sigma\gamma x=0$ um die Ebene $\Sigma\alpha x=0$, $\Sigma\gamma x=0$ soweit rotiren, bis er in den Raum $\Sigma\alpha x=0$ fällt. Dann ist zu untersuchen, in welchen Punkt (x') des Raumes $\Sigma\alpha x=0$ ein beliebiger Punkt der Ebene fällt

$$\Sigma cx=0;\quad \Sigma dx=0 \tag{E}$$

Zu diesem Zwecke projiciren wir den Punkt (x) auf die Durchschnittsebene

$$\Sigma\alpha x'' = 0; \quad \Sigma\gamma x'' = 0 \tag{E''}$$

und nennen die Projection (x''). Nach der Formel (10), wo ζ, a', a'' die Werte ϑ, α, γ haben, findet man, mit Beachtung dass hier

$$\Sigma\gamma x = 0$$

ist:

$$x'' = x - \frac{\alpha - \gamma\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}\Sigma\alpha x \tag{27}$$

und nach der Formel (11) den Abstand des Punktes (x) von (E)

$$r = \frac{\Sigma\alpha x}{\sin\vartheta} \tag{28}$$

Im Punkte (x'') errichten wir ein Lot auf (E) innerhalb des Raumes

$$\Sigma\alpha x' = 0 \tag{29}$$

und tragen darauf die Strecke r ab; dann ist der Endpunkt der gesuchte Punkt (x'), der Erzeugende der Ebene, in welche die Ebene (E) nach Rotation ihres Raumes $\Sigma\gamma x = 0$ übergeht.

Nach der Formel (12), wo $\varkappa = 0$, ist

$$x' = x'' + \frac{\alpha\cos\vartheta - \gamma}{\sin\vartheta}r$$

und, wenn man die Werte (27) (28) einsetzt,

$$x' = x - \frac{\alpha + \gamma}{1 + \cos\vartheta}\Sigma\alpha x$$

woraus:

$$\Sigma cx' = -\frac{\Sigma\alpha x}{1 + \cos\vartheta}\Sigma(\alpha + \gamma)c$$

$$\Sigma d\alpha' = -\frac{\Sigma\alpha x}{1 + \cos\vartheta}\Sigma(\alpha + \gamma)d$$

Setzt man also

$$e = d\Sigma(\alpha + \gamma)c - c\Sigma(\alpha + \gamma)d$$

so wird

$$\Sigma ex' = 0 \tag{30}$$

Diese Gleichung verbunden mit Gl. (29) stellt demnach die transponirte Ebene E dar. Die 2 Räume (29) (30), welche sich in ihr schneiden, sind auf einander senkrecht; denn man hat:

$$\begin{aligned}\Sigma\alpha e &= \Sigma\alpha\{d\Sigma(\alpha + \gamma)c - c\Sigma(a + \gamma)d\} \\ &= \Sigma\alpha d\,\Sigma\gamma c - \Sigma\alpha c\,\Sigma\gamma d \\ &= \cos\mu\,\Sigma\alpha d - \sin\mu\,\Sigma\alpha c \\ &= \Sigma\alpha(d\cos\mu - c\sin\mu) = 0\end{aligned}$$

nach der 2. Gl. (14). Setzt man

$$\beta = \frac{e}{\sqrt{\Sigma^2 e}}$$

so ist auch $\Sigma\beta^2 = 1$, mithin in den Gleichungen

$$\Sigma\alpha x = 0; \quad \Sigma\beta x = 0$$

die Coefficienten α, β Richtungscosinus der 2 Räume.

Um β direct auszudrücken, so hat man:

$$\begin{aligned}\Sigma e^2 &= \Sigma^2(\alpha+\gamma)c + \Sigma^2(\alpha+\gamma)d \\ &= (\Sigma\alpha c + \cos\mu)^2 + (\Sigma\alpha d + \sin\mu)^2 \\ &= \Sigma^2\alpha c + \Sigma^2\alpha d + 2\Sigma\alpha\gamma + 1\end{aligned}$$

ausserdem nach Gl. (13) und (14):

$$\begin{aligned}\cos\vartheta &= \Sigma\alpha\gamma = \cos\mu\,\Sigma\alpha c + \sin\mu\,\Sigma\alpha d \\ 0 &= \qquad\quad \sin\mu\,\Sigma\alpha c - \cos\mu\,\Sigma\alpha d\end{aligned}$$

daher nach Addition der Quadrate

$$\cos^2\vartheta = \Sigma^2\alpha c + \Sigma^2\alpha d$$

Dies eingeführt giebt:

$$\Sigma e^2 = \cos^2\vartheta + 2\cos\vartheta + 1 = (1+\cos\vartheta)^2$$

$$\beta = \frac{d\Sigma(\alpha+\gamma)c - c\Sigma(\alpha+\gamma)d}{1+\cos\vartheta} \tag{31}$$

Der zweite Neigungswinkel der anfangs gegebenen Ebenen ist nun der Flächenwinkel η zwischen den Ebenen

$$\Sigma ax = 0; \quad \Sigma bx = 0\,(\Sigma a^2 = \Sigma b^2 = 1; \quad \Sigma ab = 0) \tag{E_0}$$

$$\Sigma ax = 0; \quad \Sigma\beta x = 0\,(\Sigma a^2 = \Sigma\beta^2 = 1; \quad \Sigma a\beta = 0) \tag{E'}$$

im gemeinsamen Raume $\Sigma ax = 0$.

Aus einem beliebigen Punkte dieses Raumes (y) fällen wir Lote auf beide Ebenen. Die Fusspunkte seien (z) und (z'). Dann ist nach der Formel (10), wo $\zeta = R$,

$$\begin{aligned}z &= y - a\Sigma ay - b\Sigma by = y - (b - a\,\mathrm{tg}\,\lambda)\Sigma by \\ z' &= y - a\Sigma ay - \beta\Sigma\beta y = y - \beta\Sigma\beta y\end{aligned}$$

Hiernach sind die Längen der Lote:

$$r = \sqrt{\Sigma(z-y)^2} = \frac{1}{\cos\lambda}\Sigma by$$

$$r' = \sqrt{\Sigma(z'-y)^2} = \Sigma\beta y$$

folglich ihre Richtungscosinus:

$$\frac{y-z}{r} = b\cos\lambda - a\sin\lambda, \quad \frac{y-z'}{r'} = \beta$$

und der Cosinus des Winkels zwischen beiden Loten, mithin auch zwischen beiden Ebenen:

$$\begin{aligned}\cos\eta &= \Sigma(b\cos\lambda - a\sin\lambda)\beta \\ &= \frac{1}{1+\cos\vartheta}\{\Sigma(b\cos\lambda - a\sin\lambda)\,d[\Sigma(a\cos\lambda + b\sin\lambda)c + \cos\mu] \\ &\qquad - \Sigma(b\cos\lambda - a\sin\lambda)\,c[\Sigma(a\cos\lambda + b\sin\lambda)d + \sin\mu]\} \\ &= \frac{\varDelta + N}{1+\cos\vartheta}\end{aligned}$$

Nun ist nach (24) (25)

$$N\cos\vartheta = \varDelta$$

folglich nach Einsetzung für $\varDelta$

$$\cos\eta = N$$

Nach Gl. (25) ist also

$$\cos\eta = \tfrac{1}{2}\sqrt{A+B+2\varDelta} - \tfrac{1}{2}\sqrt{A+B-2\varDelta} \tag{32}$$

Der zweite Neigungswinkel ist somit die zweite Lösung der Bedingungsgleichungen des Maximums oder Minimums des Winkels zwischen den Räumen der gegebenen Ebenen, ohne selbst Maximum oder Minimum zu sein, und steht zum ersten Neigungswinkel in den reciproken Relationen:

$$(\cos\vartheta \pm \cos\eta)^2 = A + B \pm 2\varDelta = (\Sigma ac \pm \Sigma bd)^2 + (\Sigma ad \mp \Sigma bc)^2 \tag{33}$$

$$\cos\vartheta\cos\eta = \varDelta = \Sigma ac\,\Sigma bd - \Sigma ad\,\Sigma bc \tag{34}$$

§. 4. Bemerkungen.

Die beiden Neigungswinkel können von 0 bis R variiren. Die extremen Werte des ersten entsprechen den 2 Fällen, $\vartheta = 0$, wo beide Ebenen sich in einem Raume befinden, und $\vartheta = R$, wo sie absolut normal zu einander stehen.

Für $\vartheta = 0$ ist die Bedingung:

$$\sqrt{A+B+2\varDelta} + \sqrt{A+B-2\varDelta} = 2$$

woraus:

$$A + B = \varDelta^2 + 1 \quad \text{oder} \quad (1-A)(1-B) = F^2 \tag{35}$$

Die Bedingung des Falles $\vartheta = R$ ist, da die 2 Quadratwurzeln positives Vorzeichen haben müssen, nur erfüllbar durch

dies wieder nur durch
$$A + B = 0; \quad \varDelta = 0$$

$$\Sigma ac = 0; \quad \Sigma ad = 0; \quad \Sigma bc = 0; \quad \Sigma bd = 0$$

Findet dies statt, so ist bedingungslos und constant

$$\cos\vartheta = \Sigma\alpha\gamma = 0$$

daher sind alle Räume der einen Ebene normal zu allen Räumen der andern, mithin auch alle Geraden der einen normal zu allen Geraden der andern. Diese Lage von 2 Ebenen ist es, die wir **absolut normal** nennen.

Von η ist aus den Gl. (24) (25) zu ersehen, dass stets

$$\cos^2\eta \leqq \cos^2\vartheta$$

ist. Wenn also auch η immer den positiven spitzen (wo nicht rechten) Winkel bezeichnet, so ist stets

$$\eta \geqq \vartheta$$

Demnach ist nur für $\vartheta = 0$ der 2. Neigungswinkel beliebig, sonst aber auf das Intervall von ϑ bis R beschränkt. Umgekehrt ist ϑ nur für $\eta = R$ beliebig, und variirt sonst nur zwischen 0 und η.

Wir haben angenommen, dass die Räume

$$\Sigma ax = 0; \quad \Sigma bx = 0 \tag{36}$$

durch welche eine gegebene Ebene bestimmt war, sich rechtwinklig treffen. Gesetzt es sei dies nicht der Fall, vielmehr

$$\Sigma a'x = 0; \quad \Sigma b'x = 0$$

zu ihrer Bestimmung gegeben, wo a', b' keiner Bedingung unterworfen sind. Dann kann man setzen:

$$a' = u(a\cos\varkappa + b\sin\varkappa): \quad b' = v(a\cos\varkappa_1 + b\sin\varkappa_1) \tag{37}$$

und erhält zunächst:

$$u^2 = \Sigma a'^2; \quad v^2 = \Sigma b'^2$$
$$\Sigma a'b' = uv\cos(\varkappa_1 - \varkappa)$$

wodurch für willkürliches $\varkappa$ die Grössen u, v, $\varkappa_1$ bekannt sind. Jetzt geben die Gl. (37), nach a, b aufgelöst:

$$a = \frac{a'v\sin\varkappa_1 - b'u\sin\varkappa}{\sin(\varkappa_1 - \varkappa)}; \qquad b = \frac{a'u\sin\varkappa - b'v\sin\varkappa_1}{\sin(\varkappa_1 - \varkappa)}$$

anwendbar auf alle 4 Coordinatenaxen.

Man kann in der, durch diese Reduction erreichten Vereinfachung noch weiter gehen, indem man die 2 rechtwinkligen Räume (36) zu Coordinatenräumen

$$x = 0; \quad x_1 = 0$$

wählt. Da alsdann

$$a = 1; \quad a_1 = a_2 = a_3 = 0$$
$$b_1 = 1; \quad b = b_2 = b_3 = 0$$

wird, so hat man:

$$\Sigma ac = c; \quad \Sigma ad = d; \quad \Sigma bc = c_1; \quad \Sigma bd = d_1$$

Die Form der gefundenen Ausdrücke, so weit sie allein in diesen 4 Summen dargestellt sind, wird dadurch nicht geändert. Es zeigt sich, dass alsdann jene Grössen unabhängig von c_2, d_2, c_3, d_3 werden.

Zum Schluss ist noch zu erwähnen, dass sich der gleiche Begriff des Neigungswinkels auch bei anderem Untersuchungsverfahren ergiebt.

Eine Ebene sei in 2 Parametern u, v dargestellt durch die 4 analogen Gleichungen:

$$x = au + bv; \quad \text{etc.}$$

eine zweite ebenso durch

$$x = cu + dv; \quad \text{etc.}$$

Auf einer jeden wird eine Gerade vom Anfangspunkt aus angegeben, wenn man u und v in lineare Relation stellt, indem man setzt:

$$u = w\cos\lambda; \quad v = w\sin\lambda$$

Die Gleichungen der Geraden sind dann:

$$x = (a\cos\lambda + b\sin\lambda)w$$

und von der Geraden auf der zweiten Ebene:

$$x = (c\cos\mu + d\sin\mu)w$$

Bezeichnet nun ϑ den Winkel zwischen beiden Geraden, so ist

$$\cos\vartheta = \Sigma(a\cos\lambda + b\sin\lambda)(c\cos\mu + d\sin\mu)$$

Bestimmt man ϑ bei variirenden λ, μ als Minimum, so erhält man denselben Ausdruck (24) wieder. Demnach ist der erste Neigungswinkel zwischen 2 Ebenen auch der kleinste Winkel zwischen 2 Geraden auf den Ebenen. Er lässt sich also auf 2 Arten definiren, ohne dass daraus ein begrifflicher Unterschied entspringt.

XXIV.

Construction der gemeinsamen Elemente zweier Kegelschnitte.

Von

J. Streissler

in Graz.

---

1. Wenn man zwei Kegelschnitte K^2, K_1^2 in einer und derselben Ebene beliebig annimmt, so ist bekannt, dass sie höchstens 4 gemeinsame Punkte und 4 gemeinsame Tangenten haben können; denn würden sie 5 dieser Bestimmungsstücke (Punkte oder Tangenten) enthalten, so müssten sie, da ein Kegelschnitt jederzeit aus diesen 5 Bestimmungsstücken eindeutig bestimmt ist, identisch sein, oder beide Kegelschnitte müssten zusammenfallen.

Die Bestimmung der gemeinsamen Punkte und Tangenten ist sowol für viele geometrische Untersuchungen (wie das Normalenproblem der Kegelschnitte u. s. f.) als auch für den Constructeur von besonderer Wichtigkeit. Da dieses Problem im Allgemeinen vom 4. Grade ist, so lässt es sich mit alleiniger Hilfe des Zirkels und Lineals — mit Ausnahme jenes speciellen Falles, in welchem die Gleichung des 4. Grades, welche unserem Probleme entspricht, in zwei quadratische Gleichungen zerfällt — nicht construiren, und es bleibt uns daher nichts anderes übrig, als diese Hindernisse zu überbrücken und eine Methode anzugeben, welche sowol die Theorie, als auch die Praxis befriedigt, und uns in den Stand setzt, in einfacher Weise die gemeinsamen Elemente zweier Kegelschnitte anzugeben, welche durch ihre Bestimmungsstücke gegeben sind.

Vorerst müssen wir uns aber Einiges bezüglich der gegenseitigen Lage der beiden in derselben Ebene liegenden Kegelschnitte in Erinnerung bringen, und zwar:

a) Jeder Kegelschnitt teilt die Ebene, in welcher er liegt, in 2 Teile, wovon sich der eine innerhalb, der andere ausserhalb der Curve befindet.

b) Ein Kegelschnitt liegt ganz ausserhalb des anderen, wenn der innere Teil des einen ganz in den äusseren Teil des anderen zu liegen kommt.

c) Der innere Teil des einen Kegelschnittes greift teilweise über den inneren Teil des anderen Kegelschnittes.

d) Ein Kegelschnitt liegt ganz innerhalb des anderen, wenn der innere Teil des einen ganz in den inneren Teil des anderen und der äussere Teil des einen ganz in den äusseren Teil des anderen zu liegen kommt.

Die hier aufgezählten gegenseitigen Lagen zweier Kegelschnitte lassen den Constructeur sofort erkennen, ob die betreffenden Kegelschnitte keine, zwei oder vier (reelle oder imaginäre) Tangenten und Punkte gemeinschaftlich haben.

2. Dieses vorausgesetzt, wollen wir noch diejenigen Hilfssätze anführen, deren wir uns bei der Construction der gemeinsamen Tangenten zweier in derselben Ebene liegenden Kegelschnitte in erster Reihe bedienen werden. Diese sind:

a) Fällt man von den Brennpunkten F und F' einer Ellipse (oder Hyperbel) Senkrechte auf alle Tangenten (T) derselben, so liegen deren Fusspunkte (s) auf der Peripherie eines Kreises, welcher aus dem Curvenmittelpunkte O mit der grossen Halbachse (oder der halben Hauptachse AA') als Halbmesser beschrieben werden kann.

Da dieser Kreis durch die Scheitel A, A' der grossen Achse (oder Hauptachse) des Kegelschnittes geht, so wollen wir ihn den Scheitelkreis nennen. Bei der Ellipse liegen die Brennpunkte innerhalb, bei der Hyperbel dagegen ausserhalb des Scheitelkreises.

b) Fällt man von dem Brennpunkte F einer Parabel Senkrechte auf alle Tangenten (T), so liegen deren Fusspunkte (s) auf einer Geraden (As), welche die Parabel im Scheitel (A) berührt. Diese Gerade heisst die Scheiteltangente und man kann sie als einen Scheitelkreis von unendlich grossem Halbmesser auffassen.

Hierdurch erzielt man eine gewisse Gleichartigkeit in der Construction, wie dies schon das nachfolgende Problem deutlich beweist: Man soll von einem gegebenen Punkte t aus die Tangenten an einen Kegelschnitt construiren, wenn die Brennpunkte und der Scheitelkreis (oder die Scheiteltangente)

desselben gegeben sind. Man verbindet in Fig. 1 den ausserhalb des gegebenen Kegelschnittes gelegenen Punkt t mit einem seiner Brennpunkte F, beschreibt über tF als Durchmesser einen Hilfskreis, welcher den Scheitelkreis, der über der grossen Achse (oder Hauptachse) AA' beschrieben wurde, in zwei Punkten s und s' schneidet, und es ist sowol ts als ts' eine durch t gehende Tangente an die gegebene Curve.

Verlängert man Fs um sich selbst nach g und bringt gF' mit Tt zum Schnitte, so gelangt man zum Berührungspunkte M der Tangente Tt, denn es ist $FM = Mg$ und $gF' = AA'$. Bei der Parabel ist gF' zu ihrer Achse parallel.

Wir gehen nun zu unserer eigentlichen Aufgabe über, und behandeln vorerst jenen Fall, der dem praktischen Constructeur am häufigsten vorkommt:

I. Ein Kreis k und eine Ellipse (oder Hyperbel) ist durch ihre Achsen AA' und BB', oder was dasselbe ist, durch ihre Achse AA' und durch die reellen Brennpunkte F, F' gegeben, man construire ihre gemeinsamen Tangenten. (Fig. 2). Haben beide Curven gemeinsame reelle Tangenten, so kann man sich in der Praxis mit der folgenden mechanischen Lösung begnügen.

Nachdem man über AA' den Scheitelkreis der Ellipse (oder Hyperbel) beschrieben hat, lege man den Schenkel sm eines rechten Winkels (etwa mit Hilfe eines rechtwinkligen Dreiecks) derart berührend an den gegebenen Kreis k, dass sein zweiter Schenkel sF durch einen Brennpunkt (etwa F) geht, und der Scheitel s dieses Winkels auf den Umfang des Scheitelkreises zu liegen kommt. Der Schenkel sm des rechten Winkels Fsm fällt, wie leicht einzusehen ist, mit einer gemeinsamen Tangente T beider Curven zusammen.

Die Berührungspunkte M und m der Tangente T ergeben sich ebenfalls in einfacher Weise: Macht man om parallel zu Fs (oder senkrecht zu $sm = T$), so erhält man im Schnitte der om und T den Berührungspunkt m; verlängert man Fs um sich selbst nach g und zieht gF', so ist der Schnittpunkt von gF' mit T der Berührungspunkt M der Tangente T mit der Ellipse (oder Hyperbel).

II. Ein Kreis k und eine Parabel, deren Scheitel A und deren Brennpunkt F ist, sind gegeben; man construire ihre gemeinsamen Tangenten. (Fig. 3).

Errichtet man in A auf der Verbindungsgeraden AF (Achse der Parabel AX) eine Senkrechte, so erhält man die Scheiteltangente As der Parabel.

Wird nun, wie vorher, der eine Schenkel *sm* eines rechten Winkels *Fsm* berührend an den gegebenen Kreis *k* derart gelegt, dass sein zweiter Schenkel *sF* durch den Brennpunkt *F* und sein Scheitel *s* auf die Scheiteltangente *As* der Parabel zu liegen kommt, so gibt (der verlängerte Schenkel) *sm* die gemeinsame Tangente *T* beider Curven an.

Wird nun *Fs* um sich selbst nach *g* verlängert, und *gM* parallel zu *AF* mit *ms* in *M* zum Schnitte gebracht, so ist dieser Punkt *M* der Berührungspunkt der Tangente mit der Parabel. Der Berührungspunkt *m* liegt auf *ms* und auf dem zu *sm* senkrechten (oder zu *Fs* parallelen) Kreishalbmesser *om*.

3. Obgleich die hier angeführte empirische Art des Ziehens der gemeinsamen Tangenten an einen Kreis *k* und einen gegebenen Kegelschnitt K^2 die grösstmögliche Genauigkeit gewährt, so wollen wir uns doch noch die Aufgabe stellen, den Scheitel *s* des dabei benutzten rechten Winkels *Fsm* auf dem Umfange des Scheitelkreises (oder auf der Scheiteltangente) in directer Weise auszumitteln.

Hiezu diene die nachfolgende Betrachtung: Wenn man von einem festen Punkte (in Fig. 4 dem Brennpunkte *F* eines Kegelschnittes) auf alle Tangenten eines Kreises *k* Senkrechte fällt, so liegen deren Fusspunkte s, s_1, s_2, ... auf einer Curve, der Fusspunktencurve von *k* in Bezug auf *F* (als Pol), und diese ist bekanntlich eine Curve 4ter Ordnung. Würde man diese Fusspunktencurve wirklich construiren, so fände man, dass sie mit dem Scheitelkreise des Kegelschnittes K^2 höchstens 4 reelle Schnittpunkte besässe, deren jeder, wie leicht einzusehen, der Ort des Scheitels *s* des bei der früheren Construction benutzten rechten Winkels *Fsm* sein müsste.

Denkt man sich nun jeden dieser 4 Schnittpunkte mit *F* verbunden, und errichtet man in diesen auf den ihm entsprechenden Verbindungsgeraden Senkrechte, so geben letztere zwei Paare von äusseren und 2 Paare von inneren reellen gemeinsamen Tangenten der vorgelegten Curven. Gibt die Fusspunktencurve mit dem Scheitelkreise keine oder 2 reelle Schnittpunkte, dann ergeben sich beziehungsweise keine oder 2 reelle gemeinsame Tangenten an beide Curven.

In den vorliegenden Fällen ist die Fusspunktencurve des Kreises *k* für den Punkt *F* als Pol, die sogenannte Limaçon des über *Fo* als Durchmesser beschriebenen Hilfskreises (für *F* als Pol) mit einem Parameter, welcher die Länge des Halbmessers des gegebenen Kreises hat. Diese kann man punktweise, wie folgt, bestimmen: Beschreibt man nämlich über der Strecke *Fo*, welche den Brennpunkt

F mit dem Kreismittelpunkte o verbindet, einen Hilfskreis, zieht durch F einen beliebigen Strahl Fs und zu diesem den parallelen Durchmesser mm', so treffen die durch m und m' zur Verbindungsgeraden oP (des Schnittpunktes P des Hilfskreises mit dem Kreismittelpunkte o) gezogenen parallelen Kreistangenten ms und $m's'$ den Strahl Fs rechtwinklig in den Punkten s und s' der Limaçon, welche überdies in den Schnittpunkten von Fo mit dem Kreise k, letzteren berührt, und F zum Doppelpunkte hat.

Die Construction der Tangenten in den einzelnen Punkten s, ... der Limaçon unterliegt bekanntlich keiner Schwierigkeit. Man beschreibe über Fm als Durchmesser einen Hilfskreis, so geht dieser, weil Dreieck Fsm rechtwinklig ist, auch durch s, und es ist dann die Tangente dieses Hilfskreises in s die Tangente t, und der Halbmesser die Normale N der Limaçon im Punkte s.

Die Tangenten D, D_1 im reellen Doppelpunkte F der Fusspunktencurve sind, wie aus der Construction hervorgeht, die Senkrechten in F auf die beiden aus F an den Kreis k gezogenen Tangenten.

Auch die Doppeltangente $\delta\delta'$ der Limaçon ergibt sich in einfacher Weise: Man verlängere Fo um sich selbst nach S, und ziehe von S aus die Tangenten T und T_1 an den Kreis k. Die Verbindungsgerade der Fusspunkte σ und σ' der aus F auf diese Tangenten gefällten Senkrechten $F\sigma$ und $F\sigma'$ ist die gesuchte Doppeltangente $\delta\delta'$. Die Richtigkeit der Construction folgt schon aus der Symmetrielage der ganzen Figur 4 in Bezug auf die Symmetrale So.

4. Obgleich die Construction der Fusspunktencurve aus Punkten und Tangenten, wie wir eben gesehen haben, äusserst einfach ist, so kann man doch noch mit Hilfe der Krümmungskreise für die einzelnen Punkte der Fusspunktencurve schneller zur Bestimmung der fraglichen Punkte s, s_1, s_2, s_3 auf dem Scheitelkreise gelangen*).

Betrachtet man nämlich drei benachbarte Tangenten ms, $m's'$, $m''s''$ (Fig. 5) des gegebenen Kreises k und errichtet auf denselben aus F Senkrechte, so kann man durch ihre Fusspunkte s, s', s'' einen Hilfskreis legen, welcher als Scheitelkreis eines mit ihm concentrischen Kegelschnittes K^2 betrachtet werden kann, welcher die Kreistangenten ms, $m's'$ und $m''s''$ zu Tangenten, F zum Brennpunkte, den Durchmesser des Hilfskreises zur Achse, und den Halbirungs-

*) Siehe Construction des Krümmungskreises u. s. f. von Dr. E. Weyr, Sitzb. der k. Akad. d. Wissensch. 1869.

punkt des letzteren zum Mittelpunkte hat. Lässt man nun die 3 Tangenten mit ms zusammenfallen, so gelangt s' und s'' nach s; der über $ss's''$ beschriebene Hilfskreis wird zum Krümmungskreise der Fusspunktencurve in s, und der Kegelschnitt K^2 wird den Kreis k in m osculiren. Wäre also ms eine Tangente des Kreises k, und s der entsprechende Punkt der Fusspunktencurve, dann ist der Krümmungsmittelpunkt M_0 der Mittelpunkt eines Kegelschnittes K^2, welcher F zum Brennpunkte hat und den Kreis k im Berührungspunkte m osculirt. Da k sein eigener und zugleich auch dér Krümmungskreis von K^2 in m ist, so kann man die Hauptachse des letzteren leicht ermitteln. Man errichte nämlich in dem bekannten Krümmungsmittelpunkte o (des Kreises k) eine Senkrechte auf Fm und aus deren Fusspunkte n eine Senkrechte nv auf mo. Die Verbindungsgerade vF ist die fragliche Achse von K^2.

Da der Mittelpunkt M_0 des Krümmungskreises für s der Fusspunktcurve auch in der Normale N dieses Punktes liegt (welche bekanntlich den Halbirungspunkt von Fm mit s verbindet), so muss er im Schnitte M_0 von N mit Fv liegen. Die Strecke M_0s ist dann der Halbmesser des Krümmungskreises K im Punkte s der Fusspunktencurve.

Bestimmt man in gleicher Weise die Krümmungskreise für s_1, s_2 und s_3, so ersetzen diese die Fusspunktencurve in ihren Elementen. (Da n bei der wirklich ausgeführten Construction auf einem Kreise, dessen Durchmesser Fo ist, liegt, so kann letzterer als Constructionselement vorteilhaft in Anwendung gebracht werden).

Wendet man nun das Besprochene auf die Bestimmung des Schnittpunktes s der gemeinsamen Tangente ms mit dem Scheitelkreise (oder Scheiteltangente) des durch AA' und FF' gegebenen Kegelschnittes an (Fig. 5), so kann man sich in der Praxis zur Ermittelung eines Punktes s mit der Construction eines einzigen Krümmungskreises K für einen Punkt s' der Fusspunktcurve begnügen, welcher sich in unmittelbarer Nähe des Scheitelkreises (über AA') befindet. Dieser Kreis K schneidet den Scheitelkreis (oder die Scheiteltangente) in s und die Senkrechte sm auf Fs ist dann eine gemeinsame Tangente T des gegebenen Kegelschnittes und des Kreises k. Die Bestimmung der Berührungspunkte auf T ist bereits bekannt.

Specielle Fälle. Haben die gegebenen Curven eine gemeinsame Symmetrale, so wird die Construction unseres Problems vereinfacht.

a) Fällt der Mittelpunkt o des gegebenen Kreises k mit einem Brennpunkte F des gegebenen Kegelschnittes zusammen, dann ist

schon der Schnittpunkt s seines Scheitelkreises mit k der Scheitel des rechten Winkels Fss' (Fig. 7) und ss' eine gemeinsame Tangente beider Curven.

b) Sind die gemeinsamen Tangenten einer Ellipse (welche durch die grosse Achse $AA' = a$ und die kleine Achse $= b$ gegeben ist) und eines mit ihr concentrischen Kreises k vom Halbmesser r zu construiren (Fig. 6), und nimmt man an, dass die aus F und F' auf einer der gemeinsamen Tangenten errichteten Senkrechten Fs und $F's'$ beziehungsweise die Längen v und v' haben, so folgt:

$$v + v' = 2r, \text{ und}$$
$$v . v' = a^2 - e^2 = b^2,$$

wo $a = AO$, $e = FO$ und b die kleine Halbachse bedeuten.

Construirt man diese Gleichungen, indem man $AR = 2r = v + v'$ macht, über AR einen Halbkreis beschreibt und die Strecken AS und SR aufsucht, welche $SU = b$ zur mittleren geometrischen Proportionale haben, so gelangt man zu v und v', welche als Halbmesser von Hilfskreisen, aus F und F' beschrieben, 8 Punkte s, s', ... auf dem Scheitelkreise bestimmen, die entsprechend verbunden, vier gemeinsame Tangenten beider Curven geben. Ihre Berührungspunkte M und m können in bekannter Weise construirt werden.

III. Bestimmung der gemeinsamen Tangenten zweier Kegelschnitte, welche durch ihre Achsen AA', aa' und die auf ihnen liegenden Brennpunkte F, F' und f, f' gegeben sind. (Fig. 8).

Man construire zuerst die Scheitelkreise der gegebenen Kegelschnitte (bei der Parabel ihre Scheiteltangente) und lege dann einen rechten Winkel $Fs\sigma$ (eines rechtwinkligen Dreiecks) derart in den Scheitelkreis über AA', dass sein Schenkel Fs durch einen Brennpunkt (hier F) geht, der Scheitel s auf den Scheitelkreis zu liegen kommt, und der zweite Schenkel $s\sigma$ den Scheitelkreis über aa' in zwei Punkten σ und σ_1 derart trifft, dass sie mit den Fusspunkten der Senkrechten $f\sigma$ und $f'\sigma_1$ aus f und f' auf $s\sigma$ errichtet, zusammenfallen; dann ist $s\sigma$ eine gemeinsame Tangente beider Kegelschnitte.

Da Fs parallel zu $f\sigma$ ist, so erscheint der mechanische Constructionsvorgang äusserst einfach.

Wäre der Kegelschnitt, dessen Brennpunkte F und F' sind, eine Parabel, so müsste der Scheitel s des rechten Winkels $Fs\sigma$ auf der durch A zur Parabelachse AF senkrecht geführten Scheiteltangente zu liegen kommen, sonst bliebe der Vorgang dem vorigen analog.

Die Construction der Berührungspunkte M und m der gemeinsamen Tangente kann als bekannt vorausgesetzt werden.

In speciellen Fällen ist die Ermittelung der Schnittpunkte s, ... überraschend einfach. In Fig. 9 ist ein solcher Fall ersichtlich; hier fallen die Achsen beider gegebenen Kegelschnitte in eine Gerade, und der Brennpunkt F ist beiden Kegelschnitten gemeinschaftlich. Die Schnittpunkte s und s_1 beider Scheitelkreise sind die fraglichen Punkte, durch welche die gemeinsamen Tangenten T und T_1 (senkrecht auf sF und s_1F) hindurchgehen.

Wir wollen nun, den allgemeinen Fall in Fig. 8 im Auge behaltend, zur directen Construction der Punkte s und σ schreiten, und uns dabei wieder des Krümmungskreises für einen in der Nähe des Scheitelkreises (über AA') befindlichen Punktes s' der Fusspunktencurve des Kegelschnittes (aa', ff') für F als Pol, bedienen.

Der Mittelpunkt M_0 des fraglichen Krümmungskreises für s' der Fusspunktcurve ist bekanntlich der Mittelpunkt eines Kegelschnittes, welcher den Pol F zum Brennpunkte und den Kegelschnitt (aa', ff') im Berührungspunkte m' der Tangente $s'm'$ (welche s' entspricht) osculirt.

Die Achsenrichtung $F\nu$ des osculirenden Kegelschnittes kann man sofort bestimmen, sobald der Krümmungsmittelpunkt μ des Punktes m' des Kegelschnittes (aa', ff') bekannt ist.

Man errichte nämlich von μ aus eine Senkrechte μn auf die Verbindungsgerade $m'F$ und von ihrem Fusspunkte n eine Senkrechte $n\nu$ auf die Normale des Punktes m', in welcher bekanntlich auch μ liegt; dann ist die Gerade νF die verlangte Achsenrichtung. Diese schneidet nun die Normale $s'M_0$ des Punktes s' der Fusspunktencurve (welche den Halbirungspunkt von Fm' mit s' verbindet) im Mittelpunkte M_0 des gesuchten Krümmungskreises, und ein Bogen K des letzteren trifft den Scheitelkreis (über AA') in einem dem Punkte s' benachbarten Punkte s, durch welchen eine gemeinsame Tangente $sm\sigma$ beider Kegelschnitte senkrecht auf Fs hindurchgeht. Die Bestimmung der Berührungspunkte M und m auf $s\sigma$ kann als bekannt vorausgesetzt werden.

Anmerkung. Da die genaue Ermittlung des Krümmungsmittelpunktes μ des Kegelschnittes für die einzelnen Punkte desselben in unserem Probleme eine wichtige Rolle spielt, so wollen wir uns die bekannte und bereits angewandte Construction ins Gedächtniss zurückrufen. Ist nämlich m ein Punkt eines Kegelschnittes, T und n seine Tangente und Normale, und schneidet N die Hauptachse AA' des Kegelschnittes in n, so errichtet man in diesem Punkte

eine Senkrechte $n\nu$ auf die Normale n des Punktes m und zieht aus ihrem Fusspunkte ν eine Senkrechte auf die Verbindungsgerade von m mit F; diese schneidet die Normale n in dem Krümmungsmittelpunkte μ des Punktes m des gegebenen Kegelschnittes. Da diese Bestimmung des Krümmungsmittelpunktes für die Scheitel des Kegelschnittes ihre Giltigkeit verliert, so bestimmt man die Länge des Krümmungshalbmessers mit Hilfe der nachfolgenden bekannten Formeln, und zwar ist

für die Scheitel der grossen Achse der Ellipse (od. Hyperbel) der Krümmungshalbmesser $r = \frac{b^2}{a}$

" " " " kleinen Achse " $r_1 = \frac{a^2}{b}$

wo a und b die grosse und kleine (od. imaginäre) Halbachse bedeuten.

Für den Scheitel der Parabel ist der Krümmungshalbmesser $r = \frac{p}{2}$, wo p den Parameter der Parabel, d. i. die im Brennpunkte auf die Parabelachse errichtete Sehne, bedeutet.

IV. **Bestimmung der gemeinsamen Tangenten zweier Kegelschnitte, welche durch 5 Punkte, oder durch 5 Tangenten gegeben sind.** Um diese Aufgabe mit der vorigen in Einklang zu bringen, wird es sich zunächst darum handeln, auf die einfachste Weise die Achsen und die Brennpunkte des durch 5 Elemente eindeutig bestimmten Kegelschnittes zu construiren.

1. Sind 5 Punkte (*I*, *II*, *III*, *IV*, *V*) eines Kegelschnittes gegeben, so construirt man zunächst mit Hilfe des Satzes von Pascal in einem derselben (etwa in *I*) eine Tangente T_1. Werden nämlich 6 Punkte eines Kegelschnittes in irgend einer Reihenfolge mit *I*, *II*, ... *VI* bezeichnet, und man verbindet nun successive *I* mit *II*, *II* mit *III*, ... und *VI* mit *I*, so entsteht ein Sehnensechseck im Kegelschnitte, in welchem sich bekanntlich die 3 Paare seiner Gegenseiten (*I II* und *IV V*, *II III* und *V VI*, *III IV* und *VII*) in drei Punkten (p_3, p_4, p_5) schneiden, welche auf einer Geraden (der Pascal'schen Linie π) liegen.

Lässt man 2 Ecken dieses Sehnensechsecks (etwa *I* und *VI*) unendlich nahe an einander rücken, oder zusammenfallen, so wird *I VI* zur Tangente des Kegelschnittes im Punkte *I*.

Um also die Tangente T_1 in einem beliebigen Punkte (z. B. in *I*) des gegebenen Kegelschnittes (*I*, *II*, ... *V*) (Fig. 10.) zu erhalten,

müsste man den nachfolgenden Constructionsgang beobachten: Durch die Schnittpunkte p_3 (von *I II* mit *IV V*) und p_4 (von *II III* mit *V VI*, wobei *VI* mit *I* zusammenfallend angenommen wird) geht die Pascal'sche Linie π; diese begegnet der *III IV* in p_5 und durch p_5 und *I* geht die fragliche Tangente T_1, welche *I* zum Berührungspunkte hat. Beschreibt man nun einen Hifskreis O'. welcher T_1 in *I* berührt, so befindet sich bekanntlich Kreis und Kegelschnitt (*I*, *II*, ... *V*) in perspectivischer Collineation für *I* als Centrum. Zieht man durch *I* die Collineationsstrahlen *I II*, *I III*, *I IV* und bestimmt die, den Punkten *II*, *III*, *IV* und *V* des Kegelschnittes entsprechenden Punkte 2, 3, 4 und 5 des Kreises O', so gelangt man durch die geradlinige Verbindung der Schnittpunkte *c* und 4 je zweier entsprechenden Strahlen (nämlich 35 und *III V*; 34 und *III IV*) zur Collineationsachse $c4 = C$, oder zur gemeinsamen Secante des Hifskreises und des gegebenen Kegelschnittes. — Das Centrum *I* und die Collineationsachse *C* setzen uns bekanntlich in den Stand, zu jedem Punkte *d* des Kreises O' den entsprechenden (collinear verwandten) Punkt *D* des Kegelschnittes zu construiren. Dies vorausgesetzt, schreiten wir zur Construction der Achsen des Kegelschnittes: Zieht man durch den Kreismittelpunkt O' den senkrechten Durchmesser dd_1 zu *C*, und sucht zu *d* und d_1 die entsprechenden Punkte *D* und D_1 des Kegelschnittes, welche auf den Collineationsstrahlen *Id* und Id_1 liegen müssen, so findet man weiter, dass sowol die Kreistangenten *t* und t_2 in den Kreispunkten *d* und d_1, als auch die verwandten Kegelschnittstangenten *T* und T_2 in *D* und D_1 zur Collineationsachse *C* parallel sein müssen.

Da nun

$$\text{Wkl. } xID = Idt,$$

so muss auch

$$\text{Wkl. } xID = IDT$$

sein, und da das $\triangle IDx$, welches die Tangenten *T* und T_1 mit *ID* bilden, gleichschenklig ist, so muss auch $xI = xD$ sein. In gleicher Weise findet man $Iy = yD_1$.

Nun wissen wir aber: wenn die Tangenten, welche von einem ausserhalb eines Kegelschnittes gelegenen Punkte (*x* oder *y*) an diesen gezogen werden, gleich sind, oder mit ihrer Berührungssehne (DD_1) gleiche Winkel bilden, so geben die Halbirungsgeraden der von ihnen gebildeten Winkel die Achsenrichtung des Kegelschnittes an.

Halbirt man also die Winkel bei *x* und *y*, so sind die Winkelhalbirenden *Ax* und *B'y* die Achsenrichtungen des Kegelschnittes (*I*, *II*, ... *V*).

Schneidet die Tangente T_1 und die Normale n_1 in I die Achsenrichtung yB' beziehungsweise in y und z, und beschreibt man über yz einen Kreis, welcher Ax in F und F' schneidet, so sind letztere Punkte die Brennpunkte des Kegelschnittes *). Errichtet man von einem der gefundenen Brennpunkte (z. B. F) eine Senkrechte Fs auf der Tangente T_1 und verbindet den Fusspunkt s mit dem Kegelschnittsmittelpunkte O durch die Strecke sO, so ist diese der Halbmesser des Scheitelkreises, und seine Schnittpunkte a, a' mit der, die reellen Brennpunkte enthaltenen Achsenrichtung Ax, sind zwei Scheitel des Kegelschnittes (I, II, ... V).

2. Sind 5 Tangenten (T_1, T_2, ... T_5) eines Kegelschnittes gegeben, so construire man zunächst mit Hilfe des Satzes von Brianchon die Berührungspunkte I, II und III auf den bezüglichen Tangenten T_1, T_2 und T_3 des gegebenen Kegelschnittes (Fig. 11.).

Zu diesem Behufe betrachtet man 6 Tangenten T_1, T_2, ... T_6 eines Kegelschnittes, welche in irgend einer Reihenfolge genommen, ein Sechsseit formiren, in welchem sich bekanntlich die Verbindungsgeraden je zweier Gegenecken ($T_1 T_2$) mit ($T_4 T_5$), ($T_2 T_3$) mit ($T_5 T_6$) und ($T_3 T_4$) mit ($T_6 T_1$) in einem und demselben Punkte (dem Brianchon'schen Punkte) schneiden. Lässt man nun 2 Tangenten (etwa T_1 und T_6) unendlich nahe rücken, oder zusammenfallen, so wird ihr früherer Schnittpunkt I zum Berührungspunkte der Tangente T_1 des Kegelschnittes. Um also den Berührungspunkt I graphisch zu ermitteln, verbindet man die Schnittpunkte ($T_1 T_2$ mit $T_4 T_5$) und ($T_2 T_3$ mit $T_5 T_6$) geradlinig; ihre Verbindungsgeraden bestimmen den Brianchon'schen Punkt β, welcher mit dem Schnittpunkte ($T_3 T_4$) verbunden die Tangente T_1 in dem gesuchten Berührungspunkte I trifft. In analoger Weise werden die Berührungspunkte II und III auf T_2 und T_3 ermittelt.

Um zum Mittelpunkte O des Kegelschnittes zu gelangen, bestimmt man eine Mittelpunktsgerade μ desselben, nach dem Satze, dass die Mittelpunkte sämmtlicher Kegelschnitte einer durch 4 Tangenten bestimmten Kegelschnittschaar auf einer Geraden (der Mittelpunktsgeraden μ) liegen, welche die Halbirungspunkte der 3 Diagonalen des von den vier gemeinschaftlichen Tangenten $T_1 T_2 T_3 T_4$ gebildeten vollständigen Vierseits enthält. Die zweite Mittelpunktsgerade μ', welche durch den Schnittpunkt zweier Tangenten ($T_1 T_2$) und den Halbirungspunkt ihrer Berührungssehne ($I\, II$) hindurch geht, schneidet μ im Kegelschnittsmittelpunkte O.

---

*) Siehe Dr. Standigl's Neuere Geometrie, pag. 158.

Die Achsenrichtung des in Rede stehenden Kegelschnittes findet man in nachfolgender Weise: Man lege durch die drei Berührungspunkte I, II, III der bezüglichen Kegelschnittstangenten einen Hilfskreis k; dieser trifft den Kegelschnitt noch in einem vierten reellen Punkte 4, welchen man linear leicht ermitteln kann: Man ziehe nämlich in I und III die Tangenten t_1 und t_2 an den Hilfskreis k, und verbinde ihren Schnittpunkt c' mit dem Schnittpunkte c der Tangenten T_1 und T_2 in I und II des Kegelschnittes, durch die Gerade G.

Zieht man ferner die Verbindungsgeraden $I\,II$ und III, so wird von ihnen die Gerade G in zwei Punkten q und p getroffen, welche mit I und II durch Ip und IIq verbunden den vierten Schnittpunkt 4 des gegebenen Kegelschnittes und des Hilfskreises k geben.

Nun bestimmen die Punkte I, II, III und 4 ein vollständiges Kreisviereck, in welchem bekanntlich die Halbirungsgeraden des Winkels und Nebenwinkels eines der drei Seitenpaare die Richtungen R und R' der Kegelschnittachsen sind. Diese sind nun parallel zu sich selbst nach OB und OA zu verschieben. Sollten jedoch die Achsenrichtungen sofort durch den Mittelpunkt O gehen, so ist es am einfachsten, die Achsen der Involution der conjugirten Durchmesser*) (die hier mit Hilfe der Geraden $I\,II$ und μ', IO und T_1 leicht gefunden werden können) zu construiren.

Die Brennpunkte F und F' können nun mit Hilfe der Tangente T_3 und Normale n_3 des Punktes III, und der Scheitelkreis (über AA') mit Hilfe der aus F auf T_3 gefällten Senkrechten Fs, wie vorher, construirt werden.

Die Bestimmung der Brennpunkte und des Scheitelkreises in 1) und 2) überragt (unserer Ansicht nach) alle diesbezüglichen Constructionen an Einfachheit und Präcision, was bei der Lösung unseres Hauptproblemes von nicht zu unterschätzender Wichtigkeit ist.

V. Bestimmung der reellen und imaginären Schnittpunkte zweier Kegelschnitte (Fig. 12.).

Wir stützen uns dabei auf den nachfolgenden Satz: Zwei Kegelschnitte, welche zwischen denselben Tangenten liegen, stehen zu einander in collinearer Beziehung (Verwandtschaft) für ihren Schnittpunkt S als Centrum und für zwei von einander verschiedene Collineationsachsen C und C'.

*) Siehe Jac. Steiner's Vorlesungen von Dr. Schröter.

Zieht man nämlich durch S irgend eine Gerade Sc, welche die gegebenen Kegelschnitte in vier Punkten schneidet, und ordnet dem Schnittpunkte c des einen den Schnittpunkt c' des anderen Kegelschnittes zu, so ist es nicht schwer, mit Hilfe dieser Punkte und der Berührungspunkte der gemeinsamen Tangenten die beiden Collineationsachsen C und C' zu construiren. Wenn nun die Tangenten Sa und Sb die Kegelschnitte beziehungsweise in a, a' und b, b' berühren, so entspricht in der collinearen Verwandtschaft

dem Punkte a der Punkt a',
" " b " " b'

und daher der Geraden ab jene $a'b'$. Die letzteren treffen sich in einem Punkte 3, durch welchen C und C' hindurch geht.

Da ferner c und c' zugeordnete Punkte sind, so müssen cb und $c'b'$ entsprechende Gerade sein, welche sich in einem Punkte 1 der Collineationsachse C treffen, so dass $\overline{13} = C$ ist. Ordnet man dem Punkte c jenen c'' zu, so sind cb und $c''b'$ ebenfalls zwei zugeordnete Gerade und daher ihr Schnittpunkt 2 ein Punkt der Collineationsachse C', welche noch durch 3 hindurch geht. C und C' bestimmen mit den gegebenen Kegelschnitten ihre gemeinsamen (reellen I, II und imaginären) Schnittpunkte, weil diese Punkte im collinearen Systeme sich selbst entsprechende Punkte sind.

In diesem Probleme tritt die Aufgabe zu wiederholtem Male auf: Die Schnittpunkte einer Geraden mit einem Kegelschnitte zu construiren, welche durch ihre Achsen und Brennpunkte gegeben sind. Wir glauben, dass sich das nachstehende Constructionsverfahren am zweckmässigsten hiezu eignen dürfte. Es beruht auf dem Satze, dass der Ort eines Punktes, der eine gleiche Entfernung von einem festen Punkte und einem festen Kreise hat, ein Kegelschnitt ist, u. z. eine Ellipse oder Hyperbel, je nachdem der feste Punkt innerhalb oder ausserhalb des festen Kreises liegt. Bei der Parabel tritt, statt des festen Kreises, die Leitlinie auf.

Betrachtet man den einen Brennpunkt, z. B. F, als den festen Punkt, dann ist bekanntlich der Kreis K, welcher mit AA' aus dem anderen Brennpunkte F' beschrieben wird, der feste Kreis, und alle Punkte des Kegelschnittes haben dann von F und K einen gleichen Abstand. Wir nennen K die Leitkreislinie des Kegelschnittes [bei der Parabel geht sie in die Leitlinie über]. Ist nun G eine Gerade, deren (reelle und imaginäre) Schnittpunkte mit dem Kegelschnitte construirt werden sollen, so errichtet man von F eine Senkrechte Fs auf G, und verlängert diese um sich selbst nach g. Legt

man nun durch F und g einen Hilfskreis k von beliebig grossem Halbmesser, dessen Mittelpunkt auf G liegt, und welcher K im allgemeinen in 2 Punkten (1 und 2) schneidet, dann treffen sich die Geraden Fg und $\overline{1,\ 2}$ in einem Punkte P, von welchem aus an K zwei Tangenten Pb, Pb' gezogen werden können, deren Berührungspunkte b und b' sein sollen. Führt man nun durch b und b' zum Brennpunkte F' Gerade, welche G in I und II schneiden, so sind letztere Punkte die gesuchten Schnittpunkte von G in dem gegebenen Kegelschnitte; denn es ist z. B. $\overline{Pb}^2 = P1.P2 = PF.Pg$, und der durch F, g und b aus I gelegte Kreis berührt Pb und daher auch die Leitkreislinie K.

Bei der Parabel, deren Brennpunkt F und Leitlinie K bekannt sind, fällt man von F auf die gegebene Gerade G, deren Schnittpunkte I und II mit ihr gesucht werden sollen, eine Senkrechte Fs und verlängert dieselbe um sich selbst nach g. Nun lege man wieder durch F und g einen beliebigen Hilfskreis k derart, dass sich von dem Schnittpunkte P der Verbindungsgeraden Fg und der Leitlinie K an k zwei Tangenten $P1$ und $P2$ ziehen lassen. Mit der Länge der Tangente $P1$ beschreibe man aus P einen zweiten Kreis k', welcher die Leitlinie K in b und b' schneidet, alsdann treffen die Senkrechten bI, $b'II$, aus b und b' auf K errichtet, die gegebene Gerade G in den fraglichen Schnittpunkten; denn es ist z. B $\overline{P1}^2 = \overline{Pb}^2 = PF.Pg$ und ein durch F, g und h aus I gelegter Kreis berührt daher die Leitlinie K in b.

Anmerkung. Zur schnellen Bestimmung der Schnittpunkte zweier Ellipsen, welche durch die Halbachsen a, b und α, β gegeben sind, dürfte sich vielleicht das nachstehende mechanische Verfahren eignen: Man trage auf je einem Papierstreifen die gegebenen Halbachsen der Ellipsen, von einem beliebigen Punkte M aus, auf; hierauf verschiebe man diese derart, dass die Halbachsendifferenz mit ihren Endpunkten stets auf den Achsen der ihnen entsprechenden Kegelschnitte zu liegen kommen. Da in dieser Weise die Punkte M der beiden Streifen Ellipsenpunkte bestimmen, so geben sie offenbar bei ihrem Zusammenfallen einen Schnittpunkt beider Ellipsen an.

Specieller Fall. Es sind die Schnittpunkte zweier Kegelschnitte zu bestimmen, deren Achsen (AA', $\alpha\alpha'$) in einer Geraden liegen*). Da je ein Paar von gemeinsamen Tangenten beider Kegelschnitte bezüglich der Geraden (AA', $\alpha\alpha'$) symmetrisch

*) R. Niemtschik, Sitzb. der k. Ak. d. W. 1869, 2. Abhandlg.

liegt, so muss in diesem Falle jede der beiden Collineationsachsen C und C' auf dieser Geraden senkrecht stehen, und ihre Richtung ist also immer bekannt.

Schneidet man nun die beiden Kegelschnitte mit einer zu der Achsenrichtung (AA', $\alpha\alpha'$) parallelen Geraden G, so erhält man zwei involutorische Reihen, deren entsprechende Punkte je 2 Schnittpunkte (p, p' und π, π') desselben Kegelschnittes mit G sind.

Diese Punkte lassen sich bei den Ellipsen mit Hilfe der über den Achsen beschriebenen concentrischen Kreise direct und am leichtesten finden.

Projicirt man diese Punktreihen, deren entspr. Elemente p, p' und π, π' sind, auf jene Gerade, in welcher die Achsen AA' und $\alpha\alpha'$ beider Kegelschnitte liegen, und welche ebenfalls 2 involutorische Reihen (mit den entspr. Elementen A, A' und α, α') enthält, in der Richtung der Collineationsaxe C (also senkrecht auf AA'), so erhält man 2 zusammenfallende involutorische Punktsysteme, welche im allgemeinen ein Paar conjugirter Punkte p, p' besitzen, die beiden involutorischen Punktsystemen angehören. (Siehe Steiner's Vorlesungen pag. 58). Zieht man durch diese Punkte p und p' parallele Geraden g und g' zu C, so sind die Schnittpunkte I, II... dieser, mit einem der gegebenen Kegelschnitte, bereits die gesuchten Schnittpunkte beider Kegelschnitte.

Wir hoffen auf den letzteren Gegenstand nochmals zurück zu kommen, und verweisen unterdessen auf die preisgekrönte Schrift Dr. Kortum's „Ueber geometr. Aufgaben des 3. und 4. Grades“ und auf die diesbezüglichen Constructionen von Chasles.

Graz, November 1880.

XXV.

Kegelschnittbüschel-Constructionen.

Zweiter Artikel.

Zur Construction des polaren Kegelschnittes gegebener Geraden.

Von

Franz Bergmann.

---

1. Bezeichnet g eine willkürliche Gerade der Ebene eines Kegelschnittbüschels und bewegt sich in derselben ein Punkt p, so beschreibt bekanntlich der demselben in Bezug auf den Kegelschnittbüschel conjugirte Punkt P eine Kegelschnittlinie G; wir können somit dieselbe als den geometrischen Ort der zu sämmtlichen Punkten der Geraden g bezüglich des Kegelschnittbüschels conjugirten Punkte bezeichnen. Entspricht nun dem willkürlichen Punkte p auf der Geraden der Punkt P auf dem Kegelschnitt, so werden die Polaren des ersteren Punktes in Bezug auf sämmtliche einzelnen Büschelkegelschnitte sich im Punkte P schneiden, und umgekehrt werden die Polaren des letzteren Punktes in Bezug auf die einzelnen Büschelkegelschnitte einen Strahlenbüschel mit dem Mittelpunkte p bilden; demzufolge kann die Gerade g, da sie ebenfalls ein Element dieses Strahlenbüschels vorstellt, als die Polare des Punktes P in Bezug auf irgend einen bestimmten Büschelkegelschnitt aufgefasst werden. Da nun analoge Beziehungen zwischen jedem anderen Punkte der Geraden und seinem conjugirten auf dem Kegelschnitte herrschen, können wir den letzteren auch als den geometrischen Ort des Poles der Geraden g in Bezug auf sämmtliche einzelnen Kegelschnitte des gegebenen Büschels definiren. Wir wollen daher im Weiteren den so de-

finirten Kegelschnitt G als den polaren Kegelschnitt der Geraden g in dem betrachteten Kegelschnittbüschel bezeichnen.

Aus dieser Definition ergibt sich bereits eine Construction dieses polaren Kegelschnittes: Sind k_1 und k_2 zwei willkürliche Kegelschnitte eines Büschels und g eine gegebene Gerade; sind ferner P_1 und P_2 die Pole der Geraden g in Bezug auf k_1 und k_2; so haben wir zu jedem einzelnen Punkte p der Geraden g in Bezug auf k_1 und k_2 die entsprechenden Polaren zu construiren und ihren Schnittpunkt P aufzusuchen; derselbe ist bereits der zu p im Kegelschnittbüschel conjugirte Punkt und da die Gesammtheit der so construirten Polarenpaare zwei Strahlenbüschel mit den Mittelpunkten P_1 und P_2 bildet, welche einander bekanntlich projectivisch entsprechen, so ist ihr Erzeugniss, der Ort des Punktes P, tatsächlich ein Kegelschnitt. Anstatt der beiden willkürlich gewählten Kegelschnitte k_1 und k_2 können auch die — reellen — Geradenpaare des Büschels genommen werden; sodann vereinfacht sich insofern diese Construction, indem das Aufsuchen der erwähnten Polaren auf die Construction des vierten harmonischen Strahles zu drei gegebenen zurückgeht.

Wir entwickeln im Nachfolgenden eine andere Construction des polaren Kegelschnittes einer Geraden, welche ebenso allgemein ist, da sie, wie die vorige, sich stets anwenden lässt, es mögen die Mittelpunkte des Kegelschnittbüschels reell oder imaginär sein.

2. Es sei ein Kegelschnittbüschel in allgemeinster Art und Weise durch zwei auf den willkürlich gewählten Trägern t und τ gegebene Punktinvolutionen [a und a', b und b'; α und α', β und β'] bestimmt; seine Elemente werden bekanntlich durch jene Kegelschnitte der Ebene vorgestellt, für welche die involutorich verwandten Punktepaare auf t und τ conjugirt sind. Bezeichnen wir mit $z = \zeta$ den Schnittpunkt der Träger t und τ und suchen die demselben involutorisch entsprechenden Punkte z' und ζ' auf t resp. τ, so ergibt sich auf der Geraden $\overline{z'\zeta'} = T$ mit Hilfe der beiden gegebenen Involutionen eine neue, wenn wir aus einem willkürlichen Punktepaare (a, a') des Punktsystemes t die Involution τ — wie auch umgehrt — projiciren und die projicirenden Strahlen mit T zum Schnitt bringen. Denn die daselbst entstehenden Punktreihen sind zweifellos projectivisch; dass ausserdem ihre Lage eine involutorische ist, wird uns während des Projicirens des Punktepaares ζ und ζ' sofort klar, indem auf T das erstemal die Punkte z' und ζ', das zweitemal ζ' und z' erscheinen. So liefern uns beispielsweise die projicirenden Strahlen $a(\alpha)$ und $a'(\alpha')$, $a(\alpha')$ und $a'(\alpha)$ die involutorischen Punktepaare A

und A', A_1 und A_1', und zu diesen kann das Punktepaar z' und ζ' als drittes gezählt werden.

Diese Involution auf T bleibt dieselbe, wenn wir auch anstatt aus a und a' aus einem willkürlichen anderen Punktpaare, beispielsweise b und b' die τ-involution projiciren. Um dieses zu zeigen, wollen wir umgekehrt zunächst die t-involution — darunter insbesondere die Punktepaare a und a', b und b' — aus den Punkten α und α' projiciren; dadurch erscheint auf T eine Involution mit den besonderen Punktepaaren A und A', A_1 und A_1', B und B', B_1 und B_1', welche somit mit der vorigen Involution auf T identisch ist, da sie mit ihr die ersten zwei Paare von Elementen gemeinschaftlich hat. Nun können wir die τ-involution aus b und b' projiciren, wobei das auf T erscheinende Punktsystem wieder die Punktepaare B und B', B_1 und B_1' enthalten wird; aus diesem Grunde ist die mit Hilfe der Punkte b und b', also allgemein mit Hilfe jedes anderen Punktepaares von t erzeugte T-involution stets dieselbe.

Daraus folgt: 1) Je zwei Geraden g und g', durch welche die Träger t und τ in zwei involutorischen Punktepaaren — x und ξ resp. x' und ξ' — getroffen werden, fixiren auch auf T ein Punktepaar des diesem Träger eigentümlichen Punktsystems. Aus diesem Grunde liegen auch die Mittelpunkte o, ω und O der drei Involutionen t, τ und T auf einer einzigen Geraden m, so dass zur vollständigen Bestimmung eines Kegelschnittbüschels im Allgemeinen ein gegebenes Vierseit t, τ, T, m ausreichend ist. — 2) Jedes Strahlenpaar, durch welches aus einem bestimmten Punktepaare der T-involution ein willkürliches Elementenpaar der t-involution projicirt wird, projicirt zu gleicher Zeit auch ein gewisses Punktepaar der τ-involution und umgekehrt. Daraus ergibt sich unmittelbar die bekannte Construction einzelner Büschelkegelschnitte, nach welcher das Punktsystem auf t — also auch gleichzeitig jenes auf τ — aus den einzelnen Punktepaaren der T-involution projicirt wird; denn jeder so erzeugte Kegelschnitt wird die — reellen oder imaginären — Doppelelemente der Punktsysteme t und τ enthalten. Jeder einzelne Büschelkegelschnitt ist somit durch ein besonderes Punktepaar der T-involution vollständig charakterisirt; beide werden gleichzeitig reell oder imaginär, und die Anzahl der Büschelkegelschnitte ist somit jener der Punktepaare eines geraden Punktsystemes gleich und daher einfach unendlich.

Da schliesslich dem Punkte $z = \zeta$ der Ebene sowohl z' als auch ζ' als conjugirte im Kegelschnittbüschel entsprechen, so wird es auch jeder andere Punkt der Geraden T; die Gerade T ist folglich die Polare des Punktes $z = \zeta$ in Bezug auf jeden einzelnen Büschelkegelschnitt.

3. Es sei nach diesen einleitenden Bemerkungen zu einer gegebenen Geraden g der polare Kegelschnitt G in Bezug auf einen Kegelschnittbüschel zu construiren, welcher in soeben dargestellter Weise durch das Vierseit t, τ, T, m gegeben ist; dieselbe besitze mit t und τ die Schnittpunkte a und α, welchen involutorisch a' und α' entsprechen mögen. Sei nun P und P' ein willkürliches Punktepaar der T-involution, so ist durch dasselbe ein gewisser Büschelkegelschnitt charakterisirt und wir sind im Stande, beliebig viele Punkte desselben in bekannter Weise zu construiren. Projiciren wir beispielsweise das Punktepaar α und α' aus P und P', so erhalten wir die Punkte 1 und 2, und durch Projiciren des Punktepaares a und a' erzeugen wir die Punkte 3 und 4 dieses Büschelkegelschnittes. Auf diese Weise ergeben sich uns in dem betrachteten Kegelschnitte zwei Vierecke PP' 12 und PP' 34, von welchen sich je zwei Gegenseitenpaare in den Punkten α und α' resp. a und a' begegnen. Es lasssen sich daher die Polaren der Punkte a und α mit Leichtigkeit construiren; bezeichnen wir mit S und S' die Schnittpunkte der Geraden $\overline{12}$ und $\overline{34}$ mit T, so sind es die Geraden $a'S'$ und $\alpha'S$ und somit ist ihr Schnittpunkt der Pol der Geraden g in Bezug auf den betrachteten Büschelkegelschnitt. In derselben Weise lässt sich für jeden anderen Büschelkegelschnitt das analoge Punktepaar S und S', mithin auch das Strahlenpaar $a'(S')$ und $\alpha'(S)$ construiren; ihre Schnittpunkte werden den polaren Kegelschnitt erfüllen, so dass derselbe als das Erzeugniss der Strahlenbüschel $a'(S')$ und $\alpha'(S)$ aufzufassen ist. Vermöge der Eigenschaften des Viereckes PP' 12 besitzt der Punkt S eine harmonische Lage zu den Punkten P, P', ζ', und analog schliessen wir aus dem Vierecke PP' 34, dass S' die Punkte P, P', z' harmonisch trennt. Da lässt sich nun leicht zeigen, dass dieses neu construirte Punktepaar S und S' ebenfalls der T-involution angehört, dass somit

$$(PP'z'S') = (P'P\zeta'S).$$

Denn da vermöge der soeben besprochenen harmonischen Teilungen

$$(PP'z'S') = -1 = (PP'\zeta'S)$$

und überdies

$$(PP'\zeta'S) = \frac{1}{(P'P\zeta'S)} = -1,$$

so ist in der Tat

$$(PP'z'S') = (P'P\zeta'S)$$

Zu demselben Resultate können wir auch auf folgende Weise gelangen: Fixiren wir auf einer beliebigen Kreislinie durch die Punktepaare P und P', z' und ζ' eine Involution mit dem Pole J, so ist der Durchstosspunkt i der Kreistangenten in P und P' ein Punkt

ihrer Polaren; die zu P, P', z' resp. P, P', ζ', harmonischen Kreispunkte S' und S ergeben sich auf den Strahlen $i(z')$ und $i(\zeta')$. Somit ist i der Pol einer zweiten, durch z' und S', ζ' und S am Kreise gegebenen Involution mit der Polaren $\overline{PP'}$, weshalb sich $\overline{z'\zeta'}$ und $\overline{S'S}$ auf der letzteren — im Punkte J — schneiden werden. S und S' gehört folglich der gegebenen Involution mit dem Pole J an.

Die Strahlenbüschel $a'(S')$ und $\alpha'(S)$ projiciren somit die einzelnen Punktepaare der T-involution, woraus wir gleichzeitig auch entnehmen können, dass sie projectivisch sind.

Um demnach zu einer gegebenen Geraden g den polaren Kegelschnitt G in Bezug auf einen Kegelschnittbüschel zu bestimmen, construiren wir zunächst die zu den Schnittpunkten a und α derselben mit den Trägern t und τ involutorisch entsprechenden a' und α' und projiciren aus den letzteren die Involution auf dem Träger T; der so erzeugte Kegelschnitt G ist der zu g polar zugeordnete.

Nennen wir Σ und Σ' die Schnittpunkte der Geraden $g = \overline{a\alpha}$ und $g' = \overline{a'\alpha'}$ mit T, so gehören nach Früherem diese beiden Punkte als involutorisches Paar dem Punktsysteme T an und wir erhalten aus leicht begreiflichen Gründen die Tangenten des polaren Kegelschnittes in den Punkten a' und α', wenn wir diese mit Σ verbinden.

4. Die soeben geführte Entwicklung ist unabhängig von dem Charakter der Involutionen t, τ und T. Ist die T-involution hyperbolisch, so lässt sich für dieselbe Construction des polaren Kegelschnittes auch folgender Beweis anführen:

Fassen wir den polaren Kegelschnitt G als den Ort jener Punkte auf, welche zu sämmtlichen Punkten der Geraden g im Kegelschnittbüschel conjugirt sind, so ist leicht einzusehen, dass derselbe zunächst durch die Punkte a' und α' führen wird, weil dieselben mit a resp. α bezüglich des Büschels conjugirt sind. Bezeichnen wir ferner mit g_1 den Schnittpunkt der Geraden $g = \overline{a\alpha}$ und $g' = \overline{a'\alpha'}$ und mit G_1 denjenigen der Geraden $\overline{a'\alpha}$ und $\overline{a\alpha'}$, so ist nach bekannten Grundsätzen g_1 und G_1 ebenfalls ein conjugirtes Punktepaar im Kegelschnittbüschel und somit G_1 ein dritter Punkt des polaren Kegelschnittes; dabei bemerken wir schon jetzt, dass die beiden Schnittpunkte der zuletzt genannten Geraden mit T, nämlich A und A', zur T-involution gehören. Sei ferner Σ der Schnittpunkt von g und T, so ist derselbe aus bekannten Gründen dem Punkte $z = \zeta$ conjugirt, weshalb der letztere Punkt ebenfalls dem polaren Kegelschnitte angehört.

Und sind schliesslich D_1 und D_2 die reellen Doppelelemente der T-involution (gleichzeitig die Nullkegelschnitte des Büschels), und sind Δ_2 und Δ_1 die Schnitte der Strahlen $z(D_1)$ und $z(D_2)$ mit g, so lässt sich behaupten, dass auch die Punkte Δ_1 und D_1, sowie Δ_2 und D_2 conjugirt sind, und dass der Kegelschnitt G auch durch D_1 und D_2 führen wird. Denn in Bezug auf den in das Geradenpaar t und τ degenerirten Büschelkegelschnitt ist der Strahl $z(D_1)$ die Polare von Δ_1; hingegen wird die Polare des nämlichen Punktes in Bezug auf den Nullkegelschnitt D_1 irgend eine durch diesen Punkt führende Gerade sein. Beide Polaren treffen sich somit im Punkte D_1, weshalb dieser der zum Punkte Δ_1 der Geraden g conjugirte ist. Analoges gilt auch für das Punktepaar Δ_2 und D_2. Es sind uns somit von dem polaren Kegelschnitte die Punkte a', α', G_1, $z = \zeta$, D_1 und D_2 bekannt und man überzeugt sich leicht, dass die den Kegelschnitt erzeugenden Strahlenbüschel $a'(G_1, z, D_1, D_2 \ldots)$ und $\alpha'(G_1, z, D_1, D_2 \ldots)$ zugleich auch die T-involution projiciren.

Ein jeder von den polaren Kegelschnitten eines Büschels enthält, wie aus den vorhergehenden Auseinandersetzungen hervorgeht, die drei festen Punkte $z = \zeta$, D_1 und D_2, von welchen der erste stets reell ist, die beiden anderen reell oder imaginär sein können. Jeder polare Kegelschnitt besitzt somit die Elementenpaare der T-involution zu conjugirten Punkten.

5. Umgekehrt: Kann ein jeder, durch den Punkt $z = \zeta$ willkürlich gelegte Kegelschnitt G, welcher die einzelnen Punktepaare der T-involution zu conjugirten Punkten besitzt, als der polare einer bestimmten Geraden g aufgefasst werden? — Nennen wir wieder a' und α' die Schnittpunkte des gegebenen Kegelschnittes G mit den Trägern t und τ, so wird die soeben gestellte Frage zu bejahen sein, wenn die aus a' und α' diesen Kegelschnitt projicirenden Strahlenbüschel den Träger T in der daselbst befindlichen Involution treffen. Diese beiden Strahlenbüschel a' und α' werden den Träger T zunächst in zwei projectivischen Punktreihen schneiden, zu welchen jedenfalls das Punktepaar z' und ζ' gehören wird; dieses Punktepaar ist nun überdies bezüglich des betrachteten Kegelschnittes G conjugirt — vermöge der Voraussetzung — und deshalb wird sich das Strahlenpaar $\alpha'(z')$ und $a'(\zeta')$ ebenfalls in einem Punkte 1 des Kegelschnittes G treffen, und wir erkennen bereits, dass die beiden, auf T entstehenden projectivischen Punktreihen eine involutorische Lage besitzen. Projiciren wir nun irgend einen Punkt 2 des Kegelschnittes aus a' und α', so erhalten wir auf T zwei neue Punkte A und A' der projectivischen Punktreihen, und es folgt aus ihrer soeben gezeigten involutorischen Lage, dass auch umgekehrt die Strahlen $a'(A')$ und $\alpha'(A)$ sich auf dem Kegelschnitte — im Punkte 3 — begegnen

werden. Es folgt somit aus dem Vierecke $a'\alpha'23$, dass auch A und A' ein conjugirtes Punktepaar dieses Kegelschnittes ist und der Voraussetzung gemäss der T-involution angehört. Nun ist es klar, dass alle anderen Punkte des gegebenen Kegelschnittes construirt werden können, indem wir die T-involution aus a' und α' projiciren, dass demnach G als der polare Kegelschnitt einer gewissen Geraden der Ebene angesehen werden kann. Diese Gerade g erhalten wir in der Verbindungslinie der Punkte a und α, welche den schon bekannten Punkten a' und α' involutorisch zugeordnet sind.

Es bilden somit somit sämmtliche polaren Kegelschnitte eines Kegelschnittbüschels ein System von Kegelschnitten mit drei gemeinschaftlichen Punkten, von welchen der eine ($z = \zeta$) stets reell ist, die beiden übrigen (D_1 und D_2) reell oder imaginär sein können. Bezeichnet u die Anzahl der Elemente eines Kegelschnittbüschels, so ist u^2 die Anzahl sämmtlicher polaren Kegelschnitte desselben.

6. Unter den sämmtlichen polaren Kegelschnitten eines Kegelschnittbüschels existiren Ellipsen, Parabeln, Hyperbeln, gleichseitige Hyperbeln, Geradenpaare und ein Kreis. Um zunächst jene einzelnen Lagen der Geraden g kennen zu lernen, für welche der polare Kegelschnitt eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel wird, wollen wir dieselbe um einen gewissen festen Punkt a des Trägers t drehen; der dabei erzeugte Strahlenbüschel werde $a(g)$ genannt. Von den beiden Mittelpunkten derjenigen projectivischen Strahlenbüschel, welche den jeweiligen polaren Kegelschnitt erzeugen, ist demnach a' fest, α' jedoch veränderlich. Für irgend eine Lage des letzteren Punktes werden diejenigen Strahlenbüschel, welche den polaren Kegelschnitt G erzeugen, durch folgende einander projectivisch zugeordneten Dreistrahlen bestimmt: $a'(z, O, T_\infty)$ und $\alpha'(z, T_\infty, O)$, wobei T_∞ den unendlich fernen Punkt des Trägers T vorstellt. Verschieben wir diese beiden Dreistrahlen zu sich selbst parallel nach dem Punkte c eines willkürlich in der Ebene gezogenen Kreises K mit dem Centrum Ω, so ergeben sich auf demselben durch den Schnitt der beiden Dreistrahlen die Punkte 1, 2, 3 und 1′, 2′, 3′. Von diesen drei Punktepaaren, welche auf der Kreislinie zwei projectivische Punktreihen fixiren, bleiben die ersten fünf für eine bestimmte Lage des Punktes a' fest; blos der Ort des Punktes 3′ hängt von der zufälligen Lage des Punktes α' ab, und wir können, sobald uns die Lage desselben bekannt ist, den entsprechenden Punkt α' augenblicklich angeben, indem wir $\overline{c3'} \parallel \overline{O\alpha'}$ ziehen. Die Vervollständigungsaxe der so fixirten projectivischen Punktreihen ist leicht zu construiren; ist p der Schnittpunkt der Geraden $\overline{1'2}$ und $\overline{12'}$, π jener von $\overline{1'3}$ und

und $\overline{1\,3'}$, so ist $\overline{p\pi} = V$ diese Vervollständigungsaxe und ihre Schnittpunkte mit dem Kreise liefern uns die Doppelelemente der projectivischen Punktreihen auf der Kreislinie. Trifft demnach V den Kreis reell oder imaginär in s_1 und s_2, so ist der polare Kegelschnitt für die eben betrachtete Lage der Punkte a' und α' eine Hyperbel oder Ellipse, und seine reellen oder imaginären Asymptoten besitzen die Richtungen der Strahlen $c(s_1)$ und $c(s_2)$. Es lässt sich nun auch angeben, wie der Punkt a' resp. a auf t zu wählen ist, dass unter den entsprechenden Polarkegelschnitten keine Ellipsen und Parabeln vorkommen; dies wird geschehen, wenn p innerhalb des Kreises K fällt, wenn also der Strahl $c(2)$, welcher bekanntlich zu $\overline{a'O}$ parallel ist, innerhalb des Winkels $3\,c\,1$ — des Winkels der Geraden T und t — zu liegen kommt.

Wir bemerkten schon, dass bei einer fixen Lage von a' blos der Punkt $3'$ auf dem Kreise K seinen Ort verändert, dass demnach die Vervollständigungsaxen für sämmtliche Lagen des Punktes α' einen Strahlenbüschel $p(V)$ mit dem Centrum p bilden werden. Bei diesem Umstande ist es nicht schwer, jene Strahlen im Büschel $a(g)$ anzugeben, welchen als polare Kegelschnitte Parabeln entsprechen; wir ziehen zu dem Zwecke von p die in t_1 und t_2 berührenden Tangenten zu dem Kreise K und erhalten bereits in den Strahlen $c(t_1)$ und $c(t_2)$ die Richtungen der Parabelaxen. Im Schnitte dieser Tangenten mit der Geraden $\overline{1'3}$ befinden sich die entsprechenden Lagen von π; projiciren wir diese Punkte aus 1 auf den Kreis, so ergeben sich daselbst die zugehörigen Punkte $3'$, aus welchen wir die Punkte α' construiren können, da $c(3') \parallel \overline{O\alpha'}$ ist. Die gewonnenen Punkte α' führen direct zu ihren involutorisch zugeordneten α, durch welche die beiden Strahlen des Büschels $a(g)$ charakterisirt werden. Es entsprechen somit zwei — reellen oder imaginären — Strahlen des Büschels $a(g)$ Parabeln, so dass wir unter sämmtlichen polaren Kegelschnitten $2u$ Parabeln — darunter auch imaginäre — finden.

Fällt die Vervollständigungsaxe mit dem Strahle $p(\Omega)$ zusammen, so wird der polare Kegelschnitt eine gleichseitige Hyperbel; in der zu $p(\Omega)$ senkrechten Lage $p(\Omega')$ charakterisirt sie entweder jene Ellipse, welche dem Kreise am nächsten kommt, oder — wenn dem Büschel $a(g)$ nur polare Hyperbeln entsprechen — jene, welche den kleinsten Asymptotenwinkel besitzt. Die entsprechenden Lagen des Strahles im Büschel $a(g)$ lassen sich ohne Schwierigkeit nach den vorigen Regeln construiren.

Ziehen wir von p aus zwei Strahlen gegen den Kreis K, so dass dieselben zu $p(\Omega)$ symmetrisch liegen, so werden sich die entsprechen-

den Paare von Schnittpunkten (s_1 und s_2) auf dem Kreise unter gleichen Winkeln von c aus projiciren lassen; die beiden zugehörigen Polarkegelschnitte besitzen in Folge dessen gleich grosse Asymptotenwinkel und sind ähnlich. Es lassen sich somit alle den Strahlen des Büschels $a(g)$ entsprechenden polaren Kegelschnitte paarweise zu ähnlichen gruppiren, ohne gleichzeitig auch eine ähnliche Lage zu besitzen.

Verändern wir schliesslich auch den Ort des Punktes a und gleichzeitig des Punktes a' auf t, so beschreibt $c(2)$ wegen $c(2) \parallel \overline{Oa'}$ eine Drehung um c, der Punkt p rückt auf der festen Geraden $\overline{1\,2'}$ vor und es ergeben sich neue Büschel polarer Kegelschnitte. Da nun sämmtlichen Strahlenbüscheln $p(V)$, welche wir in der angegebenen Art erzeugen können, jener Strahl gemeinsam ist, welcher mit der Geraden $\overline{1\,2'}$ zusammenfällt, schliessen wir, dass unter sämmtlichen u^2 polaren Kegelschnitten u Hyperbeln vorkommen werden, und zwar je eine in jedem Büschel, welche unter einander nicht blos ähnlich sind, sondern auch eine ähnliche Lage besitzen.

Was die Parabelpaare unter den Polarkegelschnitten betrifft, so bilden ihre Axenrichtungen $c(t_1)$ und $c(t_2)$ eine Strahleninvolution, da sämmtliche Berührungssehnen $\overline{t_1 t_2}$ durch den festen Pol der Geraden $\overline{1\,2'}$ führen.

Lassen wir schliesslich p auf der festen Geraden $\overline{1\,2'}$ in unendliche Ferne rücken, so fällt der Strahl $p(\Omega')$ mit der unendlich fernen Geraden zusammen und der polare Kegelschnitt übergeht in den polaren Kreis k. Die Parabelaxen stehen in diesem Falle zu einander senkrecht und halbiren den Asymptotenwinkel der entsprechenden gleichseitigen Hyperbel.

7. Wenn die T-involution hyperbolisch ist, so lässt sich der polare Kreis k, welcher nach den vorhergehenden Auseinandersetzungen unter den u^2 polaren Kegelschnitten vorkommt, ohne Schwierigkeit construiren; er geht durch den Punkt $z = \zeta$ und durch die beiden in diesem Falle reellen Doppelpunkte D_1 und D_2 der T-involution, so dass er durch das genannte Dreieck direct gegeben ist. Ist hingegen die T-involution elliptisch — in welchem Falle ihr Centrum O zwischen die Punkte z' und ζ' fällt, und ihre Doppelelemente imaginär werden — so kann zu seiner Construction folgender Weg eingeschlagen werden:

Sein Mittelpunkt μ liegt offenbar in einem durch den Punkt O zu T senkrecht gezogenen Strahle $O(n)$ und wir erhalten augenblicklich einen zweiten Punkt dieses Kreises, wenn wir den zum

Punkte $z = \zeta$ in Bezug auf den Strahl $O(n)$ symmetrisch liegenden Punkt y aufsuchen. Es gehen nun durch diese beiden Punkte unzählig viele Kreise, welche in ihrer Gesammtheit einen Büschel bilden; von diesen haben wir aber nur denjenigen zu wählen, welchem die T-involution angehört. Construiren wir zu zwei willkürlichen Kreisen dieses Büschels die Tangenten von irgend einem Punkte, beispielsweise z' des Trägers T, so werden sich die auftretenden Berührungssehnen in einem festen Punkte z'' schneiden, welcher in Bezug auf den Kreisbüschel der dem Punkte z' conjugirte ist; die Polare dieses letzteren Punktes im Kreise k wird, da sie ausserdem durch ζ' gehen soll, mit der Geraden $\overline{z''\zeta'}$ zusammenfallen, und wir brauchen, um seinen Mittelpunkt μ zu finden, nur von z' eine Normale auf $\overline{z''\zeta'}$ zu ziehen und dieselbe mit $O(n)$ zum Schnitte zu bringen. Der Halbmesser des polaren Kreises k ist somit $\mu z = \mu y$. — Construiren wir schliesslich die Schnittpunkte a' und α' dieses Kreises mit den Trägern t und τ und zu denselben ihre involutorisch entsprechenden a und α, so ist es die Gerade $g = \overline{a\alpha}$, welcher der polare Kreis zugeordnet ist.

Berücksichtigen wir die während des vorhergehenden Abschnittes über die Polarkegelschnitte im Allgemeinen und schliesslich über den polaren Kreis gemachten Bemerkungen, so werden wir im Stande sein, dessen Schnittpunkte a' und α' mit t und τ auch in folgender Weise zu construiren. Bekanntlich sind von den sechs dort angeführten Punkten 1, 2, 3, 1'. 2', 3' die Punkte 1, 1', 2' und 3 für jede beliebige Lage von a' und α' fest; hingegen verändert sich mit dem Punkte a' gleichzeitig der Punkt 2 und mit α' der Punkt 3', indem $c(2) \parallel O(a')$ und $c(3') \parallel O(\alpha')$ ist. Soll nun die Vervollständigungsaxe V, also auch ihre beiden Punkte p und π (siehe dort) in unendliche Ferne rücken, so müssen zunächst — wegen p — die Geraden $\overline{12'}$ und $\overline{1'2}$ und wegen π die Geraden $\overline{1'3}$ und $\overline{13'}$ parallel sein. Somit lassen sich auf dem Hilfskreise K die Punkte 2 und 3' mit Leichtigkeit bestimmen und wegen der schon einmal angeführten Beziehungen $c(2) \parallel O(a')$ und $c(3') \parallel O(\alpha')$ auch die Punkte a' und α' construiren. Nun lässt sich ohne Mühe durch das Dreieck $za'\alpha'$ der Kreis k legen.

8. Führen wir in dem Falle, dass die T-involution hyperbolisch ist, die Gerade $g = \overline{a\alpha}$ durch einen ihrer beiden reellen Doppelelemente D_1 oder D_2 — beispielsweise durch D_1 — so wird nach früheren Entwicklungen die Gerade $g' = \overline{a'\alpha'}$ ebenfalls durch denselben Doppelpunkt gehen. Die projectivischen Strahlenbüschel, welche aus a' und α' die T-involution projiciren und gleichzeitig den

entsprechenden polaren Kegelschnitt dieser Geraden erzeugen, besitzen diesmal eine perspectivische Lage, indem zwei zugeordnete Strahlen $a'(D_1)$ und $\alpha'(D_1)$ zusammenfallen; der polare Kegelschnitt übergeht deshalb in ein Geradenpaar $\overline{a'\alpha'}$ und $\overline{zD_2}$. Es kommen demzufolge in jedem Strahlenbüschel $a(g)$ zwei Strahlen vor, für welche die polaren Kegelschnitte in Geradenpaare degeneriren: es sind dies die Strahlen $a(D_1)$ und $a(D_2)$; ihre entsprechenden polaren Kegelschnitte sind die Geradenpaare $\overline{a'D_1}$ und $\overline{zD_2}$ resp. $\overline{a'D_2}$ und $\overline{zD_1}$.

Irgend einem Punkte p, welchen wir auf der Geraden g angeben können, entspricht somit ein bestimmter Punkt P auf dem polaren Geradenpaare; wir finden ihn selbstverständlich, wenn wir zu den Strahlen $z(t, \tau, p)$ den vierten harmonischen aufsuchen und mit dem polaren Geradenpaare zum Schnitt bringen. Es zeigt sich nun dabei, dass jeder Punkt der Geraden g — mit Ausnahme des Punktes D_1 — seinen conjugirten auf der Geraden $\overline{a'\alpha'}$ besitzt, während der Punkt D_1 selbst jeden einzelnen Punkt der Geraden $\overline{zD_2}$ zum conjugirten haben kann. Es entspricht somit umgekehrt der Geraden $\overline{zD_2}$ — und analog auch der Geraden $\overline{zD_1}$ — ein Polarkegelschnitt — D_1 resp. D_2 — von unendlich geringer Ausdehnung.

Fällt die Gerade g mit T zusammen, so dass $a = z'$, $\alpha = \zeta'$ wird, so vereinigen sich die Punkte a' und α' in $z = \zeta$, und es wird durch jedes einzelne Strahlenpaar, welches aus a' und α' zwei involutorische Punkte auf T projicirt, der Punkt $z = \zeta$ wiedererzeugt und der polare Kegelschnitt der Geraden $g = T$ übergeht wieder in einen Punkt. Unter sämmtlichen Polarkegelschnitten gibt es somit drei ($z = \zeta$, D_1, D_2), welche in Nullkegelschnitte übergehen; die ihnen entsprechenden Geraden sind T, $\overline{zD_2}$, $\overline{zD_1}$ und bilden das Poldreieck des Kegelschnittbüschels.

9. Mit Hilfe des polaren Kreises k lässt sich die Aufgabe, zu einem willkürlichen Punkte Q der Ebene den im Kegelschnittbüschel conjugirten Punkt q aufzusuchen, mit grosser Einfachheit erledigen. Construiren wir uns auf die bekannte Weise die dem polaren Kreise k zugeordnete Gerade $g = \overline{a\alpha}$, so wird, während ein Punkt p dieselbe durchläuft, sein im Kegelschnittbüschel conjugirter den Kreis k beschreiben; gelangt dabei p in die Lagen a, α, Σ (der Schnittpunkt von g und T) so befindet sich sein conjugirter in a', α' und z, und für die übrigen einzelnen Lagen des Punktes p finden wir den conjugirten auf dem polaren Kreise, wenn wir zu den drei Strahlen $z(t, \tau, p)$ den vierten harmonischen construiren und denselben mit dem Kreise k zum Schnitte P bringen. Bezeichnen wir beispielsweise den Halbirungspunkt der

Strecke $\overline{a\alpha}$ mit p_0, den unendlich fernen Punkt der Geraden g mit p_∞, ferner die Schnittpunkte der Strahlen $z(p_0)$ und $z(p_\infty)$ mit dem polaren Kreise mit P_∞ und P_0, so sind die vier Strahlen $z(t, \tau, p_0, p_\infty)$ harmonisch und deshalb die Punktepaare p_0 und P_0, p_∞ und P_∞ conjugirt.

Um nun zu einem willkürlichen, nicht auf der Geraden g liegenden Punkte q der Ebene den im Kegelschnittbüschel conjugirten zu construiren, suchen wir vorerst den Schnittpunkt p des Strahles $z(q)$ mit der Geraden g und bestimmen in der bekannten Weise zu p den conjugirten Punkt P auf dem polaren Kreise. Selbstverständlich wird sich der zu q conjugirte Punkt Q auf dem Strahle $z(P)$ vorfinden. Bringen wir die Gerade $\overline{Pq}$ mit dem Träger T zum Schnitte in S, so trifft die Gerade $\overline{pS}$ den Strahl $z(P)$ in dem gewünschten Punkte Q; denn es treffen sich in dem von den conjugirten Punktepaaren $(p, P; q, Q)$ gebildeten Viereck die Gegenseitenpaare $\overline{pq}$ und $\overline{PQ}$, sowie $\overline{pQ}$ und $\overline{Pq}$ in den Punkten $z = \zeta$ und S, welche ja auch im Kegelschnittbüschel conjugirt sind. Analog hätten wir den Strahl $z(q)$ mit dem polaren Kreise zum Schnitte P_1 bringen können; der diesem conjugirte Punkt ist diesmal p_1, nämlich der Schnittpunkt des früheren Strahles $z(P)$ mit g. Trifft nun die Gerade $\overline{p_1 q}$ wieder den Träger T im Punkte S_1, so bestimmt $\overline{S_1 P_1}$ auf dem Strahle $z(P)$ den gesuchten Punkt Q.

Dabei lehrt uns eine einfache Betrachtung, dass es in der Ebene noch ein zweites System von Geraden g gibt, für welche die polaren Kegelschnitte in Geradenpaare übergehen. Lassen wir nun den vorhin gewählten Punkt q auf dem Strahle $z(q)$ sich fortbewegen, so rückt sein conjugirter stets auf dem Strahle $z(Q)$ vor, so dass also jedem Punkte des ersteren ein bestimmter Punkt des letzteren Strahles zugeordnet ist. Eine Ausnahme findet nur statt, wenn q in die Lage des Punktes $z = \zeta$ gelangt, da dem letzteren Punkte alle Punkte des Trägers T zugeordnet werden können, sodass demnach der polare Kegelschnitt eines Strahles $z(q)$ in das Geradenpaar $z(Q)$ und T degenerirt.

Ist die T-involution hyperbolisch, und führt die Gerade $g = a\alpha$ durch einen Doppelpunkt — beisp. D_1 — derselben, so ist bekanntlich der polare Kegelschnitt das Geradenpaar $g' = \overline{a'\alpha'}$ und $\overline{zD_2}$, und es lässt sich in analoger Weise zu j e d e m w i l l k ü r l i c h e n P u n k t e q d e r E b e n e d e r c o n j u g i r t e Q c o n s t r u i r e n. Trifft der Strahl $z(q)$ die Gerade g im Punkte p, und ist P der Schnittpunkt des zu $z(t, \tau, q)$ harmonischen vierten Strahles mit $\overline{a'\alpha'}$ und demnach

der zu p conjugirte Punkt, so schneiden wir den Träger T durch die Gerade Pq im Punkte S, worauf pS uns auf dem Strahle $z(P)$ den gewünschten Punkt Q liefert. Oder wir bringen die beiden vorigen Strahlen $z(q)$ und $z(P)$ zum Schnitte mit den Geraden $\overline{a'\alpha'}$ resp. $\overline{a\alpha}$ in P_1 resp. p_1, welche beiden Punkte conjugirt sind. Nun trifft $\overline{p_1 q}$ die Gerade T im Punkte S_1 und $P_1 S_1$ den Strahl $z(P)$ im Punkte Q.

10. Unter den polaren Kegelschnitten ist schliesslich der Mittelpunktskegelschnitt M eines Büschels von besonderer Bedeutung; jener Kegelschnitt nämlich, welcher die Mittelpunkte sämmtlicher Büschelkegelschnitte enthält und der unendlich fernen Geraden der Ebene polar zugeordnet ist. In Folge dessen fallen diesmal die Punkte a und α auf den Trägern t und τ in unendliche Ferne, so dass ihre involutorisch entsprechenden Punkte a' und α' mit den Mittelpunkten dieser Punktsysteme zusammenfallen ($a' = o$, $\alpha' = \omega$); von diesen beiden Punkten sind die entsprechenden Punktepaare der T-involution zu projiciren, wodurch der Mittelpunktskegelschnitt erzeugt wird. Die früher entwickelten allgemeinen Eigenschaften der polaren Kegelschnitte bestätigen sich auch bei dem Mittelpunktskegelschnitt. Derselbe geht selbstverständlich durch die Punkte o und ω, ausserdem noch durch den Punkt $z = \zeta$; er enthält ferner die — reellen oder imaginären — Doppelelemente D_1 und D_2 der T-involution. Die Tangenten desselben in den Punkten o und ω sind, da der Schnittpunkt Σ diesmal mit dem unendlich fernen Punkte des Trägers T zusammenfällt, zu dieser Geraden parallel, woraus folgt, dass $\overline{o\omega}$ ein Durchmesser, der Halbirungspunkt dieser Strecke das Centrum des Mittelpunktskegelschnittes ist, und dass die Richtungen T und $\overline{o\omega}$ zwei conjugirten Durchmessern desselben angehören.

Um zu entscheiden, welcher Art der so dargestellte Mittelpunktskegelschnitt angehört, betreten wir den im 6. Abschnitte angedeuteten Weg. Die Zuordnung der beiden projectivischen Strahlenbüschel, welche diesen Kegelschnitt erzeugen, geschieht diesmal durch die Dreistrahlen $o(z, O, T_\infty)$ und $\omega(z, T_\infty, O)$; wenn wir dieselben parallel zu sich selbst nach dem willkürlichen Punkte c eines angenommenen Hilfskreises K verschieben, so erhalten wir daselbst, wie wir uns leicht überzeugen können, einen Vierstrahl, welcher die Richtungen jener vier Geraden t, τ, T, m fixirt, durch welche der Kegelschnittbüschel bestimmt wurde. Nebstdem wird auf dieser Kreisperipherie eine projectivische Zuordnung durch die Punkte 1, 2, 3 und 1′, 2′(= 3), 3′(= 2) festgestellt; die entsprechende Vervollständigungsaxe $\overline{p\pi}$ der so bestimmten Punktreihen trifft reell oder imaginär den Hilfskreis in s_1 und s_2, so dass M eine Hyperbel resp.

Ellipse mit den — reellen oder imaginären — Asymptotenrichtungen $c(s_1)$ und $c(s_2)$ ist. Es wird aber durch die vier Punkte 1, 1′, 2(= 3′) und 2′(= 3) auch eine Punktinvolution auf dem Kreise fixirt, und wenn wir von den genannten vier Punkten die ersten und letzten zwei einander zuweisen, so ist der Schnittpunkt P der Geraden $\overline{11'}$ und $\overline{22'}$ der Pol, die Gerade $\overline{p\pi}$ aber die Polare dieser Involution. Nun sehen wir klar, dass der Mittelpunktskegelschnitt dann eine Ellipse oder Hyperbel sein wird, wenn die durch die Strahlenpaare $c(1, 1')$ und $c(2, 2')$, d. h. durch die Richtungen der Geraden t und τ, m und T fixirte Involution elliptisch oder hyperbolisch ist. Umgekehrt erkennen wir darin ein Mittel, um für gegebene Lagen der Träger t, τ, T die Richtung der Geraden m so zu bestimmen, dass der Mittelpunktskegelschnitt eine bestimmte Curve — beispielsweise eine gleichseitige Hyperbel oder ein Kreis — werde. Ersteres erreichen wir, wenn der Pol P in unendliche Ferne rückt, wobei $\overline{p\pi}$ mit einem Durchmesser des Hilfskreises K zusammenfällt. Es ist in diesem Falle die Gerade m so anzunehmen, dass sie mit τ resp. t einen ebensogrossen Winkel bildet wie der Träger T mit t resp. τ. Letzteres hingegen tritt ein, wenn die Gerade $\overline{p\pi}$ in unendliche Ferne rückt und ihr Pol P mit dem Centrum des Hilfskreises zusammenfällt. In diesem Falle sind somit die Winkel $1c1'$ und $2c2'$ als Winkel im Halbkreise Rechte, weshalb dasjenige, den Kegelschnittbüschel bestimmende Vierseit diesmal so zu wählen ist, dass die Geraden t und τ, T und m zu einander senkrecht stehen.

11. Besondere Punkte des Mittelpunktskegelschnittes lassen sich nun am einfachsten mit Hilfe der im 9. Abschnitte entwickelten Regeln aufsuchen; wir zeigen im Nachfolgenden I) die Construction jenes Punktes des Mittelpunktskegelschnittes, welcher sich auf einem willkürlichen, aus $s \mp \zeta$ führenden Strahle befindet, und II) die Construction des Mittelpunktes eines gegebenen Büschelkegelschnittes.

I) Setzen wir eine hyperbolische T-involution voraus, und ist $g = \overline{a\alpha}$ eine durch ihren reellen Doppelpunkt — beispielsweise D_1 — führende Gerade, so entspricht derselben polar das Geradenpaar $g' = \overline{a'\alpha'}$ und $\overline{sD_2}$ und es gehört einem jeden Punkte p auf g ein conjugirter Punkt P auf g' an, wenn der Vierstrahl $s(t, \tau, p, P)$ harmonisch ist. Es entspricht nun dem unendlich fernen Punkte q des Strahles $s(p)$ als conjugirter jener Punkt des Mittelpunktskegelschnittes, welcher sich auf dem Strahle $s(P)$ befindet; um ihn zu construiren, ziehen wir durch P eine Parallele zu $s(p)$, wodurch sich auf T der Schnittpunkt S ergibt; die Gerade Sp trifft nun den Strahl $s(P)$ im verlangten Punkte Q des Mittelpunktskegelschnittes. Ebenso lässt sich auf dem Strahle $s(p)$ der entsprechende Punkt Q_1 der

Mittelpunktscurve construiren, wenn wir durch p eine Parallele zu $z(P)$ ziehen und sie bis zu ihrem Schnittpunkte S_1 mit T verfolgen, hierauf den Strahl $z(p)$ mit der Geraden S_1P schneiden.

Unabhängig von dem Charakter der T-involution ist jedoch die Construction mit Hilfe des polaren Kreises, welche sich in folgender Weise ausführen lässt. Nennen wir g die dem polaren Kreise entsprechende Gerade, so lässt sich in bekannter Weise zu einem jeden Punkte p derselben der im Kegelschnittbüschel conjugirte P auf der Kreislinie aufsuchen. Wir ziehen nun durch P eine Parallele zu $z(p)$ bis zu ihrem Schnitte S mit T, worauf $\overline{pS}$ den Strahl $z(P)$ in dem verlangten Punkte Q des Mittelpunktskegelschnittes trifft. Oder wir ziehen durch p eine Parallele zu $z(P)$ bis zum Schnitte S_1 mit T, worauf $\overline{PS_1}$ auf $z(p)$ den Punkt Q_1 der Mittelpunktscurve bestimmt. Der Punkt Q ist dem unendlich fernen auf dem Strahle $z(p)$, und Q_1 jenem auf $z(P)$ conjugirt, und wenn wir durch den Punkt Q oder Q_1 eine Parallele zum Strahle $z(p)$ resp. $z(P)$ ziehen, so schneiden die einzelnen Büschelkegelschnitte auf derselben Strecken ab, welche in Q resp. Q_1 ihren gemeinsamen Halbirungspunkt besitzen, so dass also die Schnittpunkte jedes Büschelkegelschnittes mit der so gezogenen Geraden in Bezug auf Q resp. Q_1 symmetrisch liegen.

II) Wie wir gleich im Anfange bemerkt haben, wird jeder einzelne Büschelkegelschnitt durch ein besonderes Punktepaar der T-involution charakterisirt. Ist P und P' ein solches, und stellen wir uns die Aufgabe, das Centrum des so bestimmten Büschelkegelschnittes aufzusuchen, so haben wir zu den drei Punkten P, P', ζ', wie auch zu P, P', z' den vierten harmonischen Punkt S resp. S' aufzusuchen; die Strahlen $\omega(S)$ und $o(S')$ treffen sich in dem gesuchten Mittelpunkte. Diese Construction lässt sich mit Leichtigkeit auf einem willkürlichen, am besten durch $z = \zeta$ führenden Kreise durchführen; ihre Richtigkeit ergibt sich unmittelbar aus den im 3. Abschnitte gemachten Entwicklungen.

Umgekehrt: Haben wir für einen gegebenen Punkt Q der Mittelpunktscurve den entsprechenden Büschelkegelschnitt, also das ihn charakterisirende Punktepaar P und P' der T-involution zu construiren, so bringen wir die Strahlen $\omega(Q)$ und $o(Q)$ mit T zum Schnitt, wodurch dort das Punktepaar S und S' erzeugt wird, das bekanntlich der T-involution zugehört. Wir haben nun jenes involutorische Punktepaar P und P' auf T zu suchen, welches sowohl durch z' und S', als auch durch ζ' und S' harmonisch getrennt wird. Führen wir die Construction mit Hilfe eines durch $z = \zeta$ führenden Kreises durch, auf welchem wir die Schnittpunkte der Träger t und τ mit t' und τ', die Schnittpunkte der Strahlen $z(S)$ und $z(S')$ mit 1

und $1'$ bezeichnen, und construiren wir die Schnittpunkte σ und σ' der Kreistangenten in den Punktepaaren 1 und τ', $1'$ und t', so trifft die Gerade $\overline{\sigma\sigma'}$ den Kreis in zwei solchen — reellen oder imaginären — Punkten π und π', welche, aus $s = \zeta$ auf den Träger T projicirt, daselbst das gesuchte Punktepaar P und P' liefern. Demnach können die Punkte π und π', folglich auch P und P' und gleichzeitig der Büschelkegelschnitt mit dem gegebenen Centrum Q imaginär werden, woraus ersichtlich ist, dass die Mittelpunktscurve auch die Centra der imaginären Büschelkegelschnitte — bei hyperbolischen T-involutionen — enthält. Davon können wir uns direct überzeugen, wenn wir die Rollen der involutorischen Punkte S und S' vertauschen und das Punktepaar $\Sigma'(=S)$ und $\Sigma(=S')$ betrachten. Diesmal geschieht der Schnitt der Strahlen $o(\Sigma')$ und $\omega(\Sigma)$ in einem anderen Punkte Q_1 der Mittelpunktscurve; dieser Punkt ist somit das Centrum eines anderen Büschelkegelschnittes, und wir überzeugen uns leicht, dass er in Bezug auf Q auf der entgegengesetzten Seite der Geraden T liegen wird. An Stelle des vorigen Punktepaares 1 und $1'$ tritt nun $I(=1')$ und $I'(=1)$, und es wird diesmal die Gerade $\overline{\sigma\sigma'}$ an dem Hilfskreise vorübergehen. Somit sind π und π', P und P', und auch der Büschelkegelschnitt imaginär. Es lässt sich nun ohne Schwierigkeit auf der Mittelpunktscurve M jener Teil angeben, welcher die Mittelpunkte der imaginären Kegelschnitte des Büschels enthält; wie man sich leicht überzeugt, wird derselbe durch die reellen Doppelelemente D_1 und D_2 der T-involution begrenzt.

12. Ziehen wir durch die Punkte o und ω Parallele zu den Trägern τ und t, so treffen dieselben T in zwei entsprechenden Punktepaaren; denn sie schneiden auf t und τ die zugeordneten Punktepaare o und τ_∞, t_∞ und ω heraus. In Folge dessen liegt ihr Schnittpunkt Ω auf der Mittelpunktscurve M. Das feste Dreieck $o\omega\Omega$, welchem der Mittelpunktskegelschnitt umschrieben erscheint, ist für denselben in mancher Hinsicht charakteristisch, wie wir im Folgenden zeigen wollen.

Da die Punktepaare o und t_∞, ω und τ_∞ in Bezug auf jeden Büschelkegelschnitt conjugirt sind, so sind es auch die Punkte Ω und m_∞ (m_∞ ist der unendlich ferne Punkt der Geraden $m = \overline{o\omega O}$); denn wir können Ω als den Schnittpunkt der Geraden $\overline{o\tau_\infty}$ und $\overline{\omega t_\infty}$, hingegen m_∞ als den Schnittpunkt von $\overline{o\omega}$ und $\overline{t_\infty\tau_\infty}$ auffassen. Es entsprechen somit den einzelnen Ecken des Dreiecks $o\omega\Omega$ als conjugirte die unendlich fernen Punkte ihrer Gegenseiten. Wählen wir uns nun einen willkürlichen Punkt Q auf der Mittelpunktscurve, welcher das Centrum des besonderen Büschelkegelschnittes K sei, und verbinden denselben mit den Ecken des Dreiecks $o\omega\Omega$; ziehen

wir ferner durch Q Parallele zu den Seiten des genannten Dreiecks: so fixiren uns diese drei Strahlenpaare die Involution conjugirter Durchmesser von K und zwar entsprechen den Durchmessern, welche mit den Strahlen $Q(o)$, $Q(\omega)$, $Q(\Omega)$ zusammenfallen, jene, die mit den Gegenseiten $\overline{\omega\Omega}$, $\overline{\Omega o}$, $\overline{o\omega}$ des Dreiecks parallel sind. Mit Hilfe des Dreiecks $o\omega\Omega$ können wir somit die Involution conjugirter Durchmesser jedes Büschelkegelschnittes, dessen Centrum Q wir kennen, construiren und beurteilen.

Verlängern wir die einzelnen Dreieckseiten beiderseits ins Unendliche, so zerlegen wir die ganze Ebene in sieben ungleiche Teile. Wir bezeichnen den Ebenenteil im Inneren des Dreiecks $o\omega\Omega$ mit (e); ferner jene drei Teile der Ebene, welche mit (e) blos an den Ecken o, ω, Ω zusammenhängen, mit (e_1), (e_2), (e_3), schliesslich die übrigen drei Flächen, welche sich an das Dreieck $o\omega\Omega$ längs der Seiten $\overline{\omega\Omega}$, $\overline{\Omega o}$, $\overline{o\omega}$ anschliessen, mit (h_1), (h_2) und (h_3); nun überzeugen wir uns leicht, dass die Involution conjugirter Durchmesser stets hyperbolisch resp. elliptisch sein wird, wenn das Centrum Q des entsprechenden Büschelkegelschnittes in die Räume (h_1), (h_2), (h_3) resp. (e), (e_1), (e_2), (e_3) fällt. Es bietet uns somit das Dreieck $o\omega\Omega$ ein Mittel an die Hand, aus der Lage des Centrums eines Büschelkegelschnittes auf seine Art zu schliessen.

Somit werden in einem Büschel, dessen Mittelpunktscurve M eine Ellipse ist, nur Hyperbeln vorkommen, da die Ellipse M nur die hyperbolischen Teile der Ebene durchläuft. Ist hingegen M eine Hyperbel, so durchläuft ein Ast stets nur elliptische, der andere nur hyperbolische Ebenenteile; demnach erfüllen die Centra der Ellipsen und der Hyperbeln je einen besonderen Ast der Hyperbel M und so wie die beiden Parabeln des Büschels die von Ellipsen und Hyperbeln erfüllten Teile der Ebene trennen, so trennen analog auch die beiden Parabelcentra — die Asymptotenpunkte von M — den Ellipsen- und den Hyperbelast des Mittelpunktskegelschnittes.

Die Doppelpunkte D_1 und D_2 der T-involution werden somit — als unendlich kleine Ellipsen des Büschels — auf dem Ellipsenaste liegen; in Folge dessen befinden sich auch die Mittelpunkte der imaginären Kegelschnitte, welche bekanntlich auf dem von D_1 und D_2 begrenzten Teile der Mittelpunktscurve liegen, stets auf ihrem Ellipsenaste.

Wird schliesslich der Mittelpunktskegelschnitt eine gleichseitige Hyperbel, so geht derselbe auch durch den Höhenpunkt H des Dreiecks $o\omega\Omega$; der Büschelkegelschnitt, dessen Centrum nach H fällt, ist ein Kreis, denn die Involution seiner conjugirten Durchmesser ist circular (Ho senkrecht auf $\omega\Omega$, $H\omega$ senkrecht auf Ωo, $H\Omega$ senkrecht auf $o\omega$).

Jägerndorf (österr. Schlesien), 17. Jänner 1882.

XXVI.

Volumes et Surfaces de deux corps de révolution.

Par

Georges Dostor.

---

1. Dans ces Archives (T. LXVII, page 254), nous avons donné les expressions des volumes, qui sont engendrés par la révolution, autour du diamètre d'un demi-cercle, des deux triangles mixtilignes, compris entre ce diamètre, une tangente issue d'un point du même diamètre prolongé et les deux arcs du demi-cercle, qui sont limités au point de contact de la tangente.

On peut arriver à ce résultat d'une manière plus simple et plus rapide, et même obtenir des expressions différentes de celles que nous avions trouvées.

2. **Théorème.** D'un point S (Fig. 1), extérieur à un cercle O, on mène à ce cercle la tangente SA et au centre la sécante SO, qui coupe la circonférence en B et C. Si l'on fait tourner la figure autour de SO, les triangles mixtilignes $SAMB$ et $SANC$ engendrent des volumes, qui sont équivalents aux cônes ayant pour hauteur commune la distance SO et pour rayons de base les projections BD et CD des arcs générateurs AMB et ANC sur la sécante SO;

c'est-à-dire que

$$\text{vol.}\, SAMB = \tfrac{1}{3}\pi\overline{BD}^2 . SO,$$
$$\text{vol.}\, SANC = \tfrac{1}{3}\pi\overline{CD}^2 . SO.$$

En effet, nous avons évidemment

$$\text{vol.}\,SAMB = \text{vol.}\,SAO + \text{vol.}\,ABO,$$
$$\text{vol.}\,SANC = \text{vol.}\,SAO - \text{vol.}\,ACO;$$

ou

$$\text{vol.}\,SAMB = \tfrac{1}{3}\pi\overline{AD}^2.SO + \tfrac{2}{3}\pi\overline{AO}^2.BD,$$
$$\text{vol.}\,SANC = \tfrac{1}{3}\pi\overline{AD}^2.SO - \tfrac{2}{3}\pi\overline{AO}^2.CD.$$

Comme les triangles rectangles ABC et SAO nous donnent

$$\overline{AD}^2 = BD.CD \text{ et } \overline{AO}^2 = SO.OD,$$

il nous vient

$$\text{vol.}\,SAMB = \tfrac{1}{3}\pi(BD.CD.SO + 2SO.OD.BD),$$
$$\text{vol.}\,SANC = \tfrac{1}{3}\pi(BD.CD.SO - 2SO.OD.CD);$$

ou

$$\text{vol.}\,SAMB = \tfrac{1}{3}\pi BD.SO(CD + 2OD),$$
$$\text{vol.}\,SANC = \tfrac{1}{3}\pi CD.SO(BD - 2OD).$$

Mais il est facile de voir que

$$CD + 2OD = OD + CD + OD = OC + OD = BD,$$
$$BD - 2OD = BD - OD - OD = OB - OD = CD;$$

donc on trouve que

$$\text{(I)} \qquad \text{vol.}\,SAMB = \tfrac{1}{3}\pi\overline{BD}^2.SO, \quad \text{vol.}\,SANC = \tfrac{1}{3}\pi\overline{CD}^2.SO.$$

3. **Corollaire.** On en conclut que

$$\frac{\text{vol.}\,SAMB}{\text{vol.}\,SANC} = \frac{\overline{BD}^2}{\overline{CD}^2} = \frac{\overline{AB}^4}{\overline{AC}^4}.$$

4. Les expressions (I) peuvent se transformer. Le triangle rectangle SAO nous donne

$$\overline{AO}^2 = SO.DO, \text{ ou } \frac{AO}{DO} = \frac{SO}{AO};$$

nous en tirons

$$\frac{AO}{DO} = \frac{SO + AO}{AO + DO} = \frac{SB}{BD},$$

$$\frac{AO}{DO} = \frac{SO - AO}{AO - DO} = \frac{SC}{CD};$$

et par suite

$$BD = \frac{SB.DO}{AO}, \qquad CD = \frac{SC.DO}{AO}.$$

Elevant au carré et remplaçant $\overline{AO}^2$ par $SO.DO$, nous obtenons, en simplificant,

$$\overline{BD}^2 = \frac{\overline{SB}^2.OD}{SO}, \quad \overline{CD}^2 = \frac{\overline{SC}^2.OD}{SO}.$$

Nous avons ainsi

$$\overline{BD}^2.SO = \overline{SB}^2.OD, \quad \overline{CD}^2.SO = \overline{SC}^2.OD$$

et en substituant dans les formules (I)

$$\text{(II)} \quad \text{vol.}\,SAMB = \tfrac{1}{3}\pi\overline{SB}^2.OD, \quad \text{vol.}\,SANC = \tfrac{1}{3}\pi\overline{SC}^2.OD.$$

Donc les volumes engendrées sont aussi équivalents aux cônes ayant pour rayons de base les deux segments SB et SC de la sécante, et pour hauteur commune la projection OD du rayon de contact OA sur cette sécante.

5. Les volumes précédents peuvent aussi s'obtenir en multipliant les surfaces que décrivent les lignes mixtes

$$SA + AMB \quad \text{et} \quad SA - ANC$$

par le tiers du rayon OA de la sphère engendré par le demi-cercle $OBAC$.

Car on a

$$\begin{aligned}
\text{vol.}\,SAO &= \text{surf.}\,SA \times \tfrac{1}{3}OA,\\
\text{vol.}\,OAMB &= \text{surf.}\,AMB \times \tfrac{1}{3}OA,\\
\text{vol.}\,OANC &= \text{surf.}\,ANC \times \tfrac{1}{3}OA;
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
\text{vol.}\,SAMB &= \text{surf.}\,(SA + AMB) \times \tfrac{1}{3}OA,\\
\text{vol.}\,SANC &= \text{surf.}\,(SA - ANC) \times \tfrac{1}{3}OA.
\end{aligned}$$

6. On en conclut que

$$\text{II)} \quad \left\{\begin{aligned}
\text{surf.}\,(SA + AMB) &= \pi\frac{\overline{SB}^2.OD}{OA},\\
\text{surf.}\,(SA - ANC) &= \pi\frac{\overline{SC}^2.OD}{OA}.
\end{aligned}\right.$$

7. Ces derniers résultats peuvent se calculer directement.

En effet, puisque la similitude des deux triangles SAD et OAD donne

$$\frac{AD}{OD} = \frac{SA}{OA},$$

d'où

$$AD = \frac{SA \cdot OD}{OA},$$

il vient

$$\text{surf.}\, SA = \pi SA \cdot AD = \frac{\pi \overline{SA}^2 \cdot OD}{OA} = \frac{\pi SB \cdot SC \cdot OD}{OA}.$$

Remplaçant d'abord SC par $SB - 2OA$, puis SB par $SC + 2OA$, on trouve que

$$\text{surf.}\, SA = \frac{\pi \overline{SB}^2 \cdot OD}{OA} - 2\pi SB \cdot OD,$$

$$\text{surf.}\, SA = \frac{\pi \overline{SC}^2 \cdot OD}{OA} + 2\pi SC \cdot OD.$$

On a ensuite

$$\text{surf.}\, AMB = 2\pi OA \cdot BD = 2\pi OB \cdot DB,$$
$$\text{surf.}\, ANC = 2\pi OA \cdot CD = 2\pi OC \cdot DC;$$

et, comme la division harmonique de la droite SB donne

$$\frac{SB}{DB} = \frac{SC}{DC} = \frac{SB - SC}{DB - DC} = \frac{2OB}{2OD} = \frac{OB}{OD},$$

d'où l'on tire

$$SB \cdot OD = OB \cdot DB, \quad SC \cdot OD = OC \cdot DC,$$

on voit que

$$\text{surf.}\, AB + \text{surf.}\, AMB = \frac{\pi \overline{SB}^2 \cdot OD}{OA},$$

$$\text{surf.}\, AC - \text{surf.}\, ANC = \frac{\pi \overline{SC}^2 \cdot OD}{OA}.$$

XXVII.

Miscellen.

1.

Ueber eine Eigenschaft des vollständigen Vierecks.

Ein bekannter Satz sagt aus, dass die drei Geraden, welche die Mitten je zweier Gegenseiten eines vollständigen Vierseits, dessen Diagonalen als ein drittes Paar von Gegenseiten angesehen werden, verbinden, sich in einem Punkte schneiden.

Dieser Satz ist ein specieller Fall folgenden allgemeineren Satzes (s. d. Figur):

I. „Eine Gerade g begegne den Seiten eines vollständigen Vier-„ecks $ABCD$ in den Punkten P_1P_3, P_2P_4, P_5P_6. Bezeichnet man „auf diesen Seiten die den Schnittpunkten von g in Bezug auf je „zwei Ecken des Vierecks zugeordneten harmonischen Punkte mit „$\Pi_1\Pi_3$, $\Pi_2\Pi_4$, $\Pi_5\Pi_6$ und verbindet die auf den Gegenseiten liegenden „Punkte durch die Geraden $\Pi_1\Pi_3$, $\Pi_2\Pi_4$, $\Pi_5\Pi_6$, so schneiden sich „diese in **einem** Punkte".

Beweis: Da P_1, P_2, P_3, P_4 auf gerader Linie liegen, so ist

$$\frac{P_1A}{DP_1}\cdot\frac{P_2B}{AP_2}\cdot\frac{P_3C}{BP_3}\cdot\frac{P_4D}{CP_4}=1,$$

und weil nun $P_1A\Pi_1D$, $P_2B\Pi_2A$, $P_3C\Pi_3B$ und $P_4D\Pi_4C$ harmonische Punkte sind; so muss auch

$$\frac{\Pi_1A}{D\Pi_1}\cdot\frac{\Pi_2B}{A\Pi_2}\cdot\frac{\Pi_3C}{B\Pi_3}\cdot\frac{\Pi_4D}{C\Pi_4}=1 \quad \text{sein.}$$

Diese Bedingung sagt aber aus, dass die Seiten des Vierecks $\Pi_1\Pi_2\Pi_3\Pi_4$ sich auf den Diagonalen von $ABCD$ schneiden. Die Schnittpunkte müssen aber auch auf der Geraden g liegen d. h. $\Pi_2\Pi_1$ und $\Pi_3\Pi_4$ schneiden sich in P_6 und $\Pi_2\Pi_3$ und $\Pi_1\Pi_4$ schneiden sich in P_5. Denn da

$$\frac{AP_1}{P_1D} \cdot \frac{DP_6}{P_6B} \cdot \frac{BP_2}{P_2A} = -1$$

ist, so ist auch:

$$\frac{A\Pi_1}{\Pi_1D} \cdot \frac{DP_6}{P_6B} \cdot \frac{B\Pi_2}{\Pi_2A} = -1$$

d. h. $\Pi_1\Pi_2$ und P_6 liegen auf gerader Linie.

Ist nun M der Schnittpunkt von $\Pi_1\Pi_3$ und $\Pi_2\Pi_4$ und ist S der Schnittpunkt von $\Pi_2\Pi_4$ mit g, so sind die Punkte M und S in Bezug auf die Punkte Π_2 und Π_4 einander harmonisch zugeordnet. Schneiden sich nun $\Pi_2\Pi_4$ und $\Pi_5\Pi_6$ im Punkte M', so kann man ganz ebenso zeigen, dass M' und S in Bezug auf Π_2 und Π_4 einander harmonisch zugeordnet sind. Also fallen die Punkte M und M' zusammen, und es ist gezeigt, dass die drei Geraden $\Pi_1\Pi_3$, $\Pi_2\Pi_4$ und $\Pi_5\Pi_6$ sich in einem Punkte schneiden.

Der reciproke Satz zu I. lautet folgendermassen:

II. „Ein beliebiger Punkt der Ebene sei mit den Ecken und „Nebenecken eines vollständigen Vierseits durch Strahlen verbunden. „Bezeichnet man die nach Gegenpunkten gehenden Strahlen als ent- „sprechende und construirt zu jedem Strahl den vierten harmonischen „Strahl in Bezug auf die Vierecksseiten, welche sich im zugehörigen „Eckpunkt schneiden, so liegen die drei Schnittpunkte je zweier ent- „sprechender vierten harmonischen Strahlen auf einer Geraden.“

Ist in Satz I. die Gerade g die unendlich ferne Gerade und in Satz II. der beliebige Punkt der unendlich ferne Punkt einer beliebigen Geraden, so ergeben sich aus I. und II. folgende beiden bekannten Sätze:

„Die drei Geraden, welche die Mitten M zweier Gegenseiten im vollständigen Viereck verbinden, schneiden sich in einem Punkte“

und

„Eine Transversale schneidet ein vollständiges Vierseit. Verbindet man je zwei gegenüberliegende Eckpunkte mit den Mittelpunkten der Segmente, welche die die Eckpunkte erzeugenden Vierecksseiten auf der Transversale bestimmen, durch Gerade, so liegen die Schnittpunkte der sich entsprechenden Geraden auf einer geraden Linie.“

Ist aber die Transversale die unendlich entfernte Gerade, so ergiebt sich folgender, soweit mir bekannt, ebenso wie I. und II. neuer Satz:

III. „Bringt man im vollständigen Vierseit die Halbirungslinien „je zweier innerer gegenüber liegender Winkel und der Supplemente „der dritten inneren gegenüberliegenden Winkel oder die drei Halbi„rungslinien der Supplemente der drei inneren gegenüber liegenden „Winkel zum Schnitt, so liegen jedesmal die drei Schnittpunkte der „entsprechenden Halbirungslinien auf gerader Linie. Die sechs „Schnittpunkte sind also Ecken und Nebenecken eines neuen voll„ständigen Vierecks."

Einen directen Beweis des letzteren Satzes kann man auch unschwer finden mit Hülfe des bekannten Statzes, dass die Halbirungslinien der vier Winkel eines Vierseits ein neues Vierseit bilden, dessen Diagonalen durch die Nebenecken des ersteren gehen.

Strassburg im Els.

Dr. Arnold Sachse.

2.

Ueber die Darstellung der Bernoulli'schen und Euler'schen Zahlen durch Determinanten.

Die Darstellung einer Bernoulli'schen Zahl durch eine Determinante ist zuerst von Herrn Siacci gegeben worden [1]). Herr Siacci geht von einer speciellen Determinante aus. Durch Benutzung des fundamentalen Satzes der Determinantentheorie, dass eine Determinante verschwindet, wenn die Elemente einer Zeile durch die einer andern ersetzt werden, erhält er für die Unterdeterminanten erster Ordnung ein System von Gleichungen, aus denen erkennbar ist, dass diese Unterdeterminanten den Bernoulli'schen Zahlen proportional sind. Eine directe Ableitung der bemerkten Darstellung hat zuerst Herr Lucas gegeben [2]), indem er seinen Deductionen die Differenzengleichung

---

1) Sull' uso dei determinanti delle potenze intere dei numeri naturali. Annali di Matematica. Ser. I. Tomo VII. 1865.

2) Sur les sommes des puissances semblables des nombres entiers. Nouvelles Annales de Mathématiques rédigées par M. M. Gerono et Brisse. Ser. II. Tome XVI. 1877.

$$\psi(x+1)-\psi(x)=f(x)$$

zu Grunde legt. Im Folgenden gebe ich eine Darstellung der Euler'schen Zahlen durch Determinanten, indem ich die Theorie dieser Zahlen auf die Differenzengleichung

$$\psi(x+1)+\psi(x-1)=f(x)$$

gründe. Alsdann soll gezeigt werden, wie man die Darstellung der Bernoulli'schen und Euler'schen Zahlen durch Determinanten benutzen kann, um eine Reihe von Recursionsformeln für dieselben abzuleiten.

I.

Zwischen $\psi(x)$ und $f(x)$ bestehe die Differenzengleichung:

$$\psi(x+1)+\psi(x-1)=f(x).$$

Ist $f(x)$ eine ganze rationale Function von x vom Grade $2r+1$, und verstehen wir unter $\psi(x)$ die particuläre von Constanten und periodischen Functionen freie Lösung der Differenzengleichung, so muss diese die Gestalt haben:

$$\psi(x)=\sum_{\lambda=0}^{2r} a_{2r-\lambda+1}\, x^{2r-\lambda+1}.$$

Ist $f(x)$ speciell $=x^{2r+1}$ und wählen wir die Bezeichnung:

$$\binom{\lambda}{r-\lambda}=\frac{r!}{(r-\lambda)!\,\lambda!}=\frac{Fc(r-\lambda+1)\,Fc(\lambda+1)}{Fc(r+1)}$$

so ergiebt die Vergleichung der Coefficienten der Potenzen von x in der Differenzengleichung $2r+1$ lineare Gleichungen für die Grössen $a_1\, a_2\, \ldots\, a_{2r+1}$. Aus denselben folgt:

$$a_{2r-2\lambda}=0 \qquad \lambda=0,1,\ldots r-1.$$

$$2a_{2r-2\lambda+1}=(-1)^{\lambda}\frac{Fc(2r-2\lambda+2)}{Fc(2r+2)}\begin{vmatrix} Fc(3) & Fc(1) & & 0 & 0\\ Fc(5) & Fc(3) & . & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ Fc(2\lambda-3) & Fc(2\lambda-5) & \ldots & Fc(1) & 0\\ Fc(2\lambda-1) & Fc(2\lambda-3) & \ldots & Fc(3) & Fc(1)\\ Fc(2\lambda+1) & Fc(2\lambda-1) & \ldots & Fc(5) & Fc(3)\end{vmatrix}$$

$$\lambda=0,1,\ldots\mu$$

Bedeutet x eine gerade Zahl, so kann man andererseits aus der Differenzengleichung ableiten:

$$(-1)^{\frac{x-2}{2}}\psi(x)=\sum_{\mu=0}^{\frac{x-2}{2}}(-1)^{\mu}(2\mu+1)^{2r+1}=\tau(x,2r+1)$$

Nun ist aber bekanntlich

$$2(-1)^r + \frac{x-2}{2}\,\tau(x, 2r+1) = \sum_{\lambda=0}^{r}(-1)^{r-\lambda}\binom{2r+1}{2\lambda}E_\lambda x^{2r-2\lambda+1},$$

wo $E_1 E_2 \ldots E_r$ die auf einander folgenden Eulerschen Zahlen bedeuten und E_0 den Wert 1 haben soll. Also ist

$$2(-1)^r\psi(x) = \sum_{\lambda=0}^{r}(-1)^{r-\lambda}\binom{2r+1}{2\lambda}E_\lambda x^{2r-2\lambda+1}$$

und demnach

$$E_\lambda = (-1)^\lambda \frac{Fc(2r+2)}{Fc(2r-2\lambda+2)Fc(2\lambda+1)}\, 2a_{2r-2\lambda+1}$$

und

$$Fc(2\lambda+1)\,E_\lambda = \begin{vmatrix} Fc(3) & Fc(1) & 0 & \ldots & 0 \\ Fc(5) & Fc(3) & Fc(1) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ Fc(2\lambda-3) & Fc(2\lambda-5) & \ldots & Fc(1) & 0 \\ Fc(2\lambda-1) & Fc(2\lambda-1) & \ldots & Fc(3) & Fc(1) \\ Fc(2\lambda+1) & Fc(2\lambda-1) & \ldots & Fc(5) & Fc(3) \end{vmatrix}$$

II.

Die Formel von Herrn Siacci lautet:

$$(-1)^{\lambda-1}Fc(2\lambda+1)B_\lambda = \begin{vmatrix} Fc(3) & Fc(2) & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ Fc(4) & Fc(3) & Fc(2) & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ Fc(2\lambda) & Fc(2\lambda-1) & & \ldots & Fc(2) & 0 \\ Fc(2\lambda+1) & Fc(2\lambda) & & \ldots & Fc(3) & Fc(2) \\ Fc(2\lambda+2) & Fc(2\lambda+1) & & \ldots & Fc(4) & Fc(3) \end{vmatrix}$$

wo $B_1 B_2 \ldots B_\lambda$ die auf einander folgenden Bernoulli'schen Zahlen bedeuten. Herr Lucas hat dieselbe dahin vervollständigt, dass

$$\begin{vmatrix} Fc(3) & Fc(2) & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ Fc(4) & Fc(3) & Fc(2) & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ Fc(\varrho) & Fc(\varrho-1) & & \ldots & Fc(2) & 0 \\ Fc(\varrho+1) & Fc(\varrho) & & \ldots & Fc(3) & Fc(2) \\ Fc(\varrho+2) & Fc(\varrho+1) & & \ldots & Fc(4) & Fc(3) \end{vmatrix} \begin{array}{l} = (-1)^{\frac{\varrho-2}{2}} Fc(\varrho+1) B_{\frac{\varrho}{2}} \\ \qquad \text{für } \varrho = 2, 4, 6 \ldots \\ = 0 \\ \qquad \text{für } \varrho = 3, 5, 7 \ldots \text{ ist.} \end{array}$$

Die bekannten beiden Recursionsformeln für die Bernoulli'schen Zahlen:

$$1)\quad \sum_{\mu=1}^{\lambda}(-1)^{\mu}\binom{2\lambda+1}{2\mu}B_{\mu}+\frac{2\lambda-1}{2}=0$$

und

$$2)\quad \sum_{\mu=1}^{\lambda}(-1)^{\mu}\binom{2\lambda+2}{2\mu}B_{\mu}+\lambda=0$$

entsprechen einander als Fundamentalformeln in sofern als die auf der Differenzengleichung

$$\psi(x+1)-\psi(x)=x^{n}$$

abgeleitete Relation $\psi(1)=0$ für ein gerades n in 1), für ein ungerades n in 2) übergeht. Ein derartiges Entsprechen dieser Formeln wird sich auch bei ihrer Ableitung aus obiger Determinante zeigen.

Entwickelt man die Determinante nach den Elementen der ersten Horizontalreihe, die neu auftretende Determinante in derselben Weise u. s. f., so erhält man ein System von Recursionsformeln, welches erlaubt, die λte Bernoulli'sche Zahl durch die ϱ vorher gehenden auszudrücken. Die allgemeine Formel lautet:

$$(2\lambda+1)B_{\lambda}=\sum_{\mu=\lambda-\varrho}^{\lambda-1}(-1)^{\lambda+\mu+1}\binom{2\lambda+1}{2\mu}B_{\mu}+(-1)^{\lambda-1}\times$$

$$\begin{vmatrix} Fc(2\varrho+3) & Fc(2) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ Fc(2\varrho+4) & Fc(3) & Fc(2) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ Fc(2\lambda) & Fc(2\lambda-2\varrho-1) & & \dots & Fc(2) & 0 \\ Fc(2\lambda+1) & Fc(2\lambda-2\varrho) & & \dots & Fc(3) & Fc(2) \\ Fc(2\lambda+2) & Fc(2\lambda-2\varrho+1) & & \dots & Fc(4) & Fc(3) \end{vmatrix}$$

Für $\varrho=\lambda-1$ geht dieselbe in die Formel 1) über. Entwicket man die Determinante nach den Elementen der ersten Verticalreihel so ergiebt sich wieder Formel 1). Setzt man in der so entwickelten Determinante statt der Elemente der ersten Verticalreihe die einer andern ein, so verschwindet die Determinante. Die daraus entstehende Formel wird stets identisch mit 1), sobald man eine ungerade Verticalreihe einsetzt, und identisch mit 2), sobald man eine gerade Verticalreihe einsetzt. Entwickelt man allgemein nach den Elementen. einer ungeraden Verticalreihe, so ergiebt sich Formel 1), und entwickelt man nach den Elementen einer eeraden, so folgt Formel 2)-

Beliebig viel neue Recursionsformeln kann man finden, indem man die Elemente mehrerer Reihen zu Aggregaten vereinigt. Subtrahirt man z. B. die Elemente der 2ten Verticalreihe von denen der ersten und entwickelt die Determinante nach den Elementen der neuen ersten Verticalreihe, so ergiebt sich die Formel:

$$(2\lambda+1)B_\lambda = \sum_{\mu=1}^{\lambda-1}(-1)^{\lambda-\mu}(2\lambda-2\mu)\binom{2\lambda+1}{2\mu}B_\mu+(-1)^\mu\frac{4\mu^2-4\mu-1}{2}$$

Wird die Determinante nach den Unterdeterminanten 2ter Ordnung entwickelt, so folgf:

$$2(2\lambda+1)B_\lambda = \sum_{\mu=1}^{\lambda-1}(-1)^{\lambda-\mu}(2\lambda-2\mu-1)\binom{2\lambda+1}{2\mu}B_\mu+(-1)^\mu(2\lambda^2-3\lambda)$$

Allgemein kann man die Determinante nach den Unterdeterminanten der 2ϱten oder $(2\varrho-1)$ten Ordnung entwickeln. Es ergeben sich dann Formeln, welche B_λ durch die $(\lambda-\varrho)$ ersten Bernoulli'schen Zahlen ausdrücken. Dieselben sollen jedoch hier wegen der complicirten Determinantenausdrücke nicht hingeschrieben werden.

Entwickelt man die Determinante durch welche E_λ dargestellt wird, successive nach den Elementen der Horizontalreihen, so findet man:

$$E_\lambda = \sum_{\mu=1}^{\varrho}(-1)^{\mu-1}\binom{2\lambda}{2\mu}E_{\lambda-\mu}+(-1)^\varrho \times$$

$$\begin{vmatrix} Fc(2\varrho+3) & Fc(1) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ Fc(2\varrho+5) & Fc(3) & Fc(1) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ Fc(2\lambda-1) & Fc(2\lambda-2\varrho-3) & & \dots & Fc(1) & 0 \\ Fc(2\lambda) & Fc(2\lambda-2\varrho-2) & & \dots & Fc(3) & Fc(1) \\ Fc(2\lambda+1) & Fc(2\lambda-2\varrho-1) & & \dots & Fc(5) & Fc(3) \end{vmatrix}$$

Für $\varrho = \lambda-1$ ergiebt sich daraus die fundamentale Recursionsformel:

$$\sum_{\mu=0}^{\lambda}(-1)^\mu\binom{2\lambda}{2\mu}E_\mu = 0,$$

welche man stets wieder erhält, wenn man nach den Elementen irgend einer Verticalreihe entwickelt, oder die Elemente irgend einer andern für die der erst gewählten substituirt. Beliebig viele Recursionsformeln kann man wieder erhalten, indem man die Elemente mehrerer Reihen zu Aggregaten verbindet. So ergiebt sich nach Subtraction der Elemente der zweiten Verticalreihe von denen der ersten durch Entwicklung nach den Elementen der neuen ersten Verticalreihe:

$$\sum_{\mu=0}^{\lambda}(-1)^\mu(4\mu^2-2\mu-1)\binom{2\lambda}{2\mu}E_{\lambda-\mu} = 0$$

Entwickelt man die Determinante nach den Unterdeterminanten der 2ten Ordnung, so erhält man:

$$E_\lambda = \sum_{\mu=2}^{\lambda}(-1)^\mu(2\mu^2-\mu-1)\binom{2\lambda}{2\mu}E_{\lambda-\mu}$$

So kann man auch die Determinante nach den Unterdeterminanten einer beliebigen ϱ ten Ordnung entwickeln und erhält dann eine Formel, welche E_λ durch die $(\lambda-\varrho)$ ersten Euler'schen Zahlen ausdrückt, welche aber wegen der complicirten Determinantenausdrücke hier ebenfalls nicht hingeschrieben worden ist.

Strassburg im Els., im Juli 1882.

Dr. Arnold Sachse.

3.

Ein Algorithmus zur Behandlung quadratischer Formen *).

Geht die binäre quadratische Form (a_{n-1}, b_{n-1}, a_n), deren erster Coefficient positiv, deren Teiler $\tau = 1$ und deren Determinante $D = b_{n-1}^2 - a_n a_{n-1}$ kein Quadrat sein möge, durch die Aequivalentsubstitution $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \delta \end{pmatrix}$ in die benachbarte Form $(a_n b_n a_{n+1})$ über, so wird der dritte Coefficient a_{n+1}, nachdem b_n bestimmt ist, durch die Formel: $\frac{b_n^2 - D}{a_n}$ oder auch mit Benutzung des 2ten und 4ten Substitutionscoefficienten 1 und δ_n durch die Formel $a_{n-1} + 2b_n\delta_n + a_n\delta_n^2$ erhalten.

Gewöhnlich wendet man die erste an, jedoch ist die zweite, die sich $a_{n+1} = a_{n-1} - \delta_n r_n$ schreiben lässt, nicht nur bei grosszahligen Coefficienten für die numerische Rechnung bequemer, da b_n nicht zum Quadrat erhoben werden darf, sondern sie führt auch auf einen Algorithmus, welcher für die quadratischen Formen eine entsprechende Leichtigkeit der Behandlung erzielt, wie die Kettendivision bei den linearen Diophantischen Gleichungen.

Wird nämlich $a_{n+1} = a_{n-1} - \delta_n r_n$ und $-b_{n-1} = m_n$ gesetzt, so kann $r_n = 2m_n - a_n\delta_n$ als Rest einer Division aufgefasst werden, bei welcher a_n der Divisior und δ_n der Quotient ist: $a_n \left| \begin{array}{c} 2m_n \\ \underline{a_n\delta_n} \\ r_n \end{array} \right| \delta_n$.

---

*) Ein specieller Fall, nämlich die Form: $(1, \lambda, \lambda^2 - D)$ wurde durch die Verwandlung einer Quadratwurzel in einen Kettenbruch behandelt. $[\sqrt{D}]$ hier λ, dort durch a_0 bezeichnet.

Jedoch darf man hiebei, um auf reducirte Formen zu kommen, $2m$ nicht als Dividendus ansehen, sondern nur als Minuendus, denn δ_n in bekannter Weise bestimmt*), wird nicht immer $\left[\frac{2m_n}{a_n}\right]$ d. h. die in $\frac{2m_n}{a_n}$ enthaltene grösste ganze Zahl sein.

Es kann nun aber leicht ein Dividendus ∂_n eingeführt werden, so dass der Quotient $k_n = \left[\frac{\partial_n}{a_n}\right] \pm \varepsilon$ gleich dem im Citate angegebenen δ_n wird, wobei $\varepsilon = 0$ oder 1 ist, und da sich noch aus $-\delta_n = \frac{b_{n-1}+b_n}{a_n}$ oder $\delta_n = \frac{m_n - b_n}{a_n}$ und $r_n = 2m_n - a_n\delta_n$ die Formel $b_n = b_{n-1} + r_n$ ergiebt, so sind die Coefficienten b_n und a_{n+1} durch b_{n-1} und a_n mittelst der Grössen k_n und r_n ausgedrückt. Hiebei wird nun zwar zur Erreichung von b_n ein geringer Umweg gemacht, dafür aber auch a_{n+1} bedeutend schneller erhalten.

Satz über k_n. Wird bei positiver Determinante $\partial_n = m_2 - \lambda$ und $\lambda = [\sqrt{D}]$ gesetzt, so ist $k_n = \left[\frac{\partial_n}{a_n}\right] \pm \varepsilon = \delta_n$; hierin ist $\varepsilon = 0$ wenn $\partial_n \overset{=}{<} 0$. Ist aber ∂_n positiv, so ist $\varepsilon = 1$ und das Zeichen so zu wählen, dass der numerische Wert von k_n erhöht wird.

Setzt man bei negativer Determinante $\partial_n = m_n - \lambda_n$ und $\lambda_n = \left[\frac{a_n}{2}\right]$, so ist $k_n = \left[\frac{\partial_n}{a_n}\right] + \varepsilon = \delta_n$. Hierin ist $\varepsilon = 0$, wenn $\partial_n < 0$. Ist aber wiederum ∂_n positiv, so ist $\varepsilon = +1$. Geht jedoch ∂_a durch a_n dividirt ohne Rest auf (wohin auch der Fall $\partial_n = 0$ gehört), so sind beide Werte für ε nämlich 0 und $+1$ zulässig. Es tritt dann eine Spaltung ein, und sind in diesem Falle also zwei Aequivalentsubstitutionen anzuwenden. (Vgl. a. a. O. § 64. pag. 155. und den Schluss von § 62.: nochmalige Spaltung).

---

*) Vgl. Dirichlet Zahlentheorie h. v. Dedekind § 64. und 76. Um zu reducirten Formen zu gelangen, muss bei positiver Det.

$$\sqrt{D} - (a_n) < b_n \overset{=}{<} [\sqrt{D}],$$

bei negativer Det.

$$(b_n) \overset{=}{<} \frac{a_n}{2}$$

sein, dann wird

$$\delta_n = \frac{-b_{n-1} - b_n}{a_n}.$$

Bevor wir diesen Satz beweisen, wollen wir den Algorithmus, der im Uebrigen für positive und negative Determinanten gleich ist, nur dass bei positiven $\lambda_1 = \lambda_2 \ldots = \lambda_n = \lambda = [\sqrt{D}]$ zu setzen, durch folgendes Schema andeuten. Gegeben ist die Form:

$$\begin{array}{llllll}
 & (& a_0 \quad b_0 \quad a_1), & \text{deren Det.} = D & & \\
 & -\pi_1 & & & & \\
m_1 & & b_0 & & & \\
-\lambda_1 & & & & & \\
\hline
\partial_1 : & a_1 & \left| \begin{array}{c} 2m1 \\ a_1 k_1 \end{array} \right| & k_1 & \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \mu, \\ \nu, \end{array} \\
 & -\pi_2 & r_1 & & & \\
m_2 & & b_1 & & & \\
-\lambda_2 & & & & & \\
\hline
\partial_2 : & a_2 & \left| \begin{array}{c} 2m2 \\ a_2 k_2 \end{array} \right| & k_2 & \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \mu_2 \\ \nu_2 \end{array} \\
 & & r_2 & & & \\
m_3 & & b_2 & & & \\
-\lambda_3 & & & & & \\
\hline
\partial_3 : & a_3 & | \; 2m_3 \; | & k_3. & &
\end{array}$$

Hierin hängt ∂_1 mit $m_1 = -b_0$ auf die angegebene Art zusammen und aus dem Bruche $\partial_1 : a_1$ wird k_1 nach dem erwähnten Satze bestimmt.

Ferner ist:

$$\alpha_1 = 0 \quad \beta_1 = 1$$

$$\gamma_1 = -1 \quad \delta_1 = k_1$$

und

$$b_1 = b_0 + r_1$$

$$a_2 = a_0 - \pi_1$$

wo $\pi_1 = k_1 r_1$ das Product aus Rest und Quotient. Durch die Substitution: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \delta_1 \end{pmatrix}$ geht dann die Form $(a_0\, b_0\, a_1)$ in $(a_1\, b_1\, a_2)$ über. Diese letztere wieder durch $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \delta_2 \end{pmatrix}$ in $(a_2\, b_2\, a_3)$ was durch $k_2 = \delta_2$ schon angedeutet ist. Daher wird sogleich neben die zweite Division die Substitution $\begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix}$ gestellt, durch welche die erste Form $(a_0\, b_0\, a_1)$ in die dritte $(a_2\, b_2\, a_3)$ übergeht.

Um diese zu erhalten, bilde man

$$\mu_1 = \beta_1 k_2$$
$$\nu_1 = \delta_1 k_2$$

dann ist

$$\alpha_2 = -\beta_1 \qquad \beta_2 = \alpha_1 + \mu_1$$
$$\gamma_1 = -\delta_1 \qquad \delta_2 = \gamma_1 + \nu_1.$$

Man fährt nun bei positiver Det. sowohl als auch bei negativer so lange fort, bis eine Division mit einer früheren identisch wird, so dass von da ab die letzten Formen sich periodisch wiederholen. Bei pos. Det. sind diese periodischen Formen zugleich die reducirten. Bei negativer Det. ist mindestens die erste derselben reducirt, die zweite complementär, oder es sind auch beide reducirt (formae ancipites).

Beispiele (mit vollst. Nebenrechnung).

Für pos. Det. wählen wir das Beispiel a. a. O. pag. 182.; $D = 35$.

$$(62 \quad 95 \quad 145); \quad \sqrt{35} = 5, ,..$$

```
 —95
 — 5
 ————
 —100 :  145 | —190 |  0    ( 0  1) 2
        —132 |    0 |       (—1  0) 0
             ————————
               —190

   95            —95
 —  5
 ————
 + 90 :   62 |  190 | 2     (—1  2)  4
         —64 | —124 |       ( 0 —1) —2
             ————————
                 66

 — 29            —29
 —  5
 ————
 + 24 :   13 |   58 | 2     (—2  3) 12
         — 8 |   26 |       ( 1 —2)— 8
             ————————
                 32

 —  3              3
 —  5
 ————
 —  8 :   —2 | —  6 | 4     (—3  10)—20
           0 | —  8 |       ( 2  —7) 14
             ————————
                  2
```

Periode.

— 5   5
— 5
—10 :   5 | —10 | —2 $\begin{pmatrix} -10 & -23 \\ 7 & 16 \end{pmatrix}$ —115
        0 | —10 | + 80
0

— 5   5
— 5
—10 :   —2 | —10 | 5 $\begin{pmatrix} 23 & -125 \\ -16 & 87 \end{pmatrix}$ 250
        0 | —10 | —174
0

5
: | —10 | —2 $\begin{pmatrix} +125 & 272 \\ -87 & -190 \end{pmatrix}$

Bei **negativer Det.** ist die Kenntniss derselben nicht erforderlich.

(121   217   390)
—44

—217   217
—195
—412 :   390 | —434 | —1 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ —2
        —384 | —390 | +2
— 44

—173   173
— 38
—211 :   77 | —346 | —2 $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ —6
        —60 | —154 | 3
—192

19   —19
— 3
+16 :   6 | 38 | 3 $\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ 0
        0 | 18 | 0
20

Periode.

—1   1
—8
—9 :   17 | —2 | 0 $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$ 0
        0 | 0 | 0
—2

1   —1
—3
—2 :   6 | 2 | 0 $\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ 0
        0 | 0 | 0
2

:   17 | 1 —2 | 0 $\begin{pmatrix} -7 & -2 \\ 4 & +1 \end{pmatrix}$

Fügen wir noch das Beispiel a. a. O. pag. 156. für neg. Det. hinzu, wo Spaltung eintritt:

(200 100 51)
—196

—100 100
— 25
—125 : 51 | —200 | —2 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ —1, 2 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ 0, 0
0 | —102 |
— 98

Links:

— 2 2
— 2
— 4 : 4 —4 | —1 $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 0, 0
0 | —4 |
0

Periode.

— 2 2
—25
—27 : 51 | —4 | 0 $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ 0, 0
0 | 0 |
—4

2 —2
— 2
0 : 4 | +4 | 0 od. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ 0, 0
0 | [1]
4.

— 2 2
—25
—27 : 51 | —4 | 0 $\begin{pmatrix} -1 & +1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

Rechts:

2
— 4 : 4 | —4 | 0 $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ 0, 0
0 |
—4

Periode.

2 —2
—25
—23 : 51 | 4 | 0 $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 0, 0
0 |
4

— 2 2
— 2
—4 : 4 | —4 | [—1] oder $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ 0, 0
0 | 0
4

— 2 —2
—25
—23 : 51 | 4 | 0 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

Der eingeklammerte Wert [1] links führt in die Periode rechts und [—1] führt in die Periode links zurück.

Beweis des vorhin angeführten Satzes für k_n.

I. D positiv. $[\sqrt{D}] = \lambda \geqq b_n > \lambda - (a_n)$; $\delta_n = \frac{m_n - b_n}{a_n}$

Der Bruch $\frac{\partial_n}{a_n} = \frac{m_n - \lambda}{a_n}$ ist für negatives a_n grösser oder gleich der ganzen Zahl δ_n und kleiner, als die folgende $\delta_n + 1 = \frac{m_n - b_n - (a_n)}{a_n}$,

denn man kann auf beiden Seiten $\frac{m_n}{a_n}$ weglassen. Besitzt er also an sich einen positiven Wert, d. h. ist ∂_n negativ oder Null, so muss $\left[\frac{\partial_n}{a_n}\right] = \delta_n$ sein, besitzt er einen negativen Wert, d. h. ist ∂_n positiv, so ist $\left[\frac{\partial_n}{a_n}\right] = \delta_n + 1$ oder $\delta_n = \left[\frac{\partial_n}{a_n}\right] - 1 = k_n$. In diesem Falle ist aber $\left[\frac{\partial_n}{a_n}\right]$ eine negative Zahl, also wird der numerische Wert von k_n erhöht. Bei positiven a_n gilt umgekehrt $\delta_n \geqq \frac{\partial_n}{a_n} > \delta_n - 1$, $\delta_{n-1} = \frac{m_n - b_n - a_n}{a_n}$ Ist nun $\partial_n \overset{=}{<} 0$, also auch $\frac{\partial_n}{a_n} \overset{=}{<} 0$, so wird $\left[\frac{\partial_n}{a_n}\right] = \delta_n$. Ist jedoch $\partial_n > 0$, so ist $\left[\frac{\partial_n}{a_n}\right] = \delta_n - 1$ also $\delta_n = \left[\frac{\partial_n}{a_n}\right] + 1 = k_n$ und es wird ebenfalls der numerische Wert von k_n erhöht.

II. D negativ. $\lambda_n = \left[\frac{a_n}{2}\right] > (b_n)$; $\delta_n = \frac{m_n - b_n}{a_n}$; $\partial_n = m_n - \lambda_n$ die Grössen a_n sämmtlich positiv.

$\delta_n = \frac{m_n - b_n}{a_n} > \frac{m_n - \lambda_n}{a_n} > \frac{m_n - b_n - a_n}{a_n} = \delta_n - 1$, weil $\lambda_n < b_n + a_n$, selbst wenn b_n negativ wäre.

Ist also ∂_n negativ, so wird $\left[\frac{\partial_n}{a_n}\right] = \delta_n$.

Ist ∂_n positiv, so wird $\left[\frac{\partial_n}{a_n}\right] = \delta_n - 1$, also $\delta_n = \left[\frac{\partial_n}{a_n}\right] + \varepsilon = k_n$; worin $\varepsilon = +1$.

Geht aber $\frac{\partial_n}{a_n}$ ohne Rest auf, so dass wir $\frac{\partial_n}{a_n} = \left[\frac{\partial_n}{a_n}\right] = g$ setzen können, so folgt aus

$$m_n - b_n = a_n \delta_n \quad \text{und} \quad m_n - \lambda_n = a_n g, \quad \text{dass}$$
$$b_n - \lambda_n = a_n(g - \delta_n) = a_n h.$$

Soll nun $\frac{b_n - \lambda_n}{a_n} = h$ sein, so muss h entweder 0 oder -1 werden, jenachdem $b_n = +\frac{a_n}{2}$ oder $= -\frac{a_n}{2}$ und $\frac{a_n}{2} = \lambda_n$ ist. Hieraus folgt

$$g = \delta_n = k_n \quad \text{oder} \quad \delta_n = g - h = \left[\frac{\partial_n}{a_n}\right] + 1 = k_n.$$

Hiemit ist der Nachweis geführt, dass wir durch den angegebenen Algorithmus in der Tat dieselben δ_n, also auch dieselben Aequivalentsubstitutionen, ohne eine zu übergehen, erhalten, welche man behufs der Auflösung diophantischer Gleichungen 2ten Grades aufstellen kann.

Königsberg i. Pr. d. 15. Mai 1881.

Hermes.

4.

Nachtrag zur Flächentheorie.

In T. LIX. S. 262. sind die Werte der Fundamentalgrössen der Mittelpunktsfläche einer beliebigen Fläche entsprechend den Parametern der Krümmungslinien der Urfläche hergeleitet. Aus diesen Werten ergeben sich unmittelbar zwei bekannte Eigenschaften der Mittelpunktsflächen. Da die Folgerung an jener Stelle nicht ausgesprochen ist, so komme ich hier zur Vervollständigung der Theorie darauf zurück.

Es bezeichneten e, f, g die Coefficienten im Ausdruck des Linienelements

$$\partial s^2 = e\,\partial u^2 + 2f\,\partial u\,\partial v + g\,\partial v^2$$

u, v die Parameter der Krümmungslinien, p, q, r die Richtungscosinus der Normale, F die Grösse

$$F = p\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} + q\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v} + r\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}$$

ϱ_1 denjenigen Krümmungsradius, dessen Endpunkt $(x_1 y_1 z_1)$, wenn man ihn auf die Normale trägt, die in Rede stehende Mittelpunktsfläche erzeugt, der Index 1 die Zugehörigkeit zu dieser Mittelpunktsfläche.

Von den 6 Gleichungen (36) wenden wir die 3 folgenden an:

$$e_1 = \left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial u}\right)^2; \quad f_1 = \frac{\partial \varrho_1}{\partial u}\frac{\partial \varrho_1}{\partial v}; \quad F_1 = 0 \qquad (36)$$

I.

Variirt der Punkt $(x_1 y_1 z_1)$ bei constantem v, so erzeugt er eine Kürzeste. Die Richtungscosinus der Tangente sind proportionirt

$$\frac{\partial x_1}{\partial u}, \quad \frac{\partial y_1}{\partial u}, \quad \frac{\partial z_1}{\partial u}$$

Variirt er in normaler Richtung zur Kürzesten, und sind die Rich-cosinus proportionirt

$$\frac{\partial x_1}{\partial u}+\frac{\partial v}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v}, \quad \frac{\partial y_1}{\partial u}+\frac{\partial v}{\partial u}\frac{\partial y_1}{\partial v}, \quad \frac{\partial z_1}{\partial u}+\frac{\partial v}{\partial u}\frac{\partial z_1}{\partial v}$$

so ist die Bedingung:

$$\frac{\partial x_1}{\partial u}\left(\frac{\partial x_1}{\partial u}+\frac{\partial v}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v}\right)+\frac{\partial y_1}{\partial u}\left(\frac{\partial y_1}{\partial u}+\frac{\partial v}{\partial u}\frac{\partial y_1}{\partial v}\right)+\frac{\partial z_1}{\partial u}\left(\frac{\partial z_1}{\partial u}+\frac{\partial v}{\partial u}\frac{\partial z_1}{\partial v}\right)=0$$

das ist:

$$e_1+f_1\frac{\partial v}{\partial u}=0$$

oder nach (36):

$$\frac{\partial \varrho_1}{\partial u}\partial u+\frac{\partial \varrho_1}{\partial v}\partial v=\partial \varrho_1=0$$

und wir haben den Satz:

Die orthogonalen Trajectorien derjenigen Kürzesten auf der Mittelpunktsfläche, welche der zugehörigen Schar Krümmungslinien auf der Urfläche entsprechen, entsprechen den Curven constanter zugehöriger Hauptkrümmung auf derselben.

II.

Die Gleichung $F=0$ ist die allgemeine Bedingung, unter der die Tangenten der Parameterlinien conjugirt sind. Da nun nach (36) dieselbe auf der Mittelpunktsfläche erfüllt ist, so folgt der Satz:

Den zwei Hauptkrümmungsrichtungen auf der Urfläche entsprechen conjugirte Richtungen auf beiden Mittelpunktsflächen. R. Hoppe.

5.

Ueber eine Curve 4ter Ordnung.

Bekanntlich ist durch eine Gleichung der Form

$$f(x,y,u)=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

in welcher x, y die gewöhnlichen rechtwinkligen Coordinaten bedeuten, und u ein Parameter ist, ein System von Curven ausgedrückt, die von einer gemeinsamen Curve umhüllt werden.

Ebenso ist durch

$$\varphi(x, y, u) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 2)$$

eine Mannigfaltigkeit von Curven gegeben, die von einer gemeiasamen Curve umhüllt werden. Ist der Parameter u der Gleichung 2) derselbe. als der der Gleichuug 1), so können 2 demselben Werte von u entsprechende Curven von 1) und 2) als einander entsprechend bezeichnet werden. Der geometrische Ort der Schnittpunkte einander entsprechender Curven dieser beiden Curvensysteme oder das Erzeugniss derselben ist eine Curve, deren Gleichung durch Elimination jenes Parameters u aus den Gleichungen f und φ erhalten wird.

Nun betrachten wir die auf diese Weise aus den Gleichungen

$$\left.\begin{array}{r} x^2+y^2-u^2=0 \\ \text{und} \qquad y-ux=0 \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 3)$$

hervorgehende Curve 4ter Ordnung:

$$x^4+y^2x^2-y^2=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 4)$$

welche somit Erzeugniss eines Systems concentrischer Kreise und eines mit ihm projectivischen concentrischen Strahlenbüschels ist und ihrer einfachen und schönen Construction und Eigenschaften wegen Erwähnung verdient.

a) **Construction.** Man ziehe (siehe die Fig.) einen Kreis K und errichte in den Endpunkten A, B seines Durchmessers $\overline{AB}$ die Tangenten T, T' zu K. Zieht man nun in dem Schnittpunkte E eines zu K concentrischen Kreises K' mit der auf $\overline{AB}$ senkrechten Geraden $\overline{CD}$ eine Tangente zu K', so trifft diese die Tangente T im Punkte E', der mit dem Mittelpunkte des Kreises verbunden eine Gerade liefert, die K' als eine dem Kreise K' vermöge 3) entsprechende Gerade in einem Punkte F trifft, der ein Punkt der gesuchten Curve ist. Auf diese Weise fortfahrend ist es leicht die vorgelegte Curve zu construiren.

b) **Eigenschaften.** Die Curve läuft symmetrisch gegen die y-Achse (hier $\overline{CD}$) und auch gegen die x-Achse (hier $\overline{AB}$) und hat die in den Punkten A, B an den Kreis K, den wir — weil dem Werte $u = 1$ entsprechend — Fundamentalkreis nennen wollen, errichteten Tangenten T, T' zu Asymptoten.

Jede durch den Anfangspunkt O gehende Gerade schneidet die Curve in zwei Punkten, die von diesem

Punkte O gleich weit abstehen, weshalb dieser Punkt der **Mittelpunkt** und jede durch ihn gehende Gerade **Durchmesser** genannt werden mag.

Der Mittelpunkt der Curve ist zugleich **Rückkehrpunkt** und **Wendepunkt** der Curve.

Die Curve hat aber noch eine weitere merkwürdige Eigenschaft.

Sucht man nämlich die von einem der 4 Zweige der Curve mit der x-Achse und mit der Asymptote eingeschlossene Fläche, so ist dieselbe gegeben durch

$$Fl = \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{4}$$

und daher die von der ganzen Curve und den Asymptoten eingeschlossene Fläche $= \pi$ und man hat somit den Satz:

„Die von der Curve und ihren Asymptoten eingeschlossene Fläche ist gleich dem Flächeninhalte des des Kreises, der die Asymptoten der Curve berührt und dessen Mittelpunkt der Mittelpunkt der Curve ist."

Auch zeigt sich, dass der Krümmungsradius der Curve im Mittelpunkte derselben durch $\varrho = \frac{1}{2}$ gegeben und somit gleich ist dem halben Radius des Fundamentalkreises.

Wien, im Juni 1882.

Dr. Eduard Mahler.

6.

Zur Construction reciproker Punkte des Dreiecks.

Sind

$$p_a \quad p_b \quad p_c$$

trimetrische Coordinaten des Punktes P in Bezug auf das Axendreieck ABC und dieselben proportional den Abständen des Punktes P von den Seiten BC; hat ferner der Punkt Q die Coordinaten

$$\frac{1}{p_a} \quad \frac{1}{p_b} \quad \frac{1}{p_c}$$

$$\equiv p_b p_c \quad p_c p_a \quad p_a p_b :$$

so heissen $P \equiv p_a$, $Q \equiv p_b p_c$ reciproke Punkte des Dreiecks ABC.

Sind für dieses Coordinatensystem

$$a_1 x_a + b_1 x_b + c_1 x_c = 0$$
$$a_2 x_a + b_2 x_b + c_2 x_c = 0$$

die Gleichungen zweier Geraden $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$ und ist

$$a_1 a_2 = b_1 b_2 = c_1 c_2;$$

so heissen $\mathfrak{G}_1 \equiv a_1$, $\mathfrak{G}_2 \equiv b_1 c_1$ reciproke Gerade.

Die bekannteste Construction des zu einem Punkte $P \equiv p_a$ reciproken Punktes $Q \equiv p_b p_c$ ist folgende:

J sei das Inkreiscentrum des Dreiecks ABC. Die Spiegelbilder der Geraden AP bezüglich der AJ sind die Transversalen AQ.

Eine andere Construction (Archiv LX. 98.) besteht darin, dass man von P auf die BC Lote fällt, welche in A_p treffen; A_1 sei die Mitte von PA_p, die Normalen von A auf $B_1 C_1$ treffen sich in Q.

Ist $\mathfrak{G}_1 \equiv a_1$ gegeben, so wird $\mathfrak{G}_2 \equiv b_1 c_1$ auf folgende Weise construirt:

$\mathfrak{G}_1$ trifft BC in A_1. J sei das Inkreiscentrum des Dreiecks ABC. Das Spiegelbild der AA_1 bezüglich der AJ treffe BC in A_2. Die A_2 liegen in der Geraden $\mathfrak{G}_2$.

In Folgendem wird eine Construction von $Q \equiv p_b p_c$ und $\mathfrak{G}_2 \equiv b_1 c_1$ gegeben, welche ausser der Construction des Punktes J nur das Ziehen gerader Linien verlangt. — AP werde von BC, BQ, CQ in P_a, A_b, A_c getroffen.

Bezeichnen wir den Punkt $(BA_c,\ CA_b)$ mit $\mathfrak{A}$, so ist für $P \equiv p_a p_b p_c$, $Q \equiv q_a q_b q_c$:

$$\begin{array}{llll} A_b \equiv & p_c q_a & p_b q_c & p_c q_c \\ A_c \equiv & p_b q_a & p_b q_b & p_c q_b \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \mathfrak{A} \equiv & p_b p_c q_a & p_b^2 q_c & p_c q_b \\ A\mathfrak{A} \equiv & 0 & p_c^2 q_b & -p_b^2 q_c \end{array}$$

Diese Gerade trifft BC in

$$\begin{array}{llll} Z_a \equiv & 0 & p_b^2 q_c & p_c^2 q_b \\ \equiv & 0 & p_b^2 q_c q_a & p_c^2 q_a q_b \end{array}$$

Die AZ_a treffen sich im Punkte

$$Z \equiv p_a^2 q_b q_c.$$

Sind also die Punkte $P \equiv p_a p_b p_c$, $Q \equiv q_a q_b q_c$ gegeben; so kann der Punkt

$$Z \equiv p_a^2 q_b q_c$$

lineal auf folgende Weise construirt werden:

BQ, CQ treffen AP in A_b, A_c. Die Geraden BA_c, CA_b schneiden sich in $\mathfrak{A}$. Die $A\mathfrak{A}$ begegnen sich in Z.

Für $P \equiv 1$ wird $Z \equiv q_b q_c$. Der zu dem Punkte $Q \equiv q_a$ reciproke Punkt $Z \equiv q_b q_c$ wird also auf folgende Weise durch Zeichnung gefunden:

J sei das Inkreiscentrum des Dreiecks ABC. AJ werde von BQ, CQ in A_b, A_c getroffen. BA_c, CA_b schneiden sich in $\mathfrak{A}$.

Die $A\mathfrak{A}$ sind die Ecktransversalen des zu $Q \equiv q_a$ reciproken Punktes $Z \equiv q_b q_c$.

$\mathfrak{G}_1 \equiv a_1$, $\mathfrak{G}_2 \equiv a_2$ seien zwei Gerade in der Ebene des Fundamentaldreiecks. Setzen wir in

$$Z \equiv p_a^2 q_b q_c$$

$P \equiv b_2 c_2$, $Q \equiv b_1 c_1$; so wird

$$Z \equiv a_1 b_2^2 c_2^2$$

Ist nun $\mathfrak{G}_2$ die Harmonikale des Inkreiscentrums, so erhalten wir:

$$Z \equiv a_1.$$

Die Construction der zur Geraden $\mathfrak{G}_1 \equiv a_1$ reciproken Geraden ist demnach folgende:

Q sei der harmonische Pol von $\mathfrak{G}_1$, J das Inkreiscentrum. BQ, CQ treffen AJ in A_b, A_c. Die Geraden BA_c, CA_b schneiden sich in $\mathfrak{A}$. Die $A\mathfrak{A}$ begegnen sich im harmonischen Pole der Geraden $b_1 c_1$.

Wien, Juni 1882.

Emil Hain.

7.

Ein Beitrag zur Trisection des Winkels.

Bekanntlich geschieht die Dreiteilung des Winkels auf mechanischem Wege dadurch, dass man um den Scheitel des gegebenen Winkels mit beliebigen Radius einen Kreis beschreibt, den Radius auf einem Streifen Papier aufträgt und diesen Streifen so lange ver-

schiebt, bis der eine Endpunkt des Radius auf dem verlängerten Schenkel, der andere auf der Peripherie des Kreises liegt, während die dadurch bestimmte Gerade durch den Endpunkt des anderen Schenkels geht. Der Winkel, den diese Gerade mit dem verlängerten Schenkel bildet, ist der dritte Teil des gegebenen Winkels.

Die Aufgabe der Trisection des Winkels reducirt sich somit auf die Aufgabe: Es ist durch einen Punkt der Peripherie eines Kreises eine Gerade so zu ziehen, dass der Abstand ihres Schnittpunkts mit der Peripherie von ihrem Schnittpunkt mit einer durch den Mittelpunkt gehenden Geraden gleich dem Radius sei.

Dieses Problem wurde zuerst von Nikomedes durch die von ihm erfundene Conchoide gelöst. Construirt man nämlich eine Conchoide, deren Spitze im Endpunkt (Schnittpunkt des Kreisüs mit dem Schenkel) des einen Schenkels, deren Axe der andere Schenkel und deren Parameter der Radius ist, so ist die gesuchte Gerade offenbar bestimmt durch den Schnittpunkt der Conchoide mit dem Kreise. Nun schneidet aber diese Conchoide den Kreis in 4 Punkten, mithin ist die Aufgabe nicht ein-, sondern mehrdeutig, was darin seinen Grund hat, dass der Winkel α, den zwei Gerade mit einander bilden, nicht nur entstanden sein kann durch eine Drehung um α^0, sondern auch durch eine Drehung um $\alpha^0 + n.360^0$. Es ist leicht einzusehen, dass die Geraden, welche die Winkel α, $\alpha + 360$ und $\alpha + (2 \times 360)$ in drei gleiche Teile teilen, verschiedene Richtungen haben, dass aber die Teilungslinien von Winkeln, die auch um 3.360^0 unterscheiden zusammen fallen müssen; es also 3 verschiedene Lösungen geben muss. Die Verbindungslinie des vierten Schnittpunktes des Kreises mit der Conchoide fällt mit dem Schenkel selbst zusammen.

Die Scheitel der 3 gefundenen Winkel liegen alle auf dem einen Schenkel des gegebenen Winkels und haben von der Peripherie des Kreises gleiche Entfernung, diese Entfernungen gemessen auf den durch den Endpunkt des andern Winkels gehenden Strahlen.

Daher lässt sich die Aufgabe auch so lösen:

Man beschreibe um den Scheitel des gegebenen Winkels einen Kreis und construire eine Curve, deren Punkte von der Peripherie des Kreises um den Radius abstehen, diese Abstände gemessen auf den durch den Endpunkt des einen Schenkels gehenden Strahlen. Die Schnittpunkte dieser Curve mit dem andern Schenkel sind die Scheitel, die Verbindungslinie derselben mit dem Centrum des Strahlenbüschels sind die Schenkel der gesuchten Winkel.

Es sei α der gegebene Winkel. Beschreibt man nun um den Scheitel C desselben mit dem Radius $CA = a$ einen Kreis, zieht

durch den Endpunkt A des einen Schenkels beliebige Strahlen, welche die Peripherie des Kreises in den Punkten M_1, M_2, M_3 etc. schneiden und trägt von diesen Schnittpunktsn nach beiden Seiten der Peripherie den Radius auf, so bestimmen die dadurch erhaltenen Punkte N_1, N_2, N_3 etc. die gesuchte Curve.

Dieselbe schneidet den zweiten Schenkel in den Punkten P, C, Q, R und es sind dann φ_0, φ_1, φ_2 die gesuchten Winkel, wie sich planimetrisch leicht zeigen lässt.

Auch auf analytischem Wege lässt sich diese Lösung sehr leicht verfolgen.

Wählen wir die Spitze A der Curve als Pol, die Gerade A zum zweiten Schenkel des Winkels gezogene Parallele Ax als Polaraxe, so ist der Kreis dargestellt durch die Gleichung:

$$\varrho = 2a.\cos(\varphi - \alpha),$$

wobei wir α und φ von der positiven Richtung der Axe im entgegengesetzten Sinne der Drehung eines Uhrzeigers zählen, ϱ dagegen uns auf der Verlängerung des beweglichen Schenkels von φ aufgetragen denken.

Eben so leicht ergiebt sich nun als Gleichung der besprochenen Curve

$$\varrho = a + 2a\cos(\varphi - \alpha)$$

$$\varrho = a(1 + 2\cos(\varphi - \alpha)),$$

wobei φ alle Werte von 0 bis 360 zu durchlaufen hat.

Als Gleichung des zweiten Schenkes des gegebenen Winkels finden wir

$$\varrho = \frac{a.\sin\alpha}{\sin\varphi}.$$

Für die Schnittpunkte beider Linien muss daher gelten:

$$a.\frac{\sin\alpha}{\sin\varphi} = a[1 + 2\cos(\varphi - \alpha)]$$

oder

$$\sin\alpha = \sin\varphi + 2\sin\varphi\cos(\varphi - \alpha)$$

$$\sin\alpha = \sin\varphi + 2\sin\varphi\cos\varphi\cos\alpha + 2\overline{\sin\varphi}^2\sin\alpha$$

und da

$$2\overline{\sin\varphi}^2 = 1 - \cos 2\varphi \quad \text{und} \quad 2\sin\varphi\cos\varphi = \sin 2\varphi$$

ist:

$$\sin\alpha = \sin\varphi + \sin 2\varphi\cos\alpha + \sin\alpha - \sin\alpha\cos 2\varphi$$

somit

$$\sin\alpha\cos 2\varphi - \cos\alpha\sin 2\varphi = \sin\varphi$$

$$\sin(\alpha - 2\varphi) = \sin\varphi$$

daher

$$\alpha - 2\varphi = \varphi$$

oder allgemein

$$\alpha + n.360 - 2\varphi = \varphi$$

$$\varphi = \frac{\alpha}{3} + n.120$$

Für $n = 0$, wird $\varphi_0 = \frac{\alpha}{3}$

„ $n = 1$, „ $\varphi_1 = \frac{\alpha}{3} + 120$

„ $n = 2$, „ $\varphi_2 = \frac{\alpha}{3} + 240$

Für $n = 3$, wird $\varphi_2 = \frac{\alpha}{3} + 360$, die Schenkel dieses Winkels fallen mit denen von φ_0 zusammen, so wie die von φ_0 mit denen von φ_1 etc.; so dass wir also nur 3 verschiedene Lösungen erhalten. Dass ausserdem der Gleichung

$$\sin(\alpha - 2\varphi) = \sin\varphi$$

auch noch durch den Wert

$$\varphi = 180 + \alpha$$

Genüge geleistet wird, ist leicht ersichtlich; es wird dadurch nur bestätigt, dass die Curve durch den Scheitel des Winkels gehen muss.

Vergleichen wir diese Art der Lösung mit der von Nikomedes, so zeigt sich, dass Kreis und Gerade ihre Rollen vertauscht haben. Bei Nikomedes ist die Leitlinie der gesuchten Curve ein Kreis, hier ist es eine Gerade; bei ersterem bestimmen die Schnittpunkte der Curve mit dem Kreise die Schenkel der gesuchten Winkel, während hier dies die Schnittpunkte der Curve mit der Geraden tun.

Es ist ferner klar, dass man die Curve nur einmal zu construiren braucht, um alle möglichen Winkel mit Hilfe derselben in drei gleiche Teile zerlegen zu können.

Man hat eben nur den gegebenen Winkel an den fixen Schenkel QA so anzutragen, dass sein Scheitel nach Q fällt. Die Schnittpunkte des zweiten Schenkels des angetragenen Winkels mit der Curve bestimmen sofort die Scheitel der gesuchten Teile.

Hat diese Lösung auch weiter keinen praktischen Wert, so glaubt der Verfasser doch, dass sie nicht ganz uninteressant ist und sich ihrer Einfachheit wegen als Beispiel einer transcendenten Curve selbst für den Unterricht an Mittelschulen ganz gut eignen dürfte.

Moritz Rusch.

Litterarischer Bericht
CCLXXII.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Substitutionentheorie und ihre Anwendung auf die Algebra. Von Dr. Eugen Netto, a. o. Professor an der Kaiser Wilhelms-Universität zu Strassburg i. E. Leipzig 1882. B. G. Teubner. 290 S.

Es ist dies, laut Vorwort, die dritte umfassende Bearbeitung eines in neuster Zeit emporgewachsenen Zweiges der Mathematik, ohne Beziehung zu der von J. A. Serret, von der sie durch die Verschiedenheit der Methoden sich gänzlich trennt, dagegen auf die von C. Jordan in grundlegenden Begriffen, Beweisen und Gedankenfolgen sich vielfach stützend, während eine Arbeit von L. Kronecker nur zu spät erschienen ist um darauf von Einfluss zu sein. Die Substitutionentheorie handelt von den Wirkungen der Permutation der Argumente einer Function auf deren Wert, doch gewinnt sie ihre Ausdehnung erst durch Beschränkung auf ganze Functionen und unabhängige Argumente. Sie hat, in gegenwärtiger Darstellung, einen Anknüpfungspunkt, welcher sich vortrefflich eignet den mit dem Gegenstande unbekannten Leser leicht in das eigenartige Untersuchungsfeld einzuführen; denn mit den den Anfang bildenden Sätzen über symmetrische Functionen wird jeder Mathematiker so vertraut sein, dass er gewohn ist sie als Identitäten zu betrachten. Indem aus diesem bekannten Centrum die Aufgabe durch Erweiterung hervorgeht, motiviren sich leicht die getroffenen Anordnungen. Zunächst treten neben den symmetrischen die alternirenden Functionen auf, und findet hier die Discriminante als Quadrat des Differenzenproducts ihre Erklärung. In mehrwertigen Functionen, deren Betrachtung nun beginnt, werden die Substitutionen (d. h. stets Permutationen) einesteils zerlegt in Producte (d. h. Successionen) von Transpositionen

(d. h. Permutationen zweier Argumente), also ohne Vertauschbarkeit der Factoren, anderenteils von Cyklen ohne gemeinsame Argumente, daher Vertauschung oder Gleichzeitigkeit der Substitutionsfactoren zulassend. Dann wendet sich die Betrachtung insbesondere auf die Gruppen, wo unter einer Gruppe stets ein Complex von Substitutionen, welche den Wert der Function nicht ändern, verstanden wird. Es wird erklärt der Grad der Gruppe, Anzahl der Variabeln, und die Ordnung, Anzahl der Substitutionen. Die Gruppe gewinnt Bedeutung durch den Umstand, dass sich jede zu ihr gehörige Function rational in jeder andern desgleichen ausdrücken lässt. Insbesondere werden betrachtet die alternirenden Gruppen. Der nächte Gegenstand sind die verschiedenen Werte einer Function, wobei es sich hauptsächlich um Anzahlen handelt, und ihre algebraischen Beziehungen zu einander. Erklärt werden die Aehnlichkeit und Transformation, im nächsten Abschnitt die Transitivität und Primitivität, der Isomorphismus, später die Gattungen, darunter die conjugirten Gattungen. Nach Beschluss der Theorie, aus welcher eine grosse Anzahl von Lehrsätzen resultiren, folgt deren Anwendung auf die algebraischen Gleichungen, auf die 2., 3., 4. Grades, die Kreisteilungsgleichungen, die Abel'schen Gleichungen, woran sich weitere Untersuchungen schliessen über die Gleichungen, bei denen rationale Beziehungen zwischen 3 Wurzeln herrschen, über die algebraische Auflösung der Gleichungen, die Gruppe einer algebraischen Gleichung und algebraisch auflösbare Gleichungen. H.

Elementares Lehrbuch der algebraischen Analysis für den Unterricht an technischen Anstalten bearbeitet von Hans Staudacher, Professor für Mathematik und Physik am kgl. Realgymnasium Speyer. Mit 19 Figuren im Texte. München 1882. R. Oldenbourg. 169 S.

Wenn der Verfasser das Lehrbuch mit besonderer Betonung elementar nennt, so zeigt er eine hohe Achtung vor der Fassungskraft der Schüler. Allerdings genügt es in Klarheit, Correctheit, Einfachheit und guter Ordnung allen Erfordernissen des Verständnisses bei aufmerksamem Durchstudiren und erleichtert dasselbe durch Beispiele an rechter Stelle. Doch lässt es sich nicht wol einer wissenschaftlichen Darlegung der darin behandelten Themata entgegensetzen: die Aufstellungen, namentlich die Definitionen, sind concinn, ohne pädagogische Beihülfe, die Deductionen kurz. Gerade dieser überall eingehaltene wissenschaftliche Standpunkt möchte eher das Vorliegende charakterisiren. Die Combinatorik wird an die Spitze gestellt und dann soviel als möglich als Quelle weiterer Theorien benutzt, somit das Interesse an ihr durch dargetane Anwendbarkeit

erhöht. Hierhin gehört zuerst die bekannte combinatorische Herleitung des binomischen und polynomischen Lehrsatzes. Nachdem hierauf die Theorie der arithmetischen Reihen, im Anschluss die der geometrischen u. a., dann die der complexen Zahlen gezeigt ist, wird die Lehre von den Determinanten ebenfalls auf die Combinatorik gegründet; sie verbindet mit dem Notwendigen vieles Wissenswerte. Die Unterdeterminanten werden zwar zeitig eingeführt, dienen jedoch nicht als Deductionsbrücke für die Hauptsätze, welche vielmehr nach der directen Methode hergeleitet werden. Unmittelbar daran schliesst sich die Anwendung auf die linearen Gleichungssysteme und quadratische Gleichungen. Nachdem über die ganzen Functionen das Erforderliche gesagt ist, wird die Lehre von den höhern Gleichungen in eingehendster und hinreichend vielseitiger Weise behandelt Nur kurz und zu blosser Begründung des Folgenden werden einige specielle Aufstellungen über Grenzwerte und Stetigkeit gemacht. Dann folgt die Theorie der Reihen, erst allgemein, dann die der speciellen Reihen. H.

Geometrie.

Vom Körper höherer Dimension. Beiträge zu den Elementen einer n-dimensionalen Geometrie. Von K. Rudel, Professor für Mathematik. Kaiserslautern 1882. Herrmann Kayser. 56 S. Wissenschaftliche Beigabe zum Jahresberichte der Kgl. Industrie-Schule in Kaiserslautern für das Schuljahr 1881. 1882.

Der Verfasser lässt die linear begrenzten Figuren von 0, 1, 2, 3, 4, 5, . . . Dimensionen successive aus einander hervorgehen, beschränkt die Betrachtung zuerst auf die Figuren kleinster Grenzenzahl, Dreieck, Tetraeder, etc. und zählt die Grenzfiguren zusammen. Es ergiebt sich die absolute Summe $= 2^n - 1$ und die Summe bei abwechselnden Vorzeichen $= 1$, woraus der Euler'sche Satz hervorgeht. Auch Winkel und Keile werden gezählt. Die gleiche Betrachtung findet statt bei den rechtwinkligen Figuren, Quadrat, Würfel, etc. Dann werden die möglichen regelmässigen Figuren von 4 Dimensionen aufgesucht. Durch Anwendung dreier Bedingungen, 1) die grösste Zahl Polyeder-Ecken um einen Punkt herum, 2) die grösste Zahl Keile um eine Kante herum, 3) den Euler'schen Satz — beschränkt sich die Möglichkeit auf diejenigen 6 Figuren, welche bekanntermassen auch wirklich existiren. Ein Anhang enthält noch die Besprechung von 3 Gegenständen.

Was die Abfassung betrifft, so ist die Arbeit mehr ein Monolog als ein Vortrag zu nennen. Nichts wird definirt; den Wortsinn muss der Leser aus einigen unzureichenden Angaben und aus dem Zusammenhange erraten. So errät man freilich bald, dass „vorhanden" nur das heisst, was der Verfasser genannt hat; auf der Verbindungslinie zweier Punkte sind alle Punkte zwischen diesen nicht vorhanden, sondern nur die 2 Punkte. Den Begriff von „projiciren" muss sich der Leser daraus bilden, dass ein Dreieck, ein Tetraeder entsteht, wenn man eine Seite von der Gegenecke aus „projicirt" (?) Im weitern Fortschritt wird natürlich ein Eingehen auf die Meinung des Verfassers immer mühevoller, und man kann nur darum im wesentlichen nicht wol fehlgehen, weil die Arbeit die Grenzen des Bekannten weder im Resultat noch in der Methode überschreitet. Was gezeigt werden sollte, muss man also schon vorher kennen, um die Worte zu verstehen, die es zeigen sollen.

Weit verständlicher ist der Anhang: in der Behandlung der 2 ersten Punkte macht sich der bezeichnete Mangel überhaupt nicht bemerklich. Das erste Thema ist der Umstand, dass 2 Gebilde, die in der n-Dimensionen-Geometrie symmetrisch sind, und nicht zur Deckung gebracht werden können, beim Heraustreten aus der n-dehnung congruent werden. Dieses wird durch successive Hinzunahme einer Dimension recht ausführlich erörtert. Das zweite Thema betrifft die Schnitte der linearen Gebilde. Der Verfasser nennt Gerade im Raume, die keinen Punkt, und Ebenen in der Vierdehnung, die keine Gerade gemein haben, sich kreuzend, ohne jedoch diesen Wortsinn vorher festgestellt zu haben. Da er aber ausdrücklich aufstellt: Sich kreuzende Ebenen haben einen Punkt gemein — so ist der Sinn nicht zweifelhaft. Erst beim dritten Thema wird der Mangel dieser Definition verhängnissvoll. In einem Artikel von Schlömilch's Zeitschr. XXIII. Heft 4., dessen Verfasser hier nicht genannt wird, findet Rudel den Versuch eines Nachweises, dass die Annahme sich kreuzender Ebenen einen logischen Widerspruch in sich schliesst, und geht ausführlich darauf ein, die logischen Fehler des Beweises aufzudecken. In dieser Kritik, die manches recht treffende enthält, wird aber gar nicht beachtet, dass der Ungenannte sagt, der Begriff sich kreuzender Ebenen sei unmöglich, weil sie immer einen Punkt gemein hätten. Hiernach liegt es am Tage, dass beide Verfasser unter „kreuzen" nicht dasselbe verstehen. Vom Kreuzen der Geraden ausgehend kann man offenbar den Begriff in mehr als einer Richtung erweitern. Mit Rudel's Wortgebrauch stimmt es, wenn in der $n$dehnung zwei $(n-2)$dehnungen sich kreuzen, die keine $(n-3)$dehnung gemein haben; mit dem des Ungenannten hingegen, wenn die Bedingung ist, dass sie keinen Punkt gemein haben. Bei der 3dehnung

fällt beides zusammen, bei der 4dehnung scheiden sich die Begriffe schon, und von letzterer ist hier die Rede. Folge dieser Abweichung, Folge also des Mangels an Definition und des Bauens auf unbestimmte Analogien ist von da an ein beständiges Misverstehen. Beseitigt man diesen Punkt, so bleibt für die logische Kritik keine rechte Veranlassung. Hoppe.

Ueber die Principien der neueren Hydrodynamik. Von Dr. Richard Reiff, Repetent am mathematischen Seminar der Universität Tübingen. Freiburg i. B. und Tübingen 1882. J. C. C. Mohr.

Die Untersuchung ist eine rein kinematische, in welcher die Zeit nur die Rolle eines Parameters spielt. Sie umfasst daher nur eine Seite der Principien der Hydrodynamik, was der Titel nicht erkennen lässt. Weitere Unbestimmtheiten des Ausdrucks finden sich in der Einleitung. In der geometrischen Betrachtung der Bewegung wird ja die substantielle Identität der Punkte willkürlich hinzugedacht; doch bleibt die Betrachtung immer davon abhängig, wird sie also nicht festgestellt — und eben daran fehlt es hier — so bleibt der Sinn des Ganzen zweifelhaft; erst die spätern Formeln leiten nachträglich zum Verständniss. Ferner wird hier das Verhältniss der Euler'schen zur neuern Hydrodynamik dargestellt, als ob erstere die relative Bewegung unberücksichtigt liesse. Kann der Verfasser irgend eine Bewegungsbestimmung denken, welche die relative Bewegung nicht in sich enthält? Das Wahre an der Sache ist, dass die gegenwärtige Abhandlung ausschliesslich die relative Bewegung zweier unendlich naher substantieller Punkte eines Continuums betrachtet, und zwar einesteils die Variation ihrer Distanz (Dilatation), andernteils der Richtung ihrer Verbindungslinie (Rotation) bestimmt. Sie erscheint hiernach als eine Vorbereitung, um die Viscosität der Flüssigkeit in die hydrodynamischen Gleichungen einzuführen, eine Bestimmung die indes nicht ausgesprochen ist. Es werden zu Anfang die Arbeiten von Navier, Poisson, Cauchy, Stokes und Helmholtz über den Gegenstand in ihrem Verhältniss besprochen. Die gegenwärtige unterscheidet sich von der Beltrami's dadurch, dass sie von der Veränderung des Linienelements, jene von der des Volumenelements ausgeht. Sie entwickelt zuerst die allgemeinen Gleichungen der relativen Bewegung und bestimmt darin die Dilatation und Rotation des Linienelements, handelt dann von diesen einzeln und verbindet zuletzt die rein rotatorische Bewegung mit der Potentialbewegung. H.

Trigonometrie.

Die Functionen Cosinus und Sinus beliebiger Argumente in elementarer Darstellung. Von R. Götting, Professor am Gymnasium zu Torgau. Berlin 1881. J. A. Wohlgemuth. 66 S.

Die Functionen cos und sin werden, zunächst für rationale Brüche des Kreises, durch recurrente Relationen der Sehnen von Bogen der Form $\frac{k}{n}\pi$, anfangend mit dem Durchmesser a_0, d. i. $k = n$, die nächste Sehne a_1, d. i. $k = n-1$, zu Grunde legend, bestimmt, und zwar a_1 sogleich beliebig complex genommen. Bogen ohne rationale Beziehung sind nur in so fern einbegriffen, als sich immer n unendlich nehmen lässt. Der 2. Abschnitt knüpft an die Betrachtung einer Reihe gleichschenkliger Dreiecke von Schenkeln $= 1$ innerhalb eines Winkels von der Form $\frac{k\pi}{2(2m+1)}$ an und macht Anwendung auf regelmässige Vielecke. Der dritte gewinnt Formeln für die cos und sin der Vielfachen eines Bogens, der vierte entwickelt die Functionen in Reihen. Bemerkenswert ist auch die Anwendung der Hyperbel zur Construction der hyperbolischen Cosinus und Sinus. H.

Parabolische Logarithmen und parabolische Trigonometrie, eine vergleichende Untersuchung von Dr. S. Günther. Leipzig. B. G. Teubner. 1882.

Nachdem die hyperbolischen Functionen als Analogon der cyklischen in die Analysis eingeführt waren, machte sich der Begeisterung ihrer Bearbeiter und Gönner Gudermann, Heis, Gronau u. s. w. gegenüber bald in weiten Kreisen die Auffassung geltend, dass diese neuen Beziehungen doch weiter nichts als neue Namen für bekannte Dinge seien. Zudem traten diese hyperbolischen Transcendenten in einen ungünstigen Vergleich zu anderen Transcendenten, welche mit ihren ungeheuren Gedankenreichtum die mathematischen Talente von abgebauten Feldern ablockten.

Dennoch hat die Sache ihre zwei Seiten. Gewiss! wo es sich um den analytischen Charakter unserer Functionen handelt, da wäre es ein Anachronismus, für $\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ ein neues Zeichen zu setzen. Aber genau das Gleiche gilt für $\frac{e^{xi}+e^{-xi}}{2}$ und nicht selten ist es für den Analytiker in der Tat bequemer, nicht $\sin x$, sondern den

obigen Wert in die Rechnungen einzuführen. Aber, wo es sich um geometrische Anwendungen handelt, da darf kühn behauptet werden, dass die Wucht, mit welcher sich die Verbindungen $\frac{e^x+e^{-x}}{2}$, $\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ u. s. w. aufdrängen, so unwiderstehlich ist, wie die Eleganz, Symmetrie und Kürze der dadurch gewonnenen Formeln einladend wirkt. In dem vorliegenden Werkchen hat der gelehrte Parlamentarier Dr. Günther — wir dürfen verraten, während der verlaufenen Reichtagssession, als parergon mathematicum — an einem schönen Beispiele die Biegsamkeit der hyperbolischen Functionen gezeigt.

Nachdem zunächst in einer historischen hochinteressanten Skizze von älteren und neueren Untersuchungen die Rede ist, welche sich auf Curvenrectification beziehen, gibt der Verfasser im zweiten Capitel auf 10 Seiten eine klare Darstellung der Theorie der hyperbolischen Functionen. Dieselbe erfährt sofort durch einen die Lemniskate betreffenden Lehrsatz eine interessante neue Anwendung.

Das dritte Capitel beschäftigt sich mit der von Booth bearbeiteten „Logocyklik". Dieselbe erscheint in den Cartesischen Coordinaten als Curve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt:

$$y^2(2a-x) = x(x-a)^2$$

Der Verfasser wählt zur Bearbeitung ein Polarcoordinatensystem, worin die Gleichung lautet:

$$r = a(\sec\vartheta \pm \operatorname{tang}\vartheta).$$

Und nun geschieht der entscheidende Schritt: Er setzt

$$\mathfrak{Tang}\,\frac{u}{2} = \operatorname{tang}\frac{\vartheta}{2}$$

und erhält:

$$r = a(\mathfrak{Cos}\,u \pm \mathfrak{Sin}\,u)$$

Hierdurch ist er in den Stand gesetzt, sämmtliche Relationen auf das hyperbolische Hülfsargument u zurückzuführen und somit gestalten sich seine Beweise für die einigen 20 eleganten Sätze, welche er ableitet, nicht blos einfacher, sondern vor Allem einheitlicher als die seiner Vorgänger.

Im vierten Capitel wird die praktische Trigonometrie Booth's auf ihren wahren Charakter zurückgeführt. Derselbe hatte neue Operationszeichen „logarithmic plus and minus" eingeführt — eine Methode, welche immer so ernsten Bedenken begegnen sollte, wie sie Herr Günther gegen dieselbe äussert — und nun gelingt der Nach-

weis, dass die Operationszeichen des englischen Mathematikers mit + und — identisch werden, wenn man die Amplituden durch die hyperbolischen Argumente ersetzt. Ja, in einer Fussnote macht unser Verfasser den meiner Ueberzeugung nach vollkommen geglückten Versuch, die Frage zu beantworten, wie doch der scharfsinnige Booth dazu kam, den wahren Charakter seiner Untersuchungen zu verkennen. Die hier hergehörigen Bemerkungen machen einen Glanzpunkt der kleinen Schrift aus.

Im letzten Capitel wird die graphische Darstellung der Logarithmensysteme durch homofocale Parabeln gelehrt.

Die kleine Schrift bietet ein interessantes Beispiel der Curvenbetrachtungen dar, wo die Bestimmungsstücke als Functionen eines Parameters erscheinen. Sie ist reich an schönen Ergebnissen und die Darstellung eine so lichtvolle, dass sie dem Anfänger eine leichte Arbeit und dem Geübteren eine fesselnde Lectüre sein wird.

Coesfeld im Juli, 1882.

K. Schwering.

Geodäsie.

Die Terrain-Aufnahme mit der tachymetrischen Kippregel von Tichy und Starke. Für das Selbst-Studium bearbeitet von Anton Schell, k. k. Professor. Mit 20 in den Text gedruckten Holzschnitten. Wien 1881. L. W. Seidel u. Sohn. 48 S.

Die Schrift behandelt das von A. Tichy erfundene Verfahren, Horizontaldistanz und Höhe eines Punktes ohne Kenntniss der schiefen Distanz mit Hülfe eines in dem Visirfernrohre eines theodolithartig gebauten Instrumentes oder einer Kippregel angebrachten Ocular-Filar-Schrauben-Mikrometers an einer in dem Endpunkte der zu messenden Linie vertical aufgestellten und mit einer Teilung versehenen Latte abzulesen. Bei Anwendung dieser von Tichy und Starke hergestellten Vorrichtung, „dem Tachymeter-Theodolithen", wird die Feldarbeit etwas vermehrt, dagegen die Hausarbeit vermindert. Es wird zuerst die tachymetrische Kippregel, mit theoretischer Erklärung der anallatischen Einrichtung des Fernrohres und der Construction der tachymetrischen Teilung des Verticalkreises, dann der Messtisch, dann die Latte mit Abbildungen beschrieben; dann werden die Eigenschaften der Kippregel aufgeführt, ihre Prüfung und Rectification erörtert; dann das Verfahren der Aufnahme mittelst des Instruments ausführlich dargelegt.

H.

Technik.

Die elektrische Beleuchtung für industrielle Zwecke. Von R. E. Crompton, Ingenieur und Unternehmer für elektrische Beleuchtung. Deutsch von F. Uppenborn, Ingenieur und Elektrotechniker zu Hannover. Mit 1 Tafel. München und Leipzig 1881. R. Oldenbourg. 41 S.

Gegenüber zahlreichen Schriften, welche in ihren Angaben wenig Kenntniss von einander nehmen, ist die gegenwärtige der vergleichenden Zustammenstellung und kritischen Sichtung gewidmet. Sie setzt für ein urteilendes Verständniss sowol theoretische als auch technische Kenntnisse voraus ohne im mindesten über das Allgemeine der Sache Belehrung zu geben; doch wird die Meinung des Verfassers und die Auseinandersetzung der Fragen, welche in Betracht kommen, für jeden Leser deutlich. Von 3 unterschiedenen elektrischen Beleuchtungsarten, der Incandescenzbeleuchtung, den Wechselstrommaschinen mit Regulatorlampen oder mit Kerzen verbunden und den Maschinen für gleichgerichtete Ströme mit Regulatorlampen wird die letzte als die vorzüglichste allein besprochen, nachdem ihre Eigenschaften in Vergleich gestellt sind. Es wird zuerst über Betriebskraft, dann über die Art des Lichtes und die Messung der Intensität gehandelt. Statt der Vergleichung mit Kerzenlicht wird es besser befunden 3 Stufen der Helligkeit anzunehmen, die bei welcher sich feine Arbeit verrichten lässt, die bei welcher man lesen kann, und die Mondscheinhelligkeit. Hierüber ist eine tabellarische Zusammenstellung gegeben. Dann folgt die Frage der Dauerhaftigkeit. Der nächste Gegenstand sind die Regulatorlampen, die folgenden Kabel und Drähte, die Kohlen, der letzte die Betriebskosten. H.

Vermischte Schriften.

Annali di Matematica pura ed applicata diretti dal prof. Francesco Brioschi in Milano colla cooperazione dei professori: Luigi Cremona in Roma, Eugenio Beltrami in Pavia, Enrico Betti in Pisa, Felice Casorati in Pavia. Serie II. Tomo X. Milano 1880—1882. Bernardoni di C. Reboschini e C.

Der Inhalt des 10. Bandes ist folgender.

Brioschi: Von einer Eigenschaft der Differentialgleichungen 2. Ordnung. — Ueber eine Classe von linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung. — Ueber die Erzeugung einer Classe von linearen,

durch elliptische Functionen integrirbaren Differentialen. — Ueber die Differentialgleichungen des Tetraeders, Oktaeders und Ikosaeders. — Michel Chasles, Nekrolog. — Die Göpel'sche Relation für hyperelliptische Functionen beliebiger Ordnung. — Ueber ein System von Differentialgleichungen.

Casorati: Die Rechnung mit endlichen Differenzen interpretirt und durch neue Theoreme vermehrt mit Hülfe vornehmlich auf die complexe Variabilität gegründeter Untersuchungen aus neuester Zeit. — Ueber eine ganz neue Schrift von L. Stickelberger. — Verallgemeinerung einiger Sätze von Hermite, Brioschi und Mittag-Leffler über die Differentialgleichungen 2. Ordnung. — Beiträge zu neuen Arbeiten von Weierstrass und Mittag-Leffler über die Functionen einer complexen Variabeln.

Beltrami: Ueber einige neue Sätze von Neumann über die Potentialfunctionen. — Ueber die allgemeinen Gleichungen der Elasticität. — Ueber das magnetische Potential.

Kantor: Wie viele cyklische Gruppen giebt es in einer quadratischen Transformation der Ebene? — Beantwortung derselben Frage für Cremona'sche Transformation.

Christoffel: Algebraischer Beweis des Satzes von der Anzahl der linearunabhängigen Integrale 1. Gattung.

Hermite: Ueber die linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung. — Ueber eine analytische Darstellung der Functionen mittelst der elliptischen Transcendenten.

Schwarz: Verallgemeinerung eines Fundamentalsatzes.

Dini: Ueber die Entwickelungen der Functionen einer reellen Variabeln in Reihen von Jacobi'schen Functionen.

Betti: Ueber die Bewegungen, bei welchen einer heterogenen flüssigen Masse die ellipsoidale Gestalt erhalten bleibt.

Scherrer: Ueber ternäre biquadratische Formen.

Cazzaniga: Ausdruck ganzer Functionen, welche an willkürlich gegebenen Stellen vorgeschriebene Werte annehmen.

Tonelli: Ueber die Potentialfunctionen in einem Raume von n Dimensionen.

H.

Mittheilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg. No. 1. Ausgegeben im Mai 1881, No. 2. im März 1882. Leipzig. B. G. Teubner. 16 + 20 S.

Im vorigen Jahre hat die Gesellschaft angefangen ihre Sitzungsberichte zu veröffentlichen. Die erste Nummer enthält ihre Geschichte von ihrer Gründung 1690 an bis zu ihrem hundertjährigen Jubiläum 1790, wo sie unter dem Namen „Kunstrechnungs liebende (und übende) Societät" bestand. Ihr Sitz war Hamburg, doch sind stets die Mehrzahl ihrer Mitglieder auswärtige gewesen, insbesondere traten später Holländer und Wiener bei. Als die verdienstvollsten werden aus der ältesten Zeit genannt Valentin Heins, Heinrich Meissner und Paul Halcken. — No. 1. teilt folgende Vorträge mit:

Schubert: Die trilineare Verwandtschaft zwischen 3 einstufigen Grundgebilden.

Franz Fischer: Die mathematischen Grundlagen der Militärdienstversicherung.

Schrader: Die Bewegung von Massenpunkten nach dem Newton'schen Gesetz.

No. 2. enthält zuerst folgende Vorträge und 2 Aufsätze ohne Namen der Verfasser.

Schubert: Ueber die Zahl der Bilder bei einem Winkelspiegel.

Sinram: Ueber die Berechnung von Volumina von Rotationskörpern und speciell über die Fassberechnung.

Zur Theorie der atmosphärischen Wirbel.

Einstufige Ausartungen der quadratischen Transformation der Ebene. H.

Archiv for Mathematik og Naturvidenskab. Udgivet af Sophus Lie, Worm Müller og G. O. Sars. III. IV. V. Bind. Kristiania 1878—1880. Alb. Cammermeyer.

Hierin sind folgende mathematische Abhandlungen enthalten:

Sophus Lie: Theorie der Transformationsgruppen. — Bestimmung aller in eine algebraische Developpable eingeschriebenen algebraischen Integralflächen der Differentialgleichung $s = 0$. — Zur

Theorie der Flächen constanter Krümmung. — Weitere Untersuchungen über Minimalflächen. — Ueber Flächen, deren Krümmungsradien durch eine Relation verknüpft sind. — Bestimmung aller Flächen constanter Krümmung.

S. A. Sexe: Wie vermeidet man die imaginäre Grösse?

H. Geelmuyden: Die konische Pendelbewegung.

H.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

CLXII.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Fortschritte, die, der Physik im J. 1877. 33. J. 3. Abth. Berlin, G. Reimer. 10 Mk. 50 Pf.

— dass. im J. 1880. 36. J. 1. Abth. Ebd. 7 Mk.

Jahrbuch üb. die Fortschritte d. Mathematik, hrsg. v. C. Ohrtmann. 12. Bd. J. 1880. 1. Hft. Berlin, G. Reimer. 7 Mk.

Methode und Principien.

Raven, O., üb. d. Verhältnisse, welche den Fortbestand v. Gemeinheiten rathsam machen. Göttingen, Vandenhoeck & R. 1 Mk. 40 Pf.

Rethwisch, E., der Irrthum d. Gravitationshypothese. Freiburg, Kiepert. 2 Mk.

Tischner, A., Sta, sol, ne moveare. V. Leipzig, Fock. 1 Mk. 20 Pf.

Lehrbücher, Sammlungen und Tabellen.

Bardey, E., arithmet. Aufgaben nebst Lehrb. d. Arithmetik. 2. Afl. Leipzig, Teubner. 12 Mk.

— methodisch-geord. Aufgabensammlg. üb. alle Teile der Elementar-Arithm. 10. Afl. Ebd. 2 Mk. 70 Pf.

Heis, E., Sammlg. v. Beisp. u. Aufg. aus d. allg. Arithmetik u. Algebra. 60. u. 61. Afl. Cöln, DuMont-Sch. 3 Mk.

Kleyer, A., vollst. gelöste Aufg.-Sammlg. a. allen Zweigen d. Rechenkunst etc. 45—48. Hft. Stuttgart, Maier. à 25 Pf.

Mayenberg, J., Aufgaben d. sphär. Astronomie. Hof, Grau & Co. 60 Pf.

Pöschl, R. u. H. Swoboda, Sammlg. v. Rechnungs-Aufgaben. Wien, Gerold's S. 2 Mk. 40 Pf.

Simony, O., üb. e. Reihe neuer math. Erfahrungssätze. Wien, Gerold's S. 1 Mk. 50 Pf.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Gegenbauer, L., das Additionstheorem d. Functionen. Wien, 25 Pf.

Hanel, J., Reduction hyperellipt. Functionen auf elliptische. Breslau, Köhler. 1 Mk.

Heun, K., die Kugelfunctionen etc. als Determinanten. Göttingen, Vandenhoeck & R. 1 Mk. 60 Pf.

Hočevar, F., zur Integration d. Jacobi'schen Differentialgleichung. Wien, Gerold's S. 40 Pf.

Kaiser, H., die Anfangsgründe der Determinanten. Wiesbaden, Bergmann. 2 Mk. 40 Pf.

Krazer, A., Theorem d. zweifach unendl. Thetareihen auf Grund der Riemann'schen Thetaform. Leipzig, Teubner. 3 Mk. 60 Pf.

Netto, E., Substitutionentheorie u. ihre Anwendg. auf die Algebra. Ebd. 6 Mk. 80 Pf.

Pick, G. A., üb. d. Integration hyperellipt. Differentiale durch Logarithmen. Wien, Gerold's S. 40 Pf.

Prym, F., Unters. üb. die Riemann'sche Thetaformel. u. die Riemann'sche Charakteristikentheorie. Leipzig, Teubner. 6 Mk.

Steck, F. H. u. J. Vielmayr, Lehrb. d. Arithmetik. 8. Aufl. Kempten, Kösel. 1 Mk. 20 Pf.

Wallentin, F., Lehrb. d. Arithmetik f. d. oberen Classen d. Gymnasien u. Realschulen. Wien, Klinkhardt. 3 Mk.

Geometrie.

Allé, M., Beiträge zur Theorie d. Doppelverhältnisses u. zur Raumcollineation. Wien, Gerold's S. 30 Pf.

Dangschat, M., Geometrie f. Mittelschulen. Danzig, Axt. Cart. 1 Mk.

Escherich, G. v., die Constr. d. algebr. Flächen. Wien, Gerold's S. 20 Pf.

— die Constr. der algebr. Curven u. Flächen. Vorläufige Mittheilg. Ebd. 30 Pf.

Drasch, H., Beitrag zur synthet. Theorie d. ebenen Curven. Ebd. S. 1 Mk.

Dziobek, O., neue Beiträge z. Theorie d. Pascal'schen Sechsecks. Berlin, Dümmler. 1 Mk. 20 Pf.

Holl, W., Lehrb. d. Geometrie. Stuttgart, Kohlhammer. 1 Mk. 20 Pf.; Auflös. dazu. 40 Pf.

Hossfeld, C., Constr. d. Kegelschnitts. Jena, Neuenhahn. 2 Mk.

Mocnik, F., Ritter v., geometr. Formenlehre. Prag, Tempsky. 60 Pf.

Schmidt, A., zur Theorie der Cremona'schen Transformationen. Breslau, Köhler. 1 Mk.

Schmidt, F., Handbuch zur Discussion v. Curven einfacher u. doppelter Krümmung u. v. Oberflächen. Hamburg, Behre. 3 Mk.

Schuster, P., Bestimmungen der quadratisch-involutorischen Transformation. Breslau, Köhler. 1 Mk.

Weyr, E., üb. gemeinschaftl. Bisekanten algebr. Raumcurven. Wien, Gerold's S. 15 Pf.

Zeuthen, H. G., Grundriss e. elementar-geometr. Kegelschnittslehre. Leipzig, Teubner. 2 Mk.

Zimmermann, H. M. E. O., verm. Aufgaben u. Lehrsätze üb. d. Kegelschnitte etc. Berlin, Friedländer & S. 1 Mk.

Trigonometrie.

Reidt, F., die trigonometr. Analysis planimetr. Konstruktions-Aufgaben. Leipzig, Teubner. Cart. 1 Mk. 20 Pf.

Praktische Geometrie, Geodäsie.

Klauser, A. H., die Vermessungskunde. (Prakt. Geometrie). Reichenberg, Schöpfer. 2 Mk. 40 Pf.

Klein, F., das Brachy-Teleskop d. Marine-Sternwarte zu Pola. Wien, Seidel & S. 2 Mk. 40 Pf.

— Zweck u. Aufg. d. europ. Gradmessung. Ebd. 2 Mk.

Mauritius, Transporteur u. Massstab. 4. Afl. Coburg, Riemann'sche Hofbuchh. Cart. 75 Pf.

Nehls, Ch., üb. graph. Rectifikation v. Kreisbögen u. verwandte Aufgaben. Hamburg, Jenichen. 1 Mk. 50 Pf.

Theile, F., Anleitung zu barometr. Höhenmessgn. 2. Afl. Dresden, Axt. 1 Mk. 50 Pf.

Verhandlungen der vom 13. bis 16. Septbr. 1880 zu München abgeh. 6. allgem. Conferenz d. europ. Gradmessg., red. v. C. Bruhns u. A. Hirsch. Zugleich m. d. Generalbericht f. 1880, hrsg. vom Centralbureau. Berlin, G. Reimer. 18 Mk.

Mechanik.

Opitz, P., e. Sätze üb. d. Anziehung. Göttingen, Vandenhoeck & R. 1 Mk. 20 Pf.

Stelzel, K., Grundzüge d. graph. Statik und deren Anwendg. auf den continuirl. Träger. Graz, Leuschner & L. 3 Mk. 40 Pf.

Technik.

Centralblatt f. Elektrotechnik. Hrsg. v. F. Uppenborn jr. J. 1882. 2. Sem. (18 Nrn.). Nr. 16. München, Oldenbourg. Halbj. 10 Mk.

Optik, Akustik und Elasticität.

Dippel, L., d. Mikroskop u. s. Anwendng. 2. Afl. 1. Thl. Braunschweig, Vieweg & S. 10 Mk.

Hauck, G., die malerische Perspective. Berlin, Springer. 80 Pf.

Erd- und Himmelskunde.

Beobachtungen, angestellt am astrophys. Observ. in OGyalla, hrsg. v. N. v. Konkoly. 4. Bd. 1881. Halle, Schmidt. 12 Mk.

Beobachtungen der meteorolog. Stationen im K. Bayern. Hrsg. von W. v. Bezold u. C. Lang. 4. J. 1. Hft. München, Th. Ackermann. prcplt. 18 Mk.

Oippich, F., üb. polaristrobometr. Methoden. Wien, Gerold's S. 1 Mk. 40 Pf.

Publicationen d. astrophysik. Observ. zu Potsdam. Nr. 9. 3 Bde. 1. Stück. Leipzig, Engelmann. 6 Mk.

Nautik.

Dabovich, P. E., nautisch-techn. Wörterbuch d. Marine. Deutsch, ital., franz. u. engl. 12. Lfg. Wien, Gerold & Co. 2 Mk.

Physik.

Clausius, R., üb. d. verschied. Masssysteme z. Messg. elektr. u. magn. Grössen. Leipzig, Barth. 60 Pf.

Stephan, C., Beitr. zu den Bezichgn. zw. Fluidität u. galvan. Leitungsvermögen. Breslau, Köhler. 1 Mk.

Wächter, F., über die materiellen Theile im elektrischen Funken. Wien, Gerold's S. 50 Pf.

Wiedemann, G., die Lehre v. d. Electricität. 1. Bd. Braunschweig, Vieweg & S. 20 Mk.

Wild, H., das magnetische Ungewitter v. 30. Jan. bis 1. Febr. (e. St.). 1881. Leipzig, Voss' Sort. 2 Mk.

Wüllner, A., Lehrb. d. Experimentalphysik. 1. Bd. 4. Aufl. Leipzig, Teubner. 10 Mk.

Vermischte Schriften.

Abhandlungen d. kgl. Akad. d. Wiss. zu Berlin. Physikal. Abhandlungen. Cart. Berlin, Dümmler. 8 Mk.

Journal f. die reine u. angew. Mathematik. Hrsg. v. L. Kronecker u. K. Weierstrass. 93. Bd. 1. Hft. Berlin, G. Reimer. prcplt. 12 Mk.

Sitzungsberichte der k. Ak. d. Wiss. Math.-naturw. Cl. 1. Abth. 84. Bd. 3—5. Hft. Wien, Gerold's S. 8 Mk. 40 Pf.

— dass. 2. Abth. 85. Bd. 1—3. Hft. Ebd. 12 Mk. 90 Pf.

— dass. 3. Abth. 85. Bd. 5 Hfte. Ebd. 11 Mk. 50 Pf.

Sitzungsberichte d. math.-physik. Cl. d. k. b. Akad. d. Wiss. zu München. J. 1882. 3. Hft. München, Franz. 1 Mk. 20 Pf.

Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 3.

Fig. 4.

Fig. 5.

Fig. 7.

Fig. 11.

Fig. 12.

F W Kunike, Greifswald

XXVI. D

F B K_2 A M K_3 K_1 K_6 K_5 K_4 D C P_6 P_1 S P_3 P_5

des vollständigen Vierecks.

T' D E Y T E'

Steindr. v. ...

INHALT.

Greifswald, gedruckt bei F. W. Kunike.





